

Melanie PLATZ, Landau, Miriam KRIEGER, Münster, Kathrin WINTER, Münster, Engelbert NIEHAUS, Landau, Ingo DAHN, Koblenz

## **Beweisen lernen durch lehren? - Chancen und Grenzen dieses Konzeptes**

Die Unterrichtsmethode „*Lernen durch Lehren*“ (LdL) beruht auf der Annahme, dass Schülerinnen und Schüler (SuS) und Studierende lernen, indem sie sich fachliche Inhalte gegenseitig vermitteln. Dieses Konzept soll auf das mathematische Beweisen innerhalb eines E-Proof-Systems übertragen werden. Es ergibt sich folgende wissenschaftliche Fragestellung: *Führt die Einnahme der Lehrendenrolle zu einem besseren Verständnis von Beweiskonzepten und der Fähigkeit, logische Schritte strukturiert(er) aufzubauen und zu begründen?*

### **1. Einleitung**

Im Rahmen der handlungsorientierten, konstruktivistischen Unterrichtsmethode *LdL* erläutern die Lehrenden den Lernern, wie sie beim Beweisen vorgehen und begründen, warum sie ein bestimmtes Vorgehen gewählt haben. Die Einnahme von Lehrendenrollen im Kontext von mathematischen Beweisen bietet eine diagnostische Funktion, da u. a. die verwendeten Erklärungsmuster erfasst und analysiert werden können. Dabei kann bestimmt werden, welche Erklärungsfragmente für eine Erklärung herangezogen bzw. nicht herangezogen werden und es kann bewertet werden, welche Erklärungsfragmente den Lernerfolg unterstützen.

Die Untersuchungen hierzu sind eingebettet in die Entwicklung eines E-Proof-Systems zur Unterstützung beim Beweisen lernen – einem Kooperationsprojekt von Wissenschaftler(inne)n der Universitäten Koblenz-Landau und Münster.

Ein Ziel dieses E-Proof-Systems ist die schrittweise Heranführung von Studierenden an einen selbst erstellten Beweis mit Stift und Papier (Paper&Pencil) ohne jegliche Hilfestellungen. Dabei ist das E-Proof-System als Interpolationshilfe zwischen einem fertigen Beweis in einem Buch und dem selbst erstellten Paper&Pencil-Beweis anzusiedeln. In einem ersten Schritt kann der Beweis schrittweise am PC nachvollzogen werden (vgl. Alcock & Wilkinson, 2011) und zur Übung anschließend können in einem Beweispuzzle (vgl. Ensley & Crawley, 2006) Beweisfragmente geordnet werden. Innerhalb der gegebenen Puzzleteile sind sowohl korrekte als auch typische fehlerhafte Beweisfragmente mit diagnostischem Potential enthalten (vgl. u. a. Winter, 2011). Auf diesem Weg werden die Freiheitsgrade erhöht, aber auch der Korrekturaufwand. Ein weiteres Ziel des E-Proof-Systems besteht darin, den Korrekturaufwand bei möglichst hohen Freiheitsgraden möglichst gering zu halten.

In einem Fragebogen zum Mathematischen Beweisen lernen wurden persönliche Angaben, das Selbstkonzept und die Selbstwahrnehmung der Proband(innen), die

Motivation und Heuristiken beim Beweisen abgefragt (siehe [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Fragebogen.pdf](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Fragebogen.pdf)).

Befragt wurden zum einen 28 Studierende der Universität Münster, die ein Seminar zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie besuchten, in dem auch in jeder Seminarsitzung Beweise thematisiert und durch die Studierenden selbst vermittelt wurden. Zum anderen wurden sechs Teilnehmer/-innen der Schüleruni der Universität Koblenz-Landau befragt, die eine Veranstaltung zu den Grundlagen der Funktionentheorie besuchten.

Die Schüleruni ermöglicht es begabten SuS bereits während der Schulzeit ein Frühstudium aufzunehmen. Die SuS nehmen dabei an regulären Lehrveranstaltungen an der Universität teil, können Prüfungen ablegen und so Leistungsnachweise erwerben.

Durch die Befragung stellte sich heraus, dass vielen Proband(inn)en die Erfahrung mit und die Übung von Beweisen fehlt, weshalb ihnen das Beweisen eher schwer fällt. Außerdem wurde kritisiert, dass Beweise nur selten bis nie in der Schule thematisiert werden. Durch die Verwendung des E-Proof-Systems soll ein selbstgesteuertes Lernen durch direkte Rückmeldungen des Systems an den Lernenden ermöglicht werden. Dadurch können verschiedene Beweise geübt werden, Lernende mehr Erfahrungen mit Beweisen sammeln und dadurch ihre Beweiskompetenzen erwerben. Um das Lernen dabei optimal unterstützen zu können, sollen auf die individuellen Kompetenzen der lernenden Person adaptierte Hilfestellungen zur Verfügung gestellt werden. Solche Hilfestellungen werden im Rahmen von Studien mit (Früh-)Studierenden identifiziert und entwickelt.

## 2. Explorative Vorstudie

Im Rahmen der explorativen Vorstudie an der Schüleruni wurde ein Satz aus der Funktionentheorie ausgewählt

(siehe [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Satz.png](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Satz.png)).

Für den relativ kurzen Beweis musste eine Parametertransformation durchgeführt werden. Dieser Satz wurde mitsamt Beweis in das E-Proof-System IMathAS (vgl. Platz et al., 2014) implementiert

(siehe [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/IMathAS.html](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/IMathAS.html)),

sodass er von den teilnehmenden SuS im Vorfeld der Studie bearbeitet und geübt werden konnte. Im Vorfeld der Studie bekamen die SuS den Arbeitsauftrag, sich den oben genannten Beweis in IMathAS anzuschauen und zu versuchen, diesen zu verstehen. Die Testgruppe ( $n=6$ ) wurde zunächst zufällig in Lehrende ( $n=3$ ) und Lernende ( $n=3$ ) eingeteilt, anschließend wurde jedem Lehrenden ein/e Lernende/r zugeteilt. In einem Vortest (siehe [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Vortest.pdf](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Vortest.pdf)) wurde abgefragt, ob der Beweis

verstanden wurde und ob der Beweis im Vorfeld bearbeitet wurde. Außerdem wurde die Beweisidee abgefragt und der Beweis sollte durchgeführt werden. In der darauf folgenden Praxisphase sollten die Lehrenden den Lernenden den Beweis erklären. Dazu standen ihnen ein PC mit Internetverbindung mit vorgefertigten Hilfestellungen (Beweis in IMathAS & Beweispuze in GeoGebra zur besseren Visualisierung, siehe [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Hilfestellung.ggb](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Hilfestellung.ggb)) zur Verfügung sowie die Möglichkeit, selbst Hilfestellungen zu suchen und zu erstellen.

Dem Lernenden stand nur der Lehrende als Quelle zur Verfügung. Im Nachtest wurde abgefragt, ob der Beweis verstanden wurde und wiederum sollte die Beweisidee erläutert werden und der Beweis sollte durchgeführt werden. Außerdem wurden einige Fragen im Nachtest auf die Gruppe der Lehrenden bzw. Lernenden zugeschnitten, die sich auf die Qualität der Erklärung des Lehrenden bezogen sowie auf die Qualität der Hilfsmittel, die vom Lehrenden verwendet wurden (siehe [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Nachtest-Lehrer.pdf](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Nachtest-Lehrer.pdf); [mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Nachtest-Lerner.pdf](http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Nachtest-Lerner.pdf)). Im Vorfeld wurde der Beweis leider nur wenig geübt, weshalb die erzielten Ergebnisse eher im mittleren Leistungsfeld lagen. Insgesamt konnte eine Leistungssteigerung im Nachtest festgestellt werden, wobei diese bei den Lehrenden höher war. Hauptprobleme beim Durchführen des Beweises lagen in der Formelschreibweise und darin, dass Bezüge und Begründungen häufig weggelassen wurden. Veranschaulichungen und das Herausstellen der Beweisidee wurden bei der Erklärung als sehr hilfreich eingestuft.

Eine Studierendenbefragung an der Universität Münster ergab insbesondere, dass die Studierenden durch das eigene Einarbeiten in einen mathematischen Beweis mit dem Ziel, diesen methodisch so aufzubereiten, dass sie ihn im Rahmen der Lehrveranstaltung vermitteln und auf Nachfragen reagieren konnten, das eigene Beweisverständnis deutlich erleichtert hat. Der Meinung von knapp 85 % der Befragten dürften sich dadurch ihre Beweiskompetenzen verbessert haben, da ihnen das heuristische Vorgehen beim Beweisen an sich deutlicher geworden sei.

### **3. Zusammenfassung und Ausblick**

In das System IMathAS können E-Proofs sowie Hilfestellungen implementiert werden, um Beweiskompetenzen zu fördern. Im Folgenden sollen empirische Studien mit wesentlich größeren Testgruppen durchgeführt werden, um die Reliabilität der Ergebnisse zu erhöhen. Dafür muss ein passendes Beobachtungswerkzeug entwickelt werden, welches die Authentizität der Situation nicht verletzt. Außerdem muss besonders darauf geachtet werden, dass kein unkontrollierter Tausch der Lernenden-/Lehrendenrolle während der Praxisphase stattfindet. Das ist für die Reliabilität

der Ergebnisse von großer Bedeutung. Für spätere Praxisphasen-Durchgänge können die Lernenden-/ Lehrendenrollen dann ggf. neu eingeteilt werden. Die Rollenzuteilung sollte basierend auf der Leistung in einem Vortest gleichverteilt stattfinden, statt zufällig. Abgeleitet aus den Ergebnissen dieser empirischen Studien sollen Hilfestellungen zur Beweisunterstützung identifiziert und optimiert werden.

Das IMathAS begleitete LdL kann dadurch umgesetzt werden, dass Hilfsmittel, die Personen in der Lehrendenrolle für den Erklärungspfad verwenden, erfasst werden (z. B. durch Monitoring des Mauszeigers und der Klicks auf dem Computerbildschirm) und in eine Vorschlagslogik von weiteren Erkläroptionen einbezogen werden. Zurzeit kann die gesamte Historie noch nicht automatisiert in die Vorschlagslogik integriert werden. Die Nutzung der Erklärpfade müsste von den IMathAS-Autoren manuell als Datensatz in eine Datenbank kopiert werden. Jede Ergänzung dieser Datenbank verändert die semantischen Bezüge zwischen Erklär- und Beweiselementen, die von den (Früh-)Studierenden hergestellt wurden. Eine Optimierung und Automatisierung der diagnostischen Funktionen könnte durch IMathAS-Entwickler in Zukunft ermöglicht werden.

Die Forschungsfrage, inwiefern das Einnehmen der Lehrerrolle im Kontext von Beweisen hilft und auf welchem Abstraktionsniveau die Lerner starten sollen, muss zunächst unbeantwortet bleiben, soll aber durch zukünftige empirische Studien beantwortet werden. Allerdings können die folgenden Schlussfolgerungen für die weitere Konzeption der Beweisunterstützung in der Schüleruni gezogen werden: Das Konzept LdL sollte mit den Teilnehmenden der Schüleruni häufiger durchgeführt werden, um auf die SuS zugeschnittene Hilfestellungen bestimmen zu können und die individuelle lerngruppenbezogene Diagnose und die Integration von Fehlertypen in die Beweisformulierung zu ermöglichen. Außerdem sollte die mathematische Formelschreibweise trainiert werden und die Bedeutung von Bezügen und Begründungen in Beweisen sollte erläutert werden.

## **Literatur**

- Alcock, L. & Wilkinson, N. (2011). E-Proofs : Design of a Resource to Support Proof Comprehension in Mathematics. *Educational Designer*, Vol.1 (No.4). ISSN 1759-1325.
- Ensley, D. E., & Crawley, J. W. (2006). *Discrete mathematics: mathematical reasoning and proof with puzzles, patterns, and games*. Wiley.
- Platz, M., Niehaus, E., Dahn, I. & Dreyer U. (2014). IMathAS & automated Assessment of mathematical Proof. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, pp. 915-919.
- Winter, K. (2011). *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment*. WTM-Verlag. Münster.