

Engelbert NIEHAUS, Melanie PLATZ, Miriam KRIEGER, Kathrin WINTER; Landau , Flensburg

Elektronische Beweise in der Lehre

In der Mathematikdidaktik spielt die Vermittlung von Argumentationskompetenzen eine große Rolle. Diese bilden die Basis für das in höheren Klassenstufen in unterschiedlichen Kontexten thematisierte Beweisen mathematischer Aussagen und Zusammenhänge. Um einerseits Lehramtsstudierende beim Erwerb von Argumentationskompetenzen zu unterstützen und um andererseits Schüler/innen altersadäquate Argumentationskompetenzen vermitteln zu können, werden webbasierte Ansätze zur Umsetzung von Distraktoren in E-Beweis-Systemen analysiert.

1. Zielsetzung der elektronischen Beweise

Ausgehend von ersten Tests in Übungen und e-Klausuren auf Basis von ILIAS im Masterstudiengang Lehramt Mathematik wurde die Beweisumgebung weiterentwickelt, damit diese sowohl offline ohne Server im Browser als auch online in iMathAS lauffähig ist (iMathAS 2016). iMathAS wurde dabei für den Übungsbetrieb und die e-Klausuren verwendet. Das zunächst eingesetzte elektronische Prüfungssystem ILIAS an der Universität Koblenz-Landau hatte Schwächen (IWM Koblenz 2011) im Bereich der Darstellung von mathematischen Formeln und der automatisierten Bewertung von algebraischen Termen, die nicht in beliebiger Form präsentierte Terme als korrekt interpretiert. Ferner bezog sich die Nutzung von Beweispuzzeln lediglich auf eine Standard-e-Klausurumgebung ohne verfügbare Methoden zur automatischen Beweisüberprüfung im Sinne von Adams u. a. (1999). Die allgemeine Motivation zum Einsatz von e-Klausuren findet man z.B. bei Wetter (2010). Um auch die diagnostischen Möglichkeiten und Grenzen einer e-Beweisumgebung untersuchen zu können, wurde die Offline-Version implementiert (Platz et al. 2016), sodass die im Browser generierten Daten unabhängig von iMathAS gespeichert und gezielt mit Nutzereinstimmungen an einen ausgewählten Server zur Analyse gesendet werden können. Ein e-Beweis wird als Zwischenstufe zwischen der reinen Beweisrezeption aus einem Lehrbuch und einem eigenständigen Papier&Bleistift-Beweis betrachtet. Zielsetzung war es, die Implementierung von elektronischen Beweisen über die e-Klausuren und Online-Übungen hinaus zu einem Analyseinstrument für Argumentationskompetenzen in der Lehre einsetzen zu können .

2. Umsetzung der e-Beweis-Systeme als Analyseinstrument

Durch die Erweiterung kann man nun die vollständige Struktur des Beweisprozesses der Lernenden zu jedem Zeitpunkt vollständig als Zustand in einer XML-Datei speichern (XML-eXtensible Markup Language) und jeder gespeicherte Zustand kann wieder in der Beweisumgebung rekonstruiert werden. Dies liefert die Grundvoraussetzung um Sackgassen und Zwischenschritte bei der Beweisentwicklung der Lernenden einer fachdidaktischen Analyse unterziehen zu können. Die Umsetzung der e-Beweis-Systeme ist ein Beweispuzele, dem eine fachdidaktische Fehleranalyse vorausgeht. Im Allgemeinen müssen die Lernenden m Fragmente eines Beweises auf p Positionen mit $p \leq m$ verteilen und jede Verbindung von je zwei Fragmenten (s_k, s_{k+1}) aus einer Menge von gültigen Gesetzen und bereits bewiesenen Sätzen begründen. Aus dieser Menge der Begründungen $B := \{b_1, \dots, b_g\}$ müssen die Lernenden für jeden Beweisschritt (s_k, s_{k+1}) also die Begründung auswählen, die einen einzelnen Beweisschritt erklären. Die Begründungen der Lernenden (z.B. $\{b_1, b_3, b_7\}$) für einen Beweisschritt (s_k, s_{k+1}) werden mit den korrekten Begründungen zu (s_k, s_{k+1}) verglichen. Begründungen, die der Lernende fälschlicherweise nicht angegeben oder falsche Begründungen, die der Lernende angegeben hat, werden für die Analyse der Beweiskompetenzen des Lerners und zur Bewertung von Distraktoren verwendet. Aus der fachdidaktischen Analyse der Beweiskompetenzen von Lernenden auf Papier werden die Distraktoren entwickelt, die typische Fehler in der Argumentation als Beweisoptionen aufgreifen. Distraktoren dienen als Analysewerkzeug von Argumentationskompetenzen und zur späteren Entwicklung eines Hilfesystems für die Verbesserung von Argumentationskompetenzen. Ferner kann durch die Distraktoren der Aufbau der Beweissequenz durch das reine "Aussehen" der Beweisfragmente ohne inhaltliches und logisches Verständnis für den Lerner erschwert werden um so tatsächlich Beweiskompetenzen zu schulen. Im einfachsten Fall bestehen die zur Auswahl angebotenen n Beweisschritte $S := \{s_1, \dots, s_n\}$ lediglich aus den Beweisfragmenten eines korrekten Beweisweges (ohne Distraktoren). Die Beweisfragmente können auch die Möglichkeit von Beweisalternativen vorsehen. Dann werden die Lösungen der Lernenden mit einem Lösungsgraphen aus unterschiedlichen Beweisalternativen verglichen und automatisch analysiert. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, dass man Lücken in einem Beweis lässt, die als editierbare Beweisfragmente angeboten werden. Damit werden die Freiheitsgrade in Richtung eines reinen Papierbeweises ohne Angabe von Beweisfragmenten erhöht. Diese editierbaren Beweisfragmente müssen nicht leer sein, sondern können bereits Textelemente in ASCII-Math (ASCII-Math 2016) enthalten, die Eingabe der mathematischen Formeln in der Syntax erleichtern.

3. Testumgebung für Argumentationskompetenzen

Der Unterschied zwischen elektronischen Beweisen und Arbeitsblättern, die ausgedruckte Beweisfragmente enthalten, ist die Möglichkeit der Randomisierung von Beweisfragmenten in der Aufgabenstellung, die das e-Beweis-System ermöglicht. Diese Randomisierung der Beweisfragmente war bereits in der ersten verwendeten e-Klausurumgebungen ILIAS möglich (ILIAS Society 2013). Allerdings lässt eine e-Klausuraufgabe in ILIAS nur eine korrekte Überprüfung der Reihenfolge der Beweisfragmente zu und nicht die jeweilige Begründung der Beweisschritte aus einer Menge von gegebenen Begründungen. Ferner war die Mischung von gegebenen Beweisfragmenten und editierbaren Beweisfragmenten nicht möglich. Bei längeren Beweisssequenzen konnten auch keine Vorschläge als Hilfen für den nächsten Beweisschritt angeboten werden, um die Komplexität der Beweise und die Auswahl der Distraktoren zu steuern. Diese Optionen konnten nur nach Wechsel zu dem speziell für die Mathematik entwickelten Übungssystem iMathAS implementiert werden (Lipmann, 2013). Dieses Vorgehen war auch notwendig, damit während der Entstehung eines Beweises nicht nur die Lösungen abgespeichert und bewertet werden können, sondern auch die Beweisheuristik selbst ggf. durch das Speichern von Zwischenzuständen mit Sackgassen und Revision von Beweisfragmenten durch die Lernenden einer späteren fachdidaktischen Analyse unterzogen werden können. Im Wesentlichen werden durch die aktuelle Implementierung erst die Voraussetzungen für die Kontrolle der Freiheitsgrade für die e-Beweisumgebungen und die fachdidaktische Argumentationskompetenzen mit semi-automatischer Bewertung gegeben. Die fachdidaktische Qualität von technischen Lösungen ist natürlich nicht vergleichbar mit einer manuellen Bewertung und Kommentierung eines Papierbeweises. Eine technische Lösung ermöglicht ein größeres n für die fachdidaktische Analyse der Beweis-kompetenzen in kontrollierbaren technischen Umgebungen. Auf die fachdidaktische Analyse von Papierbeweisen wird man insbesondere für die Entwicklung von Distraktoren nicht verzichten können.

4. Arbeitsweise mit elektronischen Beweispuzzles

Durch die oben genannten Erweiterungen der Zuordnung zu Begründungen zu einzelnen Beweisschritten kann man das Problem als reine graphentheoretische Anordnungsaufgabe verstehen, bei der nicht nur eine Teilmenge der Beweisfragmente in eine logisch sinnvoll Abfolge gebracht werden muss, sondern die Verbindungen in einem Graphen werden mit Begründungen versehen (Attribuierung von gerichteten Kanten mit Begründungen). Ausgehend von einem *Startzustand* ist mit den gegebenen Voraussetzungen eine Beweislücke zu einem in der Aufgabenstellung genannten Zielzustand

zu schließen (Interpolationsbeweis). Beweisfragmente sind dabei die möglichen Zustände in einem Beweisgraphen. Eine Verknüpfung zwischen Beweisfragmenten kann eine Äquivalenz oder Implikation zwischen Aussagen oder auch die Gleichheit oder Ungleichheit zwischen Termen sein. Jeder Verknüpfung zwischen Beweisfragmenten werden Begründungen zugeordnet, wie z.B. die Anwendung des Distributivgesetzes oder der Dreiecksungleichung als Begründung für eine Abschätzung eines Terms nach oben. Beweisschritte können einzeln auf den logischen Zusammenhang zwischen den Beweisschritten beurteilt werden und auf die Korrektheit bzgl. Begründungen überprüft werden. Ferner können optional weitere korrekte Begründungen von den Beweisautoren angegeben werden, die aber bei einem Fehlen im Beweis des Lerners nicht zu einem Punktabzug führen. Damit besteht die Möglichkeit für die Lehrenden, entsprechend zu den kommunizierten Konventionen für die Beweisdarstellung zwischen notwendigen und optionalen Begründungen zu unterscheiden und in der automatischen Bewertung diese zu berücksichtigen. Damit können die Kompetenzen bei der Begründung von Beweisschritten zusammen mit der Korrektheit der Beweisschritte automatisch identifiziert werden. In der graphentheoretischen Abbildung des Lösungsraumes kann ferner die Lücke zwischen Beweisschritten automatisch für die Bewertung der Beweisqualität berücksichtigt werden. Dies ist sowohl beim *Vorwärtsarbeiten* von dem Startzustand, als auch bei einem *Rückwärtsarbeiten*, in der e-Beweisumgebung implementiert (Stein 1986). Die aktuelle Version (Platz 2016) ist in einer Offline-Version verfügbar, die nur einen Webbrowser (z.B. Firefox) benötigt und dennoch eine automatische Bewertung und Unterstützung von elektronischen Beweispuzzeln für die Lernenden ermöglicht. Mit einem Offline-Autorensystem ist zugleich die Erstellung und Anpassung der e-Beweise an die Konventionen in der Lehre möglich, sowie die Einbeziehung von typischen Fehlern in der Fachdidaktik.

5. Literatur

- Adams, A.A. u. a., 1999. Automated theorem proving in support of computer algebra: symbolic definite integration as a case study. In *Proceedings of the 1999 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. S. 253–260.
- Lipmann, David, 2013, Internet Mathematics Assessment System), Online-Portal für IMathAS Available at: <http://www.imathas.com>.
- Platz, M., Krieger, M. Winter K., Niehaus, E. 2016. Online Portal zu Nutzung von e-Beweisen Available at: <http://e-beweis.weebly.com>.
- ILIAS Society, 2013. ILIAS Open Source e-Learning. Available at: <http://www.ilias.de>.
- Stein, M., 1986. *Beweisen. Eine Analyse des Beweisprozesses*.
- Wetter, G., 2010. Unterstützung von E-Klausuren durch das Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Mainz. *PIK - Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation*, 33(1), S.45–55.