Entwicklung von Item-Distraktoren

mit diagnostischem Potential

zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse

-

Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen

und konzeptionelle Entwicklung

für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment

Inaugural Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

des Doktors in den Erziehungswissenschaften

an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von: Kathrin Winter, Hannover

2010

---

1. Gutachter: Prof. Dr. Martin Stein

2. Gutachter: Prof. Dr. Gilbert Greefrath

Tag der mündlichen Prüfung: 30.03.2011

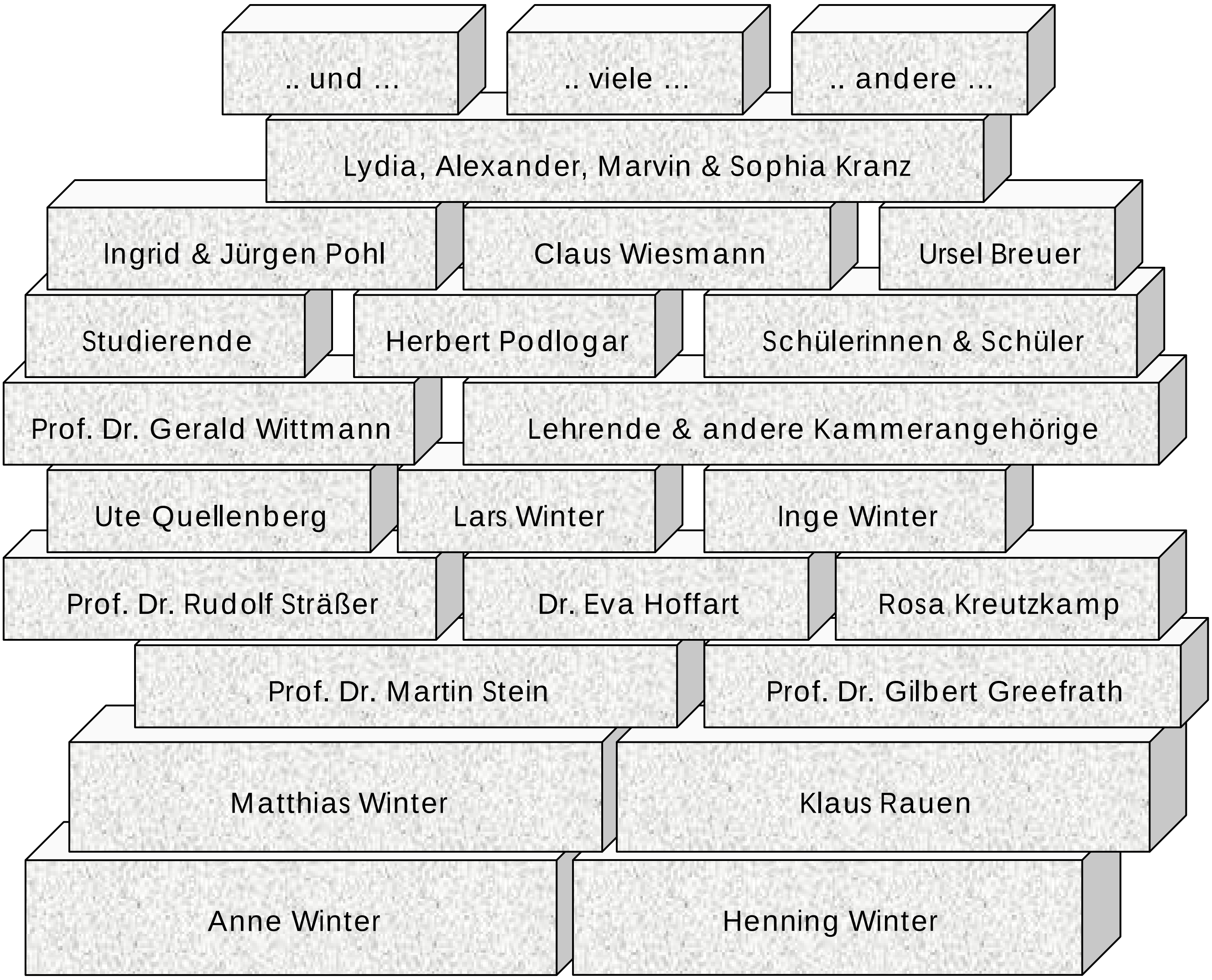
Vorwort

Diese Arbeit ist im Rahmen des Projektes Mathe-Meister entstanden. In diesem Projekt geht es um die Entwicklung eines internetbasierten Mathematik-Self-Assessments für den beruflichen Weiterbildungssektor in Industrie, Handel und Handwerk. Der Test umfasst inhaltlich die mathematischen Grundlagen, die für die jeweiligen Weiterbildungsangebote seitens der Rahmenvorgaben sowie der Lehrpersonen vorausgesetzt werden. An solchen Weiterbildungsangeboten interessierte Personen sollen dadurch die Möglichkeit erhalten, ihre eigenen mathematischen Kompetenzen diesbezüglich selbst zu überprüfen und auf Basis ihrer Ergebnisse eine diagnostische Rückmeldung als Grundlage für eventuell nötige Fördermaßnahmen erhalten. Angeboten wird der Online-Selbsttest in einem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten modifizierten Multiple-Choice-Design.

Meine Aufgabe hinsichtlich dieser Dissertation bestand darin, Distraktoren – also die im Multiple-Choice-Test angebotene Antwortauswahl zu jedem Item – zu entwickeln, die über ein diagnostisches Potential verfügen. Damit sollen auf Basis der vom Probanden individuell ausgewählten Antworten aussagekräftige fehlerdiagnostische Rückmeldungen durch das System gegeben werden können. Die Entwicklung einer konzeptionellen Idee und die Darstellung der auf Grund dieser Idee durchgeführten Forschungs- und Entwicklungsarbeit zur Realisierung dieser Fehleranalyse in einer internetbasierten Testumgebung sind Kern dieser Dissertation.

DANKE …

… an alle, die mich die ganze Zeit begleitet und unterstützt haben – ob für die Chance, diese Arbeit schreiben zu können, die Teilnahme an Tests und anderen Erhebungen, akribisches Korrekturlesen, fachliche Diskussionen, Tipps und konstruktive Anregungen, zwischenmenschliche Gespräche … für Motivation und für's Mutmachen … für's Mitbauen an dieser Arbeit …



Ein ganz besonderer Dank geht an meine Eltern Anne und Henning, an meinen Bruder Matthias und an Klaus und Casper für Euer Verständnis und dass Ihr mir immer und ohne Ausnahme „den Rücken frei gehalten habt"! Ihr seid mein Fundament und habt das hier möglich gemacht!

INHALTSVERZEICHNIS

TEIL I EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEMSTELLUNG UND DIE ANLAGE DER ARBEIT

1 Einleitung

Mathematische Kompetenzen sind nicht nur im Rahmen der schulischen Ausbildung, sondern stets auch in unterschiedlichem Umfang für die berufliche Aus- und Weiterbildung sowie den Berufsalltag von Belang. Mathematik bestimmt das Arbeitsleben mehr, als es uns bewusst ist: täglich werden Kosten überschlagen, Mischungsverhältnisse und Materialmengen für bestimmte Flächen und Volumina berechnet oder die benötigte Arbeitszeit pro Person ermittelt. Die dazu benötigten mathematischen Kompetenzen werden häufig nicht bewusst wahrgenommen. Dass Vielen nicht bewusst ist, wie notwendig Mathematik bzw. mathematische Kompetenzen in verschiedenen Situationen sind, stellt u. a. in der Berufsaus- und -weiterbildung ein Problem dar: „Viele Interessenten sind sich nicht darüber im Klaren, dass Mathematik in dem von ihnen angestrebten Beruf relevant ist – geschweige denn verfügen sie über die notwendigen mathematischen Grundlagenkompetenzen für einen erfolgreichen Einstieg in einen Lehrgang.“ Aus dieser Problematik entstand die Idee für das Projekt „Mathe-Meister“.

Das Ziel des Projektes Mathe-Meister besteht in der Entwicklung und Implementierung eines internetbasierten Self-Assessments (Selbsttests)[1] zu mathematischen Grundvoraussetzungen für angehende Meisterschüler[2] verschiedener Berufssparten. Dies erfordert die Entwicklung berufsspezifischer Tests und die Konzeption eines den Projektanforderungen entsprechenden Testdesigns. Ein ausschlaggebendes Element dieses Selbsttestmoduls für die Abgrenzung zu bereits bestehenden internetbasierten Self-Assessments sind individuelle, inhaltsbezogene Rückmeldungen wie eine detaillierte Defizitanalyse hinsichtlich der mathematischen Themen. Des Weiteren soll eine individuelle Fehleranalyse

---

1 Die Arbeit beinhaltet unter Kapitel 11 ein Glossar mit fachübergreifenden oder für diese Arbeit speziell definierten Begriffen.

2 Zur Verbesserung der Lesbarkeit dieser Arbeit wird auf begriffliche Doppelungen verzichtet und es werden ggf. maskuline Termini gleichgeschlechtlich verwendet.

für alle integrierten Aufgabenbereiche als Basis für eigene Fördermaßnahmen ausgegeben werden. Dabei wird Neuland betreten, denn bestehende internetbasierte Tests zu verschiedenen Bereichen der Mathematik liefern bisher keine detaillierte, individuelle Fehleranalyse, sondern in der Regel nur eine dichotome Aussage im Sinne von „falsch“ und „richtig“.

Die besondere Herausforderung dieser Arbeit besteht darin, berufsspezifische Tests in einem Multiple-Choice-Design für angehende Meisterschüler so zu konstruieren, dass auf Basis der Distraktoren – also der zu jedem Item zur Auswahl stehenden Antworten – möglichst inhaltsvolle diagnostische Aussagen über die einzelnen Probandenergebnisse automatisch durch das Mathe-Meister-System generiert werden können. In der mathematikdidaktischen Literatur wird dieser Aspekt bisher nicht behandelt. In dieser Arbeit wird diese Lücke geschlossen. Die konzeptionelle Idee, Forschungs- und Entwicklungsarbeit zur Realisierung dieser Fehleranalyse in einer internetbasierten Testumgebung mit den entsprechenden diagnostischen Beschränkungen ist Schwerpunkt dieser Arbeit.

Dabei greife ich insbesondere bestehende Erkenntnisse der Testtheorie sowie fehleranalytischer Untersuchungen der Mathematikdidaktik und der Psychologie auf und führe zusätzlich umfangreiche empirische Untersuchungen durch. Im Bereich der Kategorisierung von Fehlermustern und Typisierung von Lösungsmustern wird diese Arbeit neue Ergebnisse liefern und bspw. weitere mathematische Themengebiete mit aufnehmen.

Auf internationaler Ebene hinsichtlich mathematikdidaktischer Forschung in der Berufswelt bettet sich diese Arbeit in den aktuellen Stand mathematikdidaktischer Forschung ein. „A recent OECD Global Science Forum on ‘Mathematics in Industry’ has recognized the intimate connections between innovation, science and mathematics and has recommended a new strategy for education of students, including more interdisciplinary training. Classically students on all levels have been taught the tools of mathematics with little or no mention of real world applications, with little or no contact with what is done in the workplace (be it a classical engineering industry or other more recent activities […]).” [ICIAM 2008] Die Relevanz der Einbindung didaktischen Wissens in die Industrie und Berufswelt wird also schon seit einiger Zeit auf internationaler Ebene diskutiert. Dies führte bspw. zur Initiierung der EIMI-Studie (Educational Interfaces between Mathematics and Industry). Die EIMI-Studie ist ein Zusammenschluss aus der ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) und dem ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics). Dieser Studie liegen zwei leitende Hypothesen zugrunde:

„(1) There are intimate connections between innovation, science, mathematics and the societal production and distribution of goods and services, in short: there intimate connections between mathematics and industry.

(2) There is a need for a fundamental analysis and reflection on – maybe new – strategies for education and training of students in view of these connections.“ [ICMI/ICIAM 2010]

Mit dem Ziel eines besseren Verständnisses dieser Zusammenhänge und der Entwicklung konkreter Vorschläge für die schulische und berufliche Aus- und Weiterbildung leistet die Studie einen Beitrag zur Förderung des beruflichen Werdeganges [vgl. ICMI, ICIAM 2008]. Die Erkenntnisse und Ergebnisse der hier vorliegenden Arbeit werden ihren Teil dazu beitragen und als Ideen in die EIMI-Studie, die im Jahr 2008 initiiert wurde, aufgenommen [vgl. FitzSimons, Mitsui i. V.; Winter 2010].

Aufbau und Strukturierung der Arbeit

Die Struktur dieser Arbeit ist aufgrund der Zielsetzung (Entwicklungsaufgabe mit konkreten Zeitvorgaben) sowie der starken Einbindung in das Gesamtprojekt Mathe-Meister im Vergleich zu vielen anderen Dissertationen aus den verschiedenen didaktischen Bereichen sehr breit gefächert. Diese komplexe Struktur und die Vernetzung von Inhalten, Methoden und Aufgabenverteilungen innerhalb des Projektes werden auch in dieser Dissertationsschrift wiedergegeben. Ich werde dazu den Prozess und die Ergebnisse der Generierung und Auswahl von Testitems und den dazugehörigen Antworten beschreiben. Der Forschungsschwerpunkt meiner Arbeit liegt dabei auf der Auswahl typischer Antwortalternativen, die als Distraktoren für den Multiple-Choice-Test Mathe-Meister eingesetzt werden können. Hierzu wende ich theoretische und empirische Analyse an, damit auf Basis der von mir generierten Muster und der ausgewählten Distraktoren diagnostische Aussagen getätigt werden können.

Unter dem Aspekt der Nachvollziehbarkeit und der Überprüfbarkeit der Daten und Entwicklungen werden im Rahmen dieser Arbeit besonders komplexe oder diskussionswürdige Inhalte und Ergebnisse ausführlich erörtert. Im Anhang finden sich die dazugehörigen Rohdatensätze oder Abbildungen ausgewählter Inhalte. Eine Reduktion auf eine exemplarische Auswahl auch innerhalb der Evaluationen soll den Umfang dieser Arbeit in einem adäquaten Rahmen halten. Zudem sind einige Rohdatensätze – bspw. in Form von Excel- oder SPSS-Tabellen – so umfangreich, dass eine Abbildung in gedruckter Form nicht möglich ist. Des Weiteren dienen einige der Daten als Grundlage für andere noch nicht abgeschlossene Qualifikationsarbeiten. Eine vollständige Veröffentlichung wird daher erst nach Abschluss aller Qualifikationsarbeiten erfolgen. Auf Anfrage können alle Rohdaten wie Testbögen, Typenlisten oder Statistiken und auch alle Entwicklungsergebnisse eingesehen werden.

Damit die angesprochene Komplexität der Themenstellung nicht zum Orientierungsverlust des Lesers führt, werde ich nun vorab einen Überblick über die aus dem Gesamtziel der Arbeit resultierenden Teilziele, Inhalte, Methoden, Verknüpfungen dieser untereinander sowie Zusammenhänge mit anderen Aspekten des Projektes Mathe-Meister geben. Dazu wird der Forschungs- und Entwicklungsprozess meiner Dissertation nachfolgend an konkreten Beispielen erörtert.

2 Problemstellung – Forschungsfragen – Idee

Das vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderte Projekt Mathe-Meister verfolgt das Ziel, „den zukünftigen Teilnehmern/innen von Meisterlehrgängen [zu] helfen,

- die eigenen mathematischen Fähigkeiten mit Bezug auf das eigene Berufsprofil abschätzen zu können.

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- Defizite im Bereich der Mathematik mittels geeigneter Tests erkennen und

- den negativen Einfluss dieser Defizite auf den Erfolg während der Meisterqualifizierung und im späteren Berufsleben klar vor Augen geführt bekommen.

Falls Defizite bestehen, sollen die Teilnehmer/innen

- erste Informationen und Hilfestellungen zur richtigen Lösung der gestellten Aufgaben erhalten und
- Hinweise auf für sie jeweils relevante Fortbildungsmaterialien (z. B. Kurse auf CD-ROM) und Bildungsangebote (z. B. Kurse in den Zentren der Kammern) erhalten.“ [Auszug aus dem Projektantrag, S. 3]

Dieses Selbsttestportal – zu englisch „self assessment center“ – soll künftig im Internet zur Verfügung gestellt werden und interessierten Personen, die ihre eigenen mathematischen Kompetenzen im Hinblick auf die notwendigen Grundlagen für einen erfolgreichen Einstieg in einen Meisterlehrgang testen wollen, eine fundierte und individuelle Aussage über ebendiese geben. Das bedeutet, dass die Kandidaten nicht nur eine Rückmeldung darüber erhalten, *dass* sie Defizite im Bereich der vorausgesetzten mathematischen Grundlagen haben, sondern um *welche* Defizite es sich konkret handelt. D. h., es erfolgt ein (soweit möglich) individuelles Feedback mitsamt einer aussagekräftigen diagnostischen Beschreibung ihrer Fehler. Diese gibt ihnen Aufschluss darüber, in welchen mathematischen Themenbereichen ihre Defizite liegen. Zusätzlich werden Medien empfohlen, die den Probanden bei der Beseitigung dieser Defizite behilflich sein können und ihnen somit eine anwendungsorientierte Hilfestellung geben, wie sie sich die notwendigen Grundlagen für den entsprechenden Meisterlehrgang eigenständig aneignen können.

Die Beschreibung der Fehler soll über die dichotome Aussage von „richtig“ oder „falsch“ hinausgehen. So erfährt der Proband durch das System, dass er bspw. eine falsche Rechenregel wie „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ angewandt hat, ihm ein Rechenfehler im Einmaleins unterlaufen ist oder eine charakteristische Eigenschaft einer geometrischen Form nicht beachtet wurden. Insgesamt soll durch diese Hinweise die Basis für die angestrebte individuelle Förderung geschaffen werden.

Die Herausforderung bei der Konzeption und der Entwicklung dieser Auswertungsfunktionen besteht darin, die Fehler so zu typisieren und zu kategorisieren, dass daraus entsprechende Antwortvorgaben mit hohem diagnostischem Potential für die Items des Selbsttest-Portals zu generieren sind. Dazu müssen zum einen Erkenntnisse über typische Fehler erlangt und zum anderen muss ein Konzept entwickelt werden, mit dem eine Fehlerdiagnose und die dazugehörigen Rückmeldungen auch unter technischen Gesichtspunkten ermöglicht werden. Für die Entwicklungen im Projekt Mathe-Meister sind demnach wissenschaftsübergreifende Untersuchungen und Konzepte miteinander zu verknüpfen. So geht es bspw. inhaltlich um Mathematik, wobei die mathematikdidaktische Perspektive hier direkt mit eingebunden ist. Es werden diagnostische Aspekte sowohl aus mathematikdidaktischer als auch psychologischer Sicht betrachtet. Ferner muss die mediendidaktische Konzeption und Umsetzung mit den technischen Ansprüchen und Möglichkeiten abgestimmt werden.

Die Untersuchung und Entwicklung der notwendigen Grundlagen sowie die Generierung und Auswahl der dazu nötigen diagnostisch aussagekräftigen Item-Distraktoren bildet den Schwerpunkt dieser Arbeit. Die Erstellung der Texte für die Fehlerhinweise ist ein anschließendes Aufgabenpaket im Projekt Mathe-Meister, dies ist jedoch nicht Teil dieser Arbeit.

2.1 Einordnung in die Projektstruktur

Nachfolgend werden die einzelnen Stationen des Projektes Mathe-Meister im Rahmen einer Aufgabenübersicht skizziert. Außerdem werden die insbesondere für diese Arbeit relevanten Entscheidungsaspekte hervorgehoben. Dies dient der anschließenden detaillierten Einordnung der Aufgaben, Inhalte, Ziele, Methoden und Ergebnisse dieser Arbeit in die Zusammenhänge des Gesamtprojektes und fördert die Nachvollziehbarkeit.[3] Für das Gesamtprojekt wurden verschiedene Arbeitspakete festgelegt, deren Aufgaben und Ziele in unterschiedlichem Maße interdependieren. Abbildung 1 zeigt eine Übersicht hierzu.

---

[3] An dieser Stelle ist eine grobe Skizzierung für die Nachvollziehbarkeit und Einordnung dieser Arbeit relevant, um dem Leser einen Überblick über die Verknüpfung der Elemente dieser Arbeit mit denen des Projektes zu ermöglichen. Eine ausführliche Darstellung und Begründung der Methoden und Entscheidungen dieser Arbeit folgen an späterer Stelle [vgl. Kapitel 6].

Ziel des Projektes Mathe-Meister ist die Entwicklung eines internetbasierten Selbsttestportals für Interessierte an Meisterlehrgängen verschiedener Berufssparten in Industrie und Handwerk. So soll bspw. eine Person, die sich für die Weiterbildung zum Maurermeister interessiert, einen für sie berufsspezifischen Test auswählen können. Die Testaufgaben sollen sowohl fachlich an die für den Lehrgang benötigten Grundlagenkompetenzen, als auch thematisch, d.h. in der Wahl der Beispiele auf diese Berufssparte angepasst sein. Selbiges gilt für die Auswahl der abschließend empfohlenen Lernmedien und Fortbildungsmöglichkeiten, die nach Beendigung der Testdurchführung für jedes mathematische Themengebiet aufgezeigt werden.

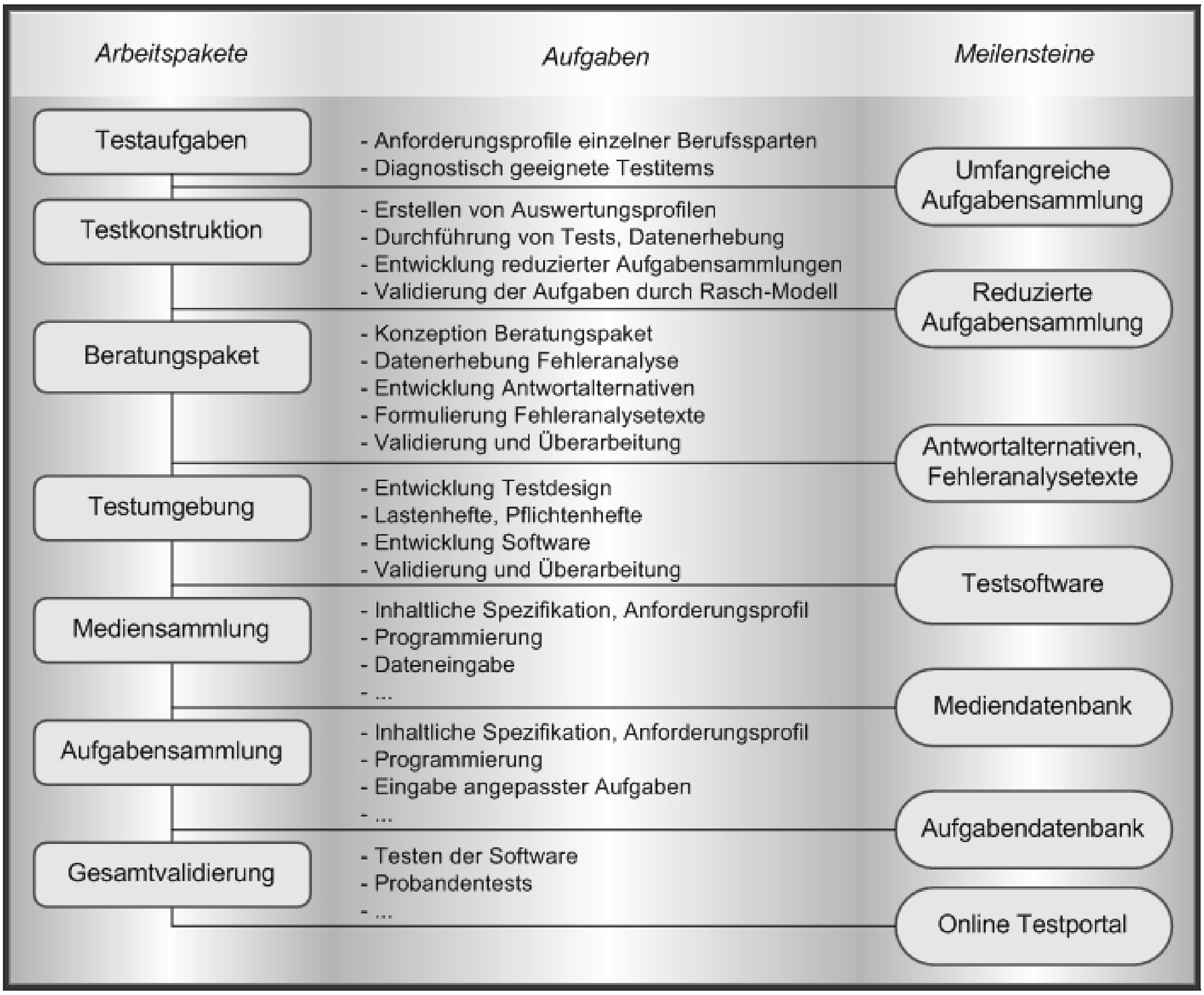


Abbildung 1: Arbeitspakete, Aufgaben und Teilziele (Meilensteine) im Gesamtprojekt Mathe-Meister [in Anlehnung an Stein et al. 2010].

Die in Abbildung 1 aufgeführten Arbeitspakete und Aufgaben laufen innerhalb des Projektes Mathe-Meister eng verzahnt und häufig parallel ab. Und auch die Zielsetzung dieser Arbeit führt zu einer Verknüpfung und Einbindung an unterschiedlichen Stellen des Gesamtprojektes. So werden auf Basis der erarbeiteten berufsspezifischen Anforderungsprofile von mir bspw. diagnostisch geeignete Testaufgaben entwickelt. Auf das Vorgehen und die Ergebnisse hierzu gehe ich im Rahmen dieser Arbeit in den Kapiteln 7.1 und 7.2 ein. In dem Arbeitspaket „Testkonstruktion“ wird aus diesen Aufgaben eine repräsentative, diagnostisch sinnvolle Auswahl getroffen und so in einem ersten Schritt die Gesamtheit der Aufgaben reduziert. Die auf Basis statistischer Analysen erfolgte Reduktion des Itempools ist bspw. einer der Aspekte, der als „Zufluss“ von außen für meine Arbeit vorgegeben wird. Im Rahmen des „Beratungspaketes“ habe ich diese reduzierte Aufgabensammlung noch einmal unter inhaltlichen Gesichtspunkten analysiert. Hier wurden bspw. diagnostische Aspekte berücksichtigt und die Ergebnisse wieder zurückgegeben an das Arbeitspaket „Testkonstruktion“, wo sie letztlich unter Berücksichtigung und in Kombination aller Gesichtspunkte (Statistik, Abdeckung aller mathematischen Themengebiete, Diagnostik) zur „reduzierten Aufgabensammlung“ führen.

Aufgrund der bereits angemerkten Verzahnung der Arbeitspakete untereinander lassen sich die Inhalte dieser Arbeit nicht nur einem Arbeitspaket zuordnen, sondern verteilen sich über das Projekt. Die Aspekte dieser Arbeit verteilen sich vorrangig auf die ersten vier Arbeitspakete des Gesamtprojekts – Testaufgaben, Testkonstruktion, Beratungspaket und Testumgebung. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt hierbei auf dem Beratungspaket. Die Konzeption des zu entwickelnden Beratungspaketes umfasst zum einen die Entwicklung eines Testdesigns für die digitale Testumgebung. Zum anderen beinhaltet diese Konzeption die Entwicklung diagnostisch aussagekräftiger Distraktoren – nachfolgend auch als Antwortalternativen bezeichnet. Hierauf liegt das Hauptaugenmerk dieser Arbeit.

Auch innerhalb dieser Arbeit sind verschiedene Aufgabenbereiche und Ziele eng miteinander verbunden und stehen in wechselseitiger Beziehung zueinander. So werden bspw. zu allen Teilaspekten der Arbeit stets Validierungen vorgenommen, deren Ergebnisse wiederum zu einer Überarbeitung des validierten

Bereichs führen. Validierungen und Evaluationen finden innerhalb dieser Arbeit prozessbegleitend statt und werden in unterschiedlichem Maße zudem am Ende jedes Teilziels durchgeführt. Aufgrund der engen Verzahnung vieler Aspekte dieser Arbeit laufen einige Schritte parallel ab. In Abbildung 2 werden die Arbeitspakete und Aufgaben des Gesamtprojektes nochmals aufgegriffen und dabei durch Umrahmungen die Inhalte und der Schwerpunkt dieser Arbeit hervorgehoben.

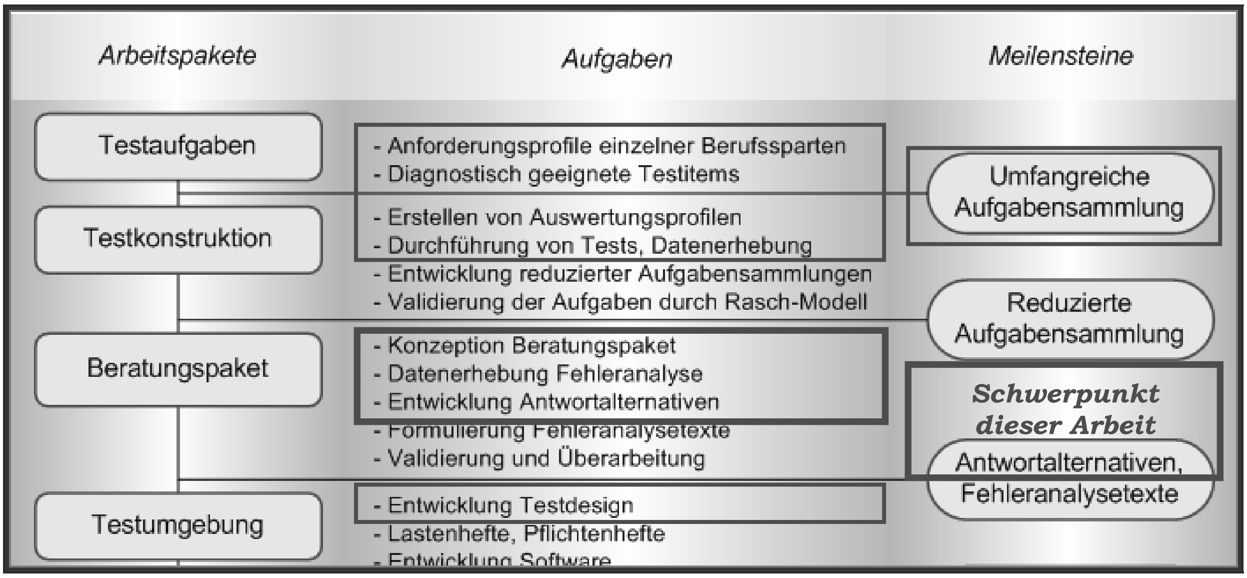


Abbildung 2: Arbeitspakete, Aufgaben und Teilziele (Meilensteine) im Gesamtprojekt Mathe-Meister, Kennzeichnung der im Rahmen dieser Arbeit eingebundenen Bereiche sowie des Schwerpunktes der Arbeit [in Anlehnung an Stein et al. 2010].

2.2 Zum Untersuchungs- und Entwicklungsprozess dieser Arbeit

Der Untersuchungs- und Entwicklungsprozess dieser Arbeit verläuft, wie bereits erwähnt, nicht linear ab, sondern ist eher als spiralförmig zu betrachten. So wird nach Erhalt von Zwischenergebnissen regelmäßig wieder auf vorhergehende Aufgabenbereiche zurückgegriffen und die neu erworbenen Ergebnisse in die bereits bearbeiteten Bereiche eingebunden. Diese werden folglich nochmals überarbeitet und die darauf aufbauenden Prozesse entsprechend neu bearbeitet, ggf. ergänzt und angepasst und bei Bedarf von Neuem gestartet. Die verschiedenen Bereiche, (Teil)Zielsetzungen und Vorgehen innerhalb dieser Arbeit werden hinsichtlich dieses spiralförmigen Prinzips nachfolgend an folgenden Fragestellungen exemplarisch skizziert:

- Ziel: Was ist die Fragestellung bzw. das (Zwischen)Ziel?
- Weg: Wie wird vorgegangen, um das Ziel zu erreichen?
- Zufluss: Welche bereits bestehenden Ergebnisse fließen mit ein oder sind Voraussetzung für diesen Weg?
- Ergebnisse: Wie sehen die Ergebnisse aus?
- Rückfluss: Wo fließen die erlangten Ergebnisse ein?

<u>Anforderungsprofile:</u>
Die Zielfrage, die sich als erstes stellt, ist die Frage nach den Basiskompetenzen, über die die Meisterschüler zu Beginn ihres Lehrgangs verfügen sollten. Für die Beantwortung dieser Frage werden Lehrwerke und Unterrichtsmaterialien analysiert und außerdem Lehrende aus den verschiedenen Berufssparten befragt. Das Ergebnis dieser Analysen und Befragungen sind so genannte mathematische Anforderungsprofile. Ein mathematisches Anforderungsprofil kann bspw. lauten:

> *<u>Anforderungsprofil Bruchrechnung:</u>*
> *Die Meisterschüler sollen zu Beginn ihres Meisterlehrgangs …*
> - *die verschiedenen Bruchrechenregeln kennen*
> - *und diese auf Aufgaben mit Brüchen anwenden können.*
>
> *Dabei beschränken sich die Anforderungen dieses Profils auf das Rechnen mit Brüchen in verschiedenen Schreibweisen, aber ohne die Verknüpfung mit Variablen.*

Die verschiedenen mathematischen Anforderungsprofile werden zum einen anschließend nach Berufssparten differenziert evaluiert und zum anderen dienen sie als Grundlage für die nächste Zielsetzung dieser Arbeit nach geeigneten Testitems[4] für jedes Anforderungsprofil.

---

[4] Die Begriffe Testitem und Testaufgabe bzw. Item und Aufgabe werden in dieser Arbeit synonym verwendet.

Testitems

Die Entwicklung geeigneter Testitems kann nicht direkt und ausschließlich aus den Anforderungsprofilen erfolgen. Vorab müssen auch bereits bestehende Veröffentlichungen zur Entwicklung geeigneter Testaufgaben ausgewertet werden. D. h., hier ergeben sich bereits mehrere Zielsetzungen parallel, die in den Prozess der Itementwicklung bereits an dieser Stelle mit einbezogen werden:

- Die Anforderungsprofile legen die mathematischen Inhalte und Kompetenzen fest,
- die Analyse von Lehrwerken und Unterrichtsmaterialien liefert Hinweise zu klassischen Aufgabenstellungen für die Zielgruppe,
- Fachliteratur aus verschiedenen Fachrichtungen (Testtheorie, Psychologie, Mathematikdidaktik etc.) gibt Auskunft über theoretische Hintergründe im Allgemeinen und konkrete Testitems für Mathematik.

Das Ergebnis dieser Recherchen ist eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben zu jedem Anforderungsprofil, die so genannte Startaufgabensammlung.

Diagnostische Eignung der Testitems

Da die für den Online-Test zu entwickelnden Items über ein diagnostisches Potential verfügen sollen, muss zudem fehleranalytische und diagnostische Literatur hinzugezogen werden. Außerdem analysiere ich im Anschluss an die erste Auswahl der Testitems jedes Item hinsichtlich seiner diagnostischen Eignung in Bezug auf das jeweilige Anforderungsprofil. Dazu wird für jede Aufgabe analysiert, über welche Lösungsverfahren diese Aufgabe zu lösen ist und welche Fehler dabei auftreten könnten. Bei der Analyse der Fehler liegt ein besonderes Augenmerk darauf, ob das Item eine möglichst eindeutige Auswertung des Fehlers ermöglicht, ob durch die Aufgabenstellung zu viele verschiedene Fehler hervorgerufen werden könnten und ob die antizipierten Fehler auch Fehler zum Bereich des Anforderungsprofils darstellen. So könnten bei einer Bruchrechenaufgabe bspw. durch viele gleiche Ziffern Perseverationsfehler hervorgerufen werden, die mit den Kompetenzanforderungen des Profils „Bruchrechnung“ nicht in unmittelbarem Zusammenhang stehen. Bei einer Aufgabenstellung wie (siehe Folgeseite):

„Berechnen Sie folgende Aufgabe: $\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=$“

wäre z. B. die fehlerhafte Lösung „6“ über zwei Fehler erklärbar:

Antizipierte Rechnung: $\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\rightarrow\frac{6}{6}\rightarrow 6$

Dabei könnte das falsch umgewandelte Ergebnis „6“ zum einen durch einen Fehler beim Umwandeln von Brüchen zustande gekommen sein, der sich durch ein falsches Verständnis oder eine fehlerhafte Kenntnis der Umwandlungsvorschriften erklären ließe. Ebenso ist es aber auch durchaus genauso denkbar, dass das häufige Auftreten der Ziffer sechs zu einem Perseverationseffekt führt. Das diagnostische Potential dieser Aufgabe bzw. dieser Lösung würde daher hinsichtlich des Anforderungsprofils *Bruchrechnung* als nicht ausreichend bewertet.

Die diagnostische Eignung der Testitems wird zusätzlich zu der theoretischen Analyse auch empirisch untersucht. Alle Items werden Probanden der Zielgruppe vorgelegt, wobei diese aufgefordert sind, ihre Lösungswege zu notieren. Diese Probandennotationen analysiere ich anschließend und kategorisiere sie.

Das Ergebnis dieser Analysen ist ein Aufgabensatz mit diagnostischen gut geeigneten Items für jedes Anforderungsprofil. Zum Anforderungsprofil Bruchrechnung könnten dies z. B. jeweils zehn bis fünfzehn Aufgaben zur Addition, zur Subtraktion, Multiplikation und Division sein. Dieser umfangreiche Itempool wird als Startaufgabensammlung bezeichnet.

<u>Auswahl eines reduzierten Itempools für den Online-Test</u>

In einem Test und erst recht in einem Online-Test können nicht hunderte von Items untergebracht werden. Dementsprechend muss die Startaufgabensammlung auf eine repräsentative Auswahl von Items zu jedem Anforderungsprofil reduziert werden. Diese Reduktion findet in erster Linie auf Basis statistischer Analysen statt und wird anschließend nochmals unter diagnostischen Gesichtspunkten überarbeitet. Die statistisch begründete Reduktion der Startaufgabensammlung ist nicht Teil dieser Arbeit. Der reduzierte Aufgabenpool, der nachfolgend als Indikatoraufgabensammlung bezeichnet wird, fließt dementsprechend von außen als „Zufluss“ in diese Arbeit ein.

Auswahl diagnostisch aussagekräftiger Distraktoren

Die Testitems im Online-Test werden in einem Multiple-Choice-Format angeboten. Das bedeutet, dass für jede Indikatoraufgabe eine Auswahl von Distraktoren (Antwortalternativen) erzeugt werden muss. Diese sollen nicht zufällig zusammengestellt werden, sondern für die Zielgruppe typische Lösungen abbilden. Um diese Zielsetzung zu erfüllen werden die durch die empirischen Erhebungen gewonnen Kategorien von Lösungswegen u. a. in algebraischen Ausdrücken in so genannten Mustern[5] verallgemeinert. Auf Basis der quantitativen Häufigkeiten des Auftretens dieser Muster wird dann die Auswahl der Distraktoren für den Online-Test getroffen.

Die Antwortalternativen bilden außerdem die Grundlage für die Fehleranalysehinweise des Feedbacks. Zur Formulierung der Hinweistexte werden zudem die Analysen der von den Probanden notierten Lösungswege wieder hinzugezogen und bilden damit wiederum einen „Zufluss“ für die Erreichung dieser Zielsetzung. Da dieses aber nicht mehr zum Inhalt dieser Dissertation zählt, wird darauf an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

Das Hauptziel der Dissertation, die Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential für den Online-Test Mathe-Meister wäre hiermit erreicht. Um aber zu überprüfen, ob die Entwicklungen auch korrekt und geeignet sind, erfolgen im Rahmen dieser Arbeit Evaluationen bzgl. verschiedener Fragestellungen, auf die in Kapitel 8.5 im Detail eingegangen wird.

In der Abbildung 3 (siehe Folgeseite) wird das vorab beschriebene Vorgehen nochmals schematisch zusammengefasst und aufgezeigt, welche Aspekte diese Arbeit ausmachen und in wie weit diese regelrecht spiralförmig[6] im Sinne einer „Basisspirale“ ablaufen. Doch laufen die Prozesse dieser Arbeit nicht strikt

---

5 Ein Muster stellt eine allgemeine Beschreibung von Lösungswegen zu einer Aufgabe dar. Muster werden z. B. verbal in der Form „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ dekliniert, können vielfach aber auch in algebraischen Ausdrücken zusammengefasst werden. Für detaillierte Ausführungen hierzu sei verwiesen auf Kapitel 5.2.

6 Die Begriffswahl „spiralförmig“ erfolgt in Anlehnung an den aus den Didaktiken bekannten Terminus des Spiralcurriculums, wobei durch die Erweiterung zu einem größeren Netz die dieser Arbeit zugrundeliegende in verschiedene Richtungen wirkende Vernetzung unterschiedlicher Aspekte mit- und aufeinander demonstriert wird.

spiralförmig ab. Dem Entwicklungsprozess dieser Arbeit gleicht meines Erachtens noch mehr die Konstruktion eines Spinnennetzes, bei der von der Mitte her zuerst eine Grundkonstruktion aus wenigen Fäden erzeugt wird, die im nächsten Schritt durch ein spiralförmiges Ablaufen miteinander verbunden werden. Zur Stabilisierung des Netzes werden anschließend je nach Bedarf weitere Verbindungen an verschiedenen Stellen und in unterschiedlicher Richtung eingefügt. Diese Verbindungen entsprechen im Rahmen dieser Arbeit sowohl Methoden, Inhalten also auch Personen. In Abbildung 3 werden die Hauptaspekte meiner Arbeit aufgezeigt und deren Vernetzung stark stilisiert und reduziert aufgezeigt. So wirken die verschiedenen Zielsetzungen und Fragestellungen (*Ziele*), Methoden (*Wege*), Daten (*Ergebnisse*) etc. in unterschiedlicher Richtung und Form aufeinander ein.

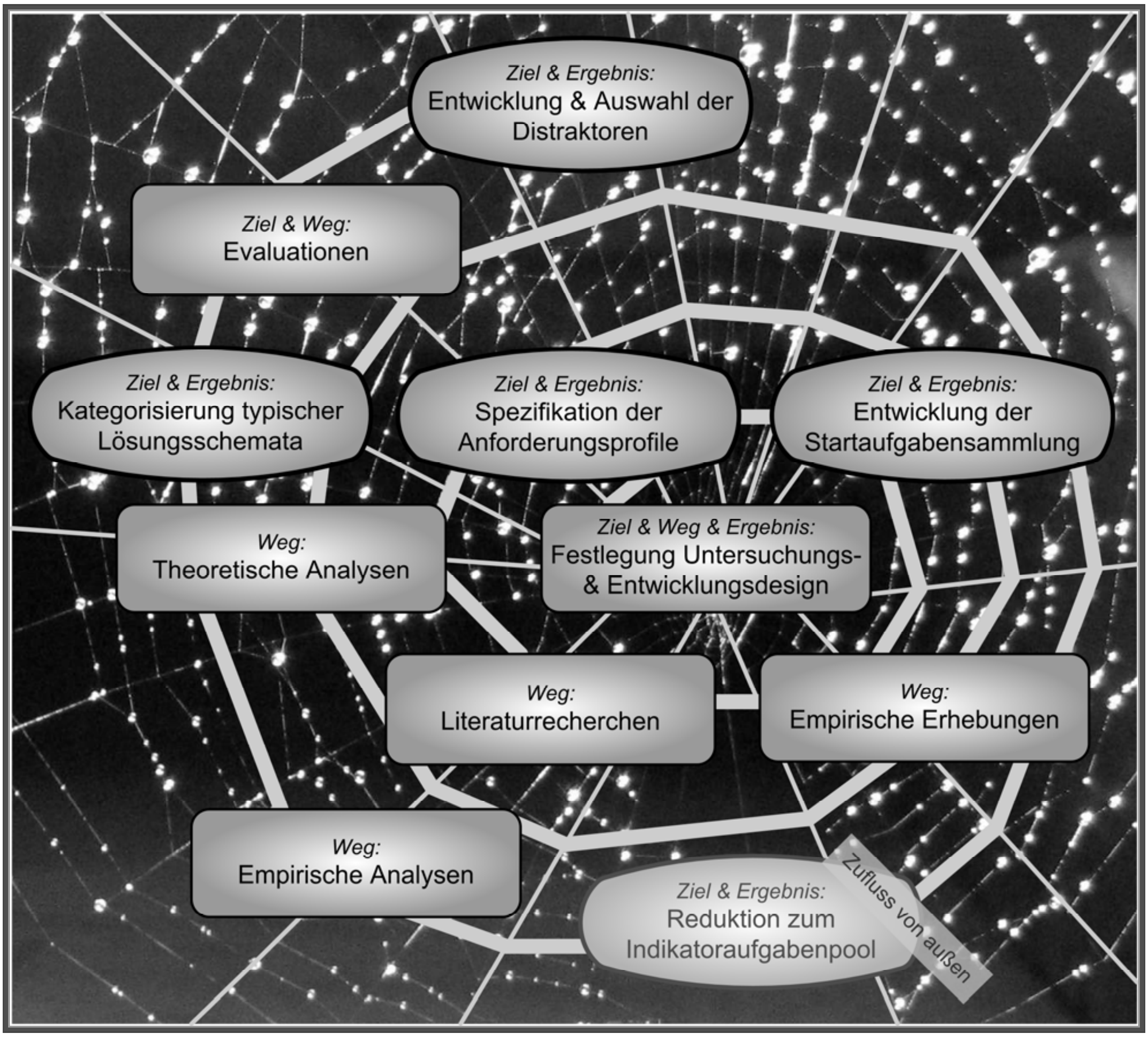


Abbildung 3: Reduzierte schematische Darstellung des spiralförmig vernetzten Aufbaus und Ablaufes dieser Arbeit.

TEIL II THEORETISCHE GRUNDLAGEN UND EMPIRISCHE ERKENNTNISSE

3 Begriffsklärungen und -festlegungen

3.1 Programmspezifische Begriffe des Mathe-Meister-Projektes

Bereits im Rahmen der Darstellung der Aufgabenbereiche und Ziele des Projektes Mathe-Meister wird von „Fehleranalysehinweisen“ oder „Defiziten“ gesprochen. Diese Begriffe lassen sich ohne umfangreiche Definition aufgrund der Beschreibung bereits gut nachvollziehen. Die für die Verständlichkeit der nachfolgenden Kapitel relevanten Termini und Zusammenhänge seien dementsprechend wie folgt definiert:

- *Defizitanalyse*: In diesem Programmteil des Online-Portals wird angegeben, in welchen mathematischen Bereichen die Kandidaten Defizite haben, wie zum Beispiel der Prozentrechnung oder der Bruchrechnung.
- *Musterlösungen*: Musterlösungen zu jeder Aufgabe zeigen detailliert auf, wie diese Aufgabe korrekt gelöst werden kann.
- *Förderhinweise*: Auf Basis der Defizitanalyse wird für jeden defizitären Bereich in diesem Programmteil zurückgemeldet, welche dazu konkret passenden Lernmedien und Fortbildungen (der jeweiligen Kammer) es gibt.
- *Fehleranalyse*: Zu den einzelnen bearbeiteten Aufgaben erfolgen an dieser Stelle des Programms Mathe-Meister Hinweise zu individuellen Fehlern, die sich hinter den ausgewählten Antwortalternativen verbergen. Diese Hinweistexte werden als *Fehleranalysehinweise* bezeichnet.

3.2 Termini zur Beschreibung von Items und Testformen

In den verschiedenen Forschungsbereichen bzw. in unterschiedlichen Untersuchungen und Methoden, die in dieser Arbeit miteinander verknüpft werden, werden teilweise ähnliche, aber inhaltlich nicht immer identisch definierte Termini verwendet. Für diese Arbeit relevante Begrifflichkeiten und deren Zusammenhänge werden daher an dieser Stelle kurz hergeleitet und soweit möglich voneinander abgegrenzt.

Zur Beschreibung des Aufbaus einer Testaufgabe und der Charakterisierung der dazugehörigen Antwortoptionen (z. B. Multiple-Choice-Auswahlen, freie Eingabe einer Rechnung etc.) werden unterschiedliche Termini verwendet. In verschiedenen Untersuchungen aus unterschiedlichen Wissenschaften findet man sowohl den Begriff des *Aufgabenformats* als auch des *Antwortformats*. Die Begriffe werden teilweise unterschiedlich definiert, aber auch analog verwendet. Ebenso existieren in diesem Zusammenhang die Begriffe des *Aufgabentypus* und der *Aufgabenbeantwortung*.[7]

Lienert und Raatz [1998, S. 18] sprechen in ihren fachübergreifend verbreiteten Werken zu Testaufbau und Testanalyse von einem *Aufgabentypus*, worunter sie „[…] die Art und Weise, in der die Beantwortung einer Testaufgabe erfolgt, […]“ verstehen. Zu den unterschiedlichen Aufgabentypen differenzieren sie bezüglich der Aufgabenbeantwortung zwei Untertypen:

- *Gebundene Aufgabenbeantwortung*, wobei den Probanden mehrere Antwortmöglichkeiten zur Auswahl vorgeschlagen werden.
- *Freie Aufgabenbeantwortung*, bei der den Probanden sowohl Form als auch Inhalt der Antwort auf die Aufgabe freigestellt sind. [vgl. ebd., S. 17]

Vom deutschen PISA-Konsortium wird im Rahmen der PISA-Untersuchungen inhaltlich analog zum Begriff der Aufgabenbeantwortung von Lienert und Raatz die Bezeichnung *Antwortformat* verwendet, welches ebenfalls in *gebundene* und *freie* Antwortformate unterteilt wird [vgl. u. a. PISA-Konsortium 2007, S. 48ff]. In ihrem zusammenfassenden Überblick zu „Leistungserhebungen im Mathematikunterricht“ verwenden Sill und Sikora [2007] diesen Terminus des Antwortformates ebenfalls und mit gleicher Bedeutung.

Im Rahmen der Festlegungen zu den Diagnose- und Vergleichsarbeiten (DVA) in Baden-Württemberg wird seitens des Landesinstituts für Schulentwicklung Baden-Württemberg (LIS BW) einheitlich der Begriff der *Aufgabenformate* genutzt und definiert: „Unter ’Aufgabenformaten von Testaufgaben’ versteht man die Art und Weise der Aufgabenstellung und der daraus folgenden

[7] Konkrete Literaturverweise werden nachfolgend detailliert angeführt.

Aufgabenbeantwortung.“ [LIS BW 2009, S. 1, Hervorhebung dort] Das Aufgabenformat impliziert hier dementsprechend das Antwortformat [vgl. PISA-Konsortium 2007; Sill, Sikora 2007] bzw. die Aufgabenbeantwortung [vgl. Lienert, Raatz 1998]. Das LIS BW differenziert – erweiternd zu den bisherigen Trennungen in offene und gebundene Formate oder Formen – zusätzlich *halboffene Aufgabenformate*, die eine Mischform aus offenen (dort auch „*freie*“) und gebundenen (dort auch „*geschlossene*“) darstellen.

Nachfolgend werden bezüglich der Formen und Art und Weise von Aufgaben und deren Beantwortungsmöglichkeiten die Termini für diese Arbeit festgelegt:

- *Antwortformat*: Das Antwortformat einer Aufgabe beschreibt, in welcher Form auf die Aufgabenstellung durch die Probanden geantwortet werden kann. Dabei werden drei Formen von Antwortformaten unterschieden:
    - *Gebundene (geschlossene) Antwortformate*: Bei gebundenen Antwortformaten werden den Probanden die Antwortmöglichkeiten zur Auswahl einer oder mehrerer Antworten vorgegeben. Hierzu zählen z. B. Multiple-Choice (oder auch Mehrfachwahlaufgaben) und „Wahr – Falsch – Aufgaben“ [vgl. LIS BW 2009].
    - *Halboffene Antwortformate*: Bei halboffenen Aufgaben werden den Probanden Teile einer oder mehrerer möglicher Antworten vorgegeben, die ergänzt, erweitert oder korrigiert werden müssen, wie z. B. Ansätze einer Zeichnung, die vervollständigt werden muss.
    - *Offene (freie) Antwortformate*: Bei offenen Antwortformaten werden den Probanden keine Antworten zur Auswahl oder zur Ergänzung vorgegeben. Die Probanden müssen Form und Inhalt der Aufgabenbeantwortung selbst entwickeln, wie z. B. durch mathematische Beweise, ausführliche textuelle Begründungen oder (vollständig) selbst erstellte Zeichnungen.

Das Antwortformat bei Sill und Sikora [2007], das Aufgabenformat, wie es vom LIS BW [2009] benannt wird, als auch die Begriffe des Aufgabentypus und der Aufgabenbeantwortung, wie sie bei Lienert und Raatz [1998] verwendet werden, umfassen ausschließlich die Formvorgabe für die Antworten zu einer Aufgabe und sagen somit nichts darüber aus, wie die Form der Aufgabenstellung an sich aussieht – d. h., ob es sich bspw. um eine Textaufgabe oder eine Kalkülaufgabe[8] ohne umfangreiche textuelle Umschreibung handelt. Daher werden für diese Arbeit des Weiteren folgende Termini festgelegt:

- *Aufgabenstellung*: Unter Aufgabenstellung wird die Art und Weise der Aufgabenformulierung gefasst. Hierunter fallen bspw. die Unterscheidungen in Textaufgaben im Sinne eingekleideter Aufgaben oder auch als Modellierungsaufgaben. Ebenso werden Aufgabenstellungen unterschieden, welche nur aus einem Term, einer Gleichung etc. und einer kurzen Aufforderung wie „Berechne" bestehen.
- *Aufgabenformat*: Unter Aufgabenformat wird hier die Verknüpfung aus der Aufgabenstellung zu einer Aufgabe mit der ausgewählten Form des Antwortformates verstanden [in Anlehnung an LIS BW 2009]. So gibt es bspw. Textaufgaben mit offenem, halboffenem und gebundenem Antwortformat.
- *Aufgabentypus/Aufgabentyp*: Jede Aufgabe gehört einem Aufgabentypus an. Dieser beschreibt nicht das Aufgabenformat, sondern die aus mathematischer Perspektive inhaltlichen Anforderungen oder Kompetenzen. So können bspw. die Aufgabentypen „Addition gleichnamiger Brüche" und „Subtraktion gleichnamiger Brüche" differenziert werden. Je nach Zielsetzung und Konzeption lassen sich diese aber auch zu einem Aufgabentyp zusammenfassen.

[8] Im Rahmen dieser Arbeit wird diesbezüglich auf die Termini nach PISA [vgl. u. a. PISA 2004, S. 57ff] zurückgegriffen, wonach grundlegend in einer ersten Instanz die Kompetenzen in Kalkül- und Modellierungskompetenzen differenziert werden. In Anlehnung an diese Begrifflichkeiten wird nachfolgend bei der Beschreibung von Aufgabentypen in einer ersten Stufe nach Kalkül- und Modellierungsaufgaben differenziert. Kalkülaufgaben, bei deren Bearbeitung durch die Probanden bekannte mathematische Prozeduren kalkülhaft angewendet werden und Modellierungsaufgaben, die mentale Modellierungsprozesse erfordern.

4 Internetbasierte Mathematik-Selbsttests

Der Stellenwert des Internets steigt auch im Bereich der schulischen und der beruflichen Ausbildung. Auf immer mehr Internetplattformen werden insbesondere Schülern allgemeinbildender Schulen sowie deren Lehrern und Eltern Möglichkeiten zur mathematischen Förderung angeboten. Diese so genannten Lernserver werden u. a. angeboten unter www.legakids.de, www.schroedel.de, www.lernserver.de oder www.bettermarks.de[9].

Analog zu dieser Entwicklung implementieren Lernsoftwareanbieter wie der Schroedel-Schulbuchverlag, Cornelsen Verlag und weitere neben ihren Angeboten auf Datenträgern eigene Websites, von denen zusätzliche Materialien heruntergeladen werden können. Diese sind meistens kostenpflichtig und stellen häufig Ergänzungen zu Printmedien dar. Darüber hinaus bilden diese Webportale eine Kommunikationsplattform für ihre Nutzer, über die u. a. auch Lehrern die Möglichkeit geboten wird, in unterschiedlicher Form Daten ihrer Schulklasse zu erheben, zu bearbeiten oder zu verwalten. Der Markt der internetbasierten (Selbst-)Testumgebungen für Mathematik hingegen befindet sich noch in der Anfangsphase der Entwicklung. Zu finden sind hier sowohl kommerzielle als auch nicht kommerzielle Angebote, d. h. für den Endnutzer kostenpflichtige und kostenfreie. Bspw. seien hier die Seiten der Verlage Westermann, Schroedel und Diesterweg zur (kostenpflichtigen) Online-Diagnose aufgeführt, die sich zu Beginn dieser Ist-Stand-Analyse noch in der Test- und Entwicklungsphase befinden [vgl. u. a. Schroedel et al., 2010, Stand: 24.10.2009].

Tests, die im Internet durchgeführt und direkt online ausgewertet werden können, werden auch als „Online-Tests“, „Online-Assessments“ oder „e-Assessments“ bezeichnet. Online- oder e-Assessments werden häufig verwendet, um Probanden zu testen, ob bzw. inwieweit sie über die für bestimmte Zielsetzungen (wie z. B. Berufe oder Studiengänge) vorausgesetzten Kompetenzen verfügen. Diese Verfahren müssen allerdings gegen solche Testverfahren abgegrenzt werden, die der Verifizierung des Lernerfolgs dienen, d. h. solche,

---

9 Letzte Berücksichtigung des Standes der Seiten und Angebote September/Oktober 2009.

die den Erfolg nach Abschluss bspw. von Lerneinheiten feststellen. Diese Testverfahren werden nachfolgend in Anlehnung an Schaffert unter dem Begriff „computergestützte Prüfungen“ gefasst. Als Beispiele für erste computergestützte Prüfungen und Institutionen, die diese schon seit vielen Jahren und in größerem Umfang einsetzen, seien die folgenden genannt (vgl. Schaffert 2004, S. 4ff):

- Die theoretische Führerscheinprüfung in Österreich, die bereits seit 1998 am Computer abgelegt wird.
- Die Lehrabschlussprüfung bei den Schweizer Bundesbahnen wird seit 1972 computerbasiert ausgewertet und mittlerweile auch am Computer direkt von den Lehrlingen bearbeitet.
- Unter der Leitung des US-amerikanischen Educational Testing Service (ETS) werden bereits seit vielen Jahren computergestützte Prüfungen u. a. als Aufnahmetests von Universitäten durchgeführt.

Außerdem sei der Europäische Computerführerschein (ECDL) erwähnt, bei dem bspw. ein Tabellenkalkulationstestmodul zur Verfügung gestellt wird (vgl. www.ecdl.de).

Internetbasierte Selbsttests, die vorrangig der Überprüfung der eigenen Kompetenzen als Zugangsvoraussetzung für bspw. bestimmte Berufsfelder oder Studiengänge dienen und die online bearbeitet und ausgewertet werden, werden nachfolgend unter den Termini „Selbsttests“ bzw. „Self-Assessments“ gefasst. Diese Tests sind es, die im Rahmen dieser Arbeit von Interesse sind.[10]

Für diese Arbeit stellt sich daher die Frage, welche internetbasierten Selbsttestumgebungen für Mathematik derzeit existieren,

- wie diese Systeme aufgebaut sind,
- welche Intentionen sie verfolgen,

---

[10] Bei der inhaltlichen Analyse von mathematischen Selbsttests wurden im Rahmen dieser Arbeit hinsichtlich fehleranalytischer Rückmeldungen auch Papiertests berücksichtigt. Aufgrund der stark abweichenden Voraussetzungen für die Realisierung und den Einsatz von Papiertests im Vergleich zu dem hier geplanten internetbasierten Selbsttest wird auf Papiertests oder auch Online-Tests, die erst nach Einschicken der Antworten manuell ausgewertet werden, nicht weiter eingegangen.

- für welche Zielgruppe sie konzipiert sind und
- in welcher Form fehleranalytische Erkenntnisse eingebunden sind.

Vorrangig werden daher bei der nachfolgenden Analyse verschiedener internetbasierter Selbsttestangebote die Intentionen und Zielgruppe der Anbieter betrachtet. Hinsichtlich des Aspektes der Fehleranalyse werden bei allen Programmen insbesondere die Rückmeldungen analysiert und die Antwortvorgaben bezüglich ihres diagnostischen Potentials begutachtet.

4.1 Merkmale internetbasierter Selbsttestumgebungen

Bei der Recherche nach internetbasierten Selbsttests zur Mathematik finden sich sehr unterschiedliche Formen. In der nachfolgenden Darstellung werden verschiedene Merkmale betrachtet, um bei der Analyse eine Vergleichsbasis zu schaffen:

- Zielgruppe
- Umfang bzgl. Anzahl der Testaufgaben, Zeitaufwand
- Aufgabenformate, -inhalte, Aufgabenstellungen
- Antwortformate, diagnostisches Potential
- Ergebnisrückmeldung hinsichtlich Form, Inhalt, diagnostischem Aussagepotential
- Sonstiges: Kosten für den Endnutzer, Zugangsmöglichkeiten, Testentwickler, Herausgeber

Alle analysierten Portale haben entsprechend ihrer Bezeichnung als „Selbsttests“ oder „Self-Assessments“ die gleiche Zielsetzung: Dem Probanden soll die Möglichkeit geboten werden, seine eigenen Kenntnisse und Fähigkeiten in bestimmten Bereichen der Mathematik zu testen. Prinzipiell zielen alle Portale darauf ab, dem Probanden mit der Rückmeldung seiner erzielten Ergebnisse eine Basis für die Analyse der eigenen Defizite in den bearbeiteten Themenbereichen zu liefern. Welche Relevanz letzteres Ziel für die einzelnen Anbieter hat bzw. in wie weit es wirklich erreicht wird und ein dementsprechendes diagnostisches Potential bietet, wird nachfolgend umfassend an einigen Testportalen exemplarisch erörtert.

Die drei Testportale „tagesschau.de“, „karriere.de“ und „scitec.fh-jena.de“[11] eignen sich sehr gut als exemplarische Repräsentanten eines Querschnitts internetbasierter Selbsttestportale. So bilden sie zum einen verschiedene Zielgruppenorientierungen ab und weisen zum anderen unterschiedliche Merkmalsausprägungen insbesondere hinsichtlich der Aufgaben, Antworten und Rückmeldungen auf.

4.2 Zielgruppen und Intentionen

Insgesamt lässt die Analyse verschiedener internetbasierter Selbsttestportale mit mathematischen Inhalten eine Klassifikation hinsichtlich der Zielgruppenorientierung in drei Kategorien zu:

- Die *Allgemeinheit* als Zielgruppe: Diese Portale werden häufig zeitlich befristet im Zusammenhang mit aktuellen Ereignissen des gesellschaftlichen Lebens zur Verfügung gestellt. So stehen die Testaufgaben und -inhalte hier in den meisten Fällen mit einem konkreten Sachzusammenhang bspw. einer Pressemeldung zur schlechten PISA-Leistung in Verbindung. Unter die Zielgruppe Allgemeinheit fallen in diesem Zusammenhang auch Schüler allgemeinbildender Schulen.
- *Ausbildungssuchende und Auszubildende*: Hinsichtlich dieser Zielgruppendifferenzierung stehen die Veröffentlichungen zum einen wie in der ersten Zielgruppe im Zusammenhang mit gesellschaftlichen Ereignissen, zum anderen – und das trifft auf die Mehrzahl der Angebote zu – werden die Portale von größeren Unternehmen oder Institutionen (wie Innungen, Banken etc.), aber auch von der Arbeitsagentur angeboten.
- *Studiensuchende und Studienanfänger*: Ähnlich wie bei Ausbildungssuchenden werden diese Self-Assessments von Institutionen, wie in diesem Falle von Hochschulen, zur Verfügung gestellt.

[11] Die Bezeichnungen „tagesschau.de“, „karriere.de“ und „scitec.fh-jena.de“ werden nachfolgend als Synonyme für die Angebote der entsprechenden Herausgeber bzw. Internetportale festgelegt.

Die Matheolympiade in Bremen als Anlass nehmend, wird auf der Homepage von tagesschau.de[12] ein Mathequiz für die Allgemeinheit angeboten: „In Bremen startet heute [21.02.2009] die Mathematik-Olympiade. Mit welchen Gefühlen denken Sie an ihre Mathe-Zeit in der Schule? Und: Woran können Sie sich noch aus ihrer Schulzeit erinnern? Finden Sie es mit unserem Quiz heraus! Jede Frage entspricht dem Leistungsniveau der entsprechenden Jahrgangsstufe. Alle Aufgaben lassen sich ohne Taschenrechner mit Stift und Papier lösen." [tagesschau.de 2009]

Unter der Rubrik „Fit im Ausbildungsmarathon" des Online-Portals karriere.de, das von einem Unternehmen der Verlagsgruppe Handelsblatt GmbH angeboten wird, befindet sich ein weiterer kostenloser Online-Selbsttest. Dieser soll Arbeits- bzw. Ausbildungssuchenden die Möglichkeit bieten, ihr „Mathematikkönnen" für eine kaufmännische Ausbildung zu testen: „Auf dem Weg zur kaufmännischen Ausbildung: Stellt für Sie knobeln ein Problem dar? Probieren Sie es aus!" [karriere.de 2009]. Mit dieser Aufforderung wird der (Selbst-)Test auf der Einstiegsseite von karriere.de beworben.

Nicht nur in Ausbildungsgängen sind mathematische Kompetenzen relevant. Mathematik ist in unterschiedlichem Umfang vor allem auch Bestandteil einer Vielzahl von Studiengängen. Insbesondere im Bereich der Ingenieurswissenschaften ist „die Mathematik […] ein essentielles Handwerkzeug […]. Mathematische Methoden spielen in allen Bereichen der Technik eine entscheidende Rolle. Ob es sich um Berechnungen in der Statik, die Entwicklung von Objektiven oder die Auswertung von Messergebnissen in der Umwelttechnik handelt, in allen Bereichen der Ingenieurswissenschaft werden solide mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten benötigt." [scitec.fh-jena.de 2009] Aus diesem Grund stellt der Fachbereich SciTec der FH Jena auf seiner Homepage einen Online-Selbsttest zur Verfügung, der Studieninteressierten und Studienanfängern helfen soll „ihre Fähigkeiten besser einzuschätzen, um zu erkennen, ob ihre Mathematikkenntnisse für einen erfolgreichen Start ins Studium ausreichen." [ebd., Groß- und Kleinschreibung angepasst]

---

12 Nachfolgend wird „tagesschau.de" als Synonym für die Herausgeber dieses Quizes bzw. der Homepage verwendet.

4.3 Inhalte, Aufgabentypen und Antwortformate

Die analysierten internetbasierten Selbsttests differieren neben den angesprochenen Zielgruppen vor allem hinsichtlich der abgefragten mathematischen Inhalte und dem Umfang. Das Mathequiz von tagesschau.de umfasst bspw. 13 Aufgaben zu verschiedenen Bereichen der Mathematik. Dabei wird jede Aufgabe einer Schuljahrgangsstufe zugeordnet. Das Quiz beginnt mit einer Aufgabe für das erste Schuljahr und schließt mit einer Aufgabe entsprechend des Anforderungsprofils des 13. Schuljahrs. Dabei werden sowohl reine Kalkülaufgaben wie auch kurze Textaufgaben jeweils mit einer Single-Choice-Auswahl von drei Antworten gestellt (vgl. Abbildung 4, Abbildung 5). D. h, stets ist nur eine Antwort korrekt und der Benutzer kann auch nur eine auswählen.

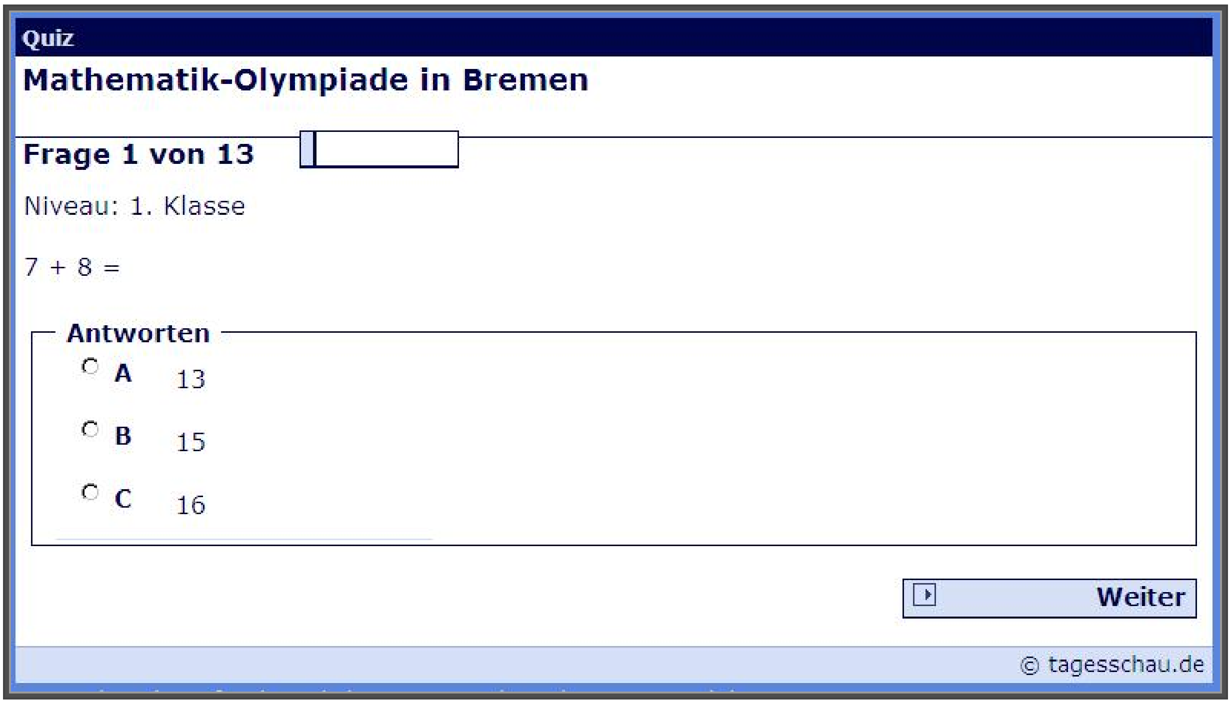


Abbildung 4[13]: Kalkülaufgabe Arithmetik im Mathequiz [Ausschnitt aus tagesschau.de 2009].

[13] Der Stand der Programme und Screenshots entspricht dem letzten Aktualisierungsdatum. Diese werden jeweils im Literaturverzeichnis konkret angegeben.

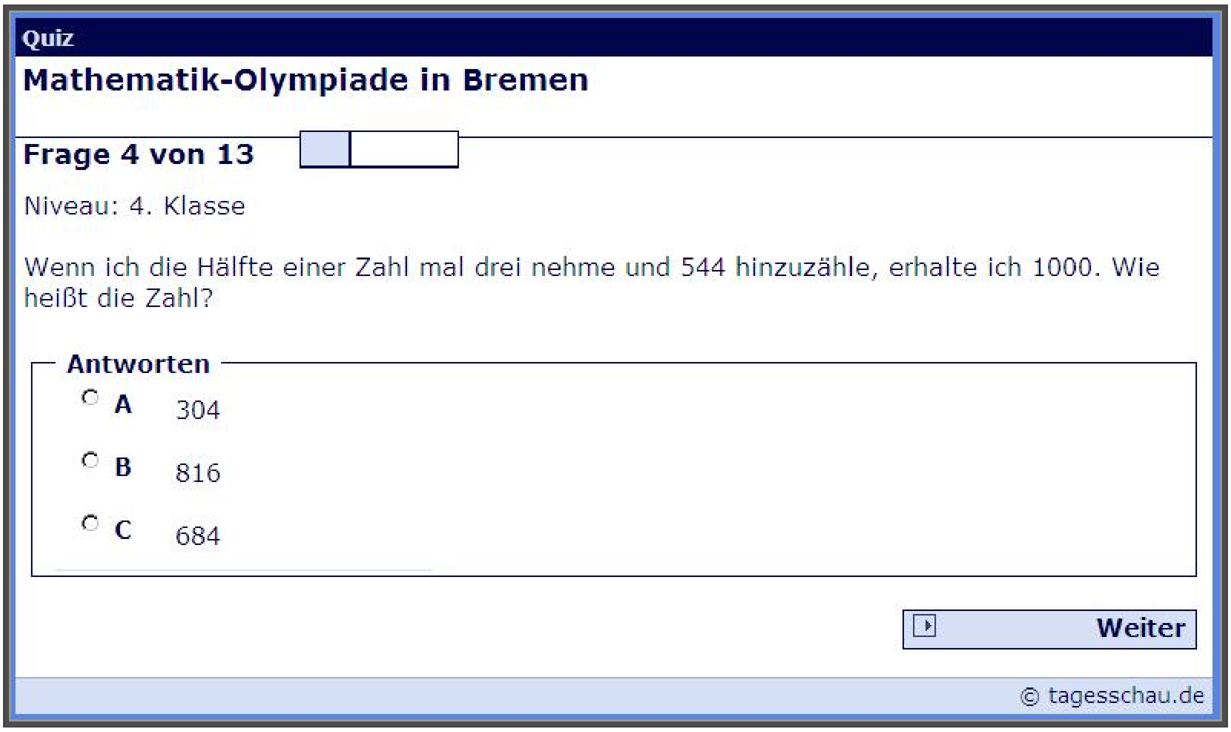


Abbildung 5: Einfache Textaufgabe mit Verknüpfung von Operationen der Arithmetik [Ausschnitt aus tagesschau.de 2009]

Inhaltlich werden die vier Grundrechenarten im Bereich der Arithmetik abgedeckt sowie grundlegende Rechenaufgaben und Wissensabfragen zur Bruchrechnung (ggT-Bestimmung), Geometrie (gleichseitiges Dreieck), Algebra (Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, Lösen einer quadratischen Gleichung oder eine Intervallbestimmung), eine einfache Aufgabe zur Kombinatorik sowie eine Aufgabe aus der Analysis zur Grenzwertbestimmung. Die Testaufgaben bilden jeweils eine Basisaufgabe aus jedem Bereich ab – so handelt es sich bspw. bei der gestellten quadratischen Gleichung aus Frage Neun ($x^2 + 4x - 5 = 0$) um eine Gleichung in Normalform, deren Lösung mittels des Standardweges über die direkte Anwendung der p-q-Formel erfolgen kann (vgl. Abbildung 6).

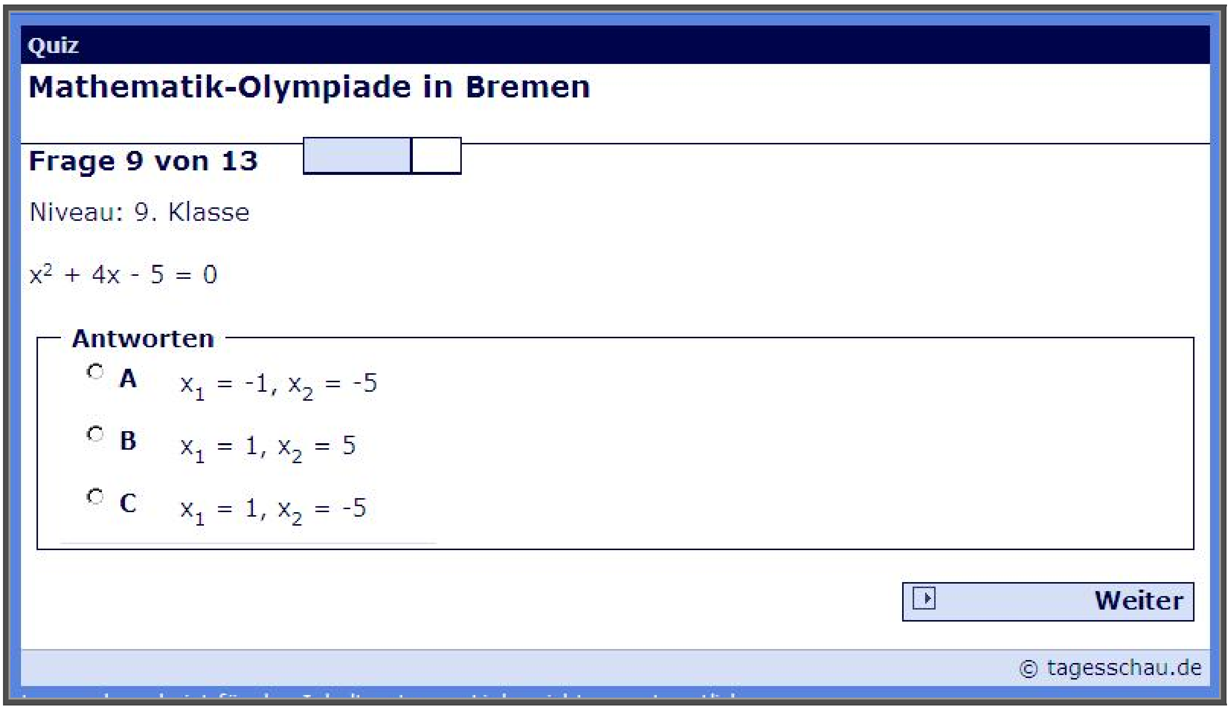


Abbildung 6: Aufgabe zum Lösen einer quadratischen Gleichung in Normalform [Ausschnitt aus tagesschau.de 2009]

Bei den fünf Testaufgaben auf karriere.de zum „mathematischen Knobeln" handelt es sich ausschließlich um so genannte eingekleidete Textaufgaben (vgl. u. a. Abbildung 7). Der mathematisch-inhaltlich betrachtete Aspekt umfasst einfache Dreisatzanwendungen sowie die Bruch- und Prozentrechnung. Die Antwortformate sind offen gestaltet, was in diesem Fall bedeutet, dass der Nutzer die Antwort in ein Freitextfeld eingibt. Nur bei einer Aufgabe gibt es ein geschlossenes/gebundenes Antwortformat (vgl. Abbildung 8).

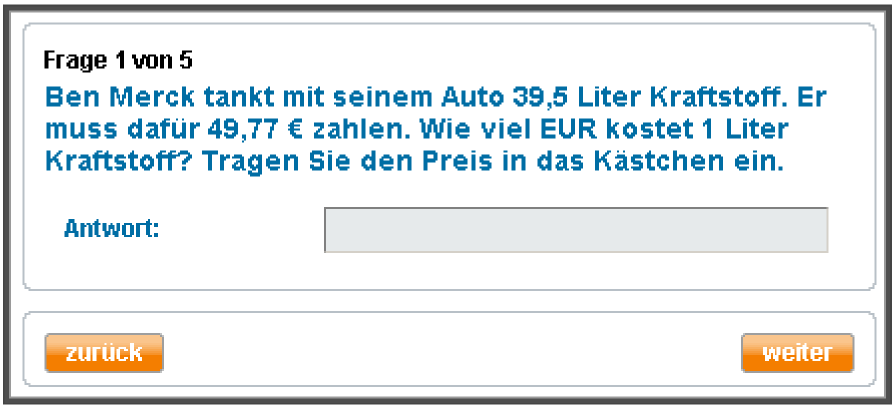


Abbildung 7: Offenes Antwortformat, Frage 1 [Ausschnitt aus karriere.de 2009]

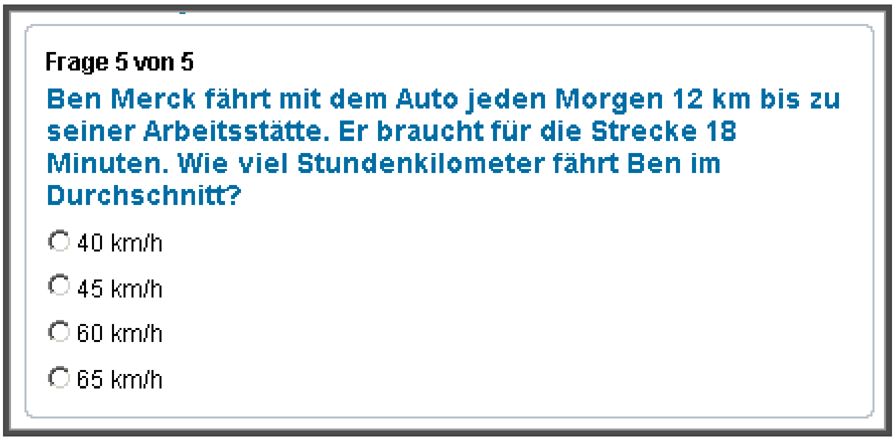


Abbildung 8: Multiple-Choice Antwortvorgaben, Frage 5 [Ausschnitt aus karriere.de 2009].

Der Test der FH Jena umfasst 15 Aufgaben, die repräsentativ für verschiedene benötigte Kompetenzen unterschiedlicher Themenbereiche der Mathematik stehen sollen. Dabei haben die Aufgaben sehr unterschiedliche Schwierigkeitsansprüche – vom Umwandeln eines gemeinen Bruches in eine Dezimalzahl über Funktionsableitungen bis hin zur Berechnung von Integralen (vgl. Abbildung 9, Abbildung 10).

Abbildung 9: Aufgabe 1, Brüche [Ausschnitt aus scitec.fh-jena.de].

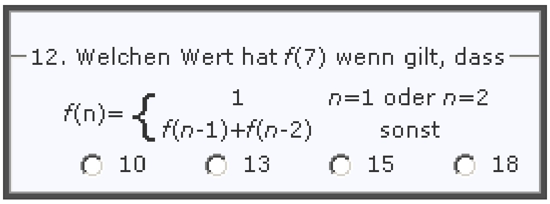


Abbildung 10: Aufgabe 12, Funktionenfolge, Fibonacci [Ausschnitt aus scitec.fh-jena.de].

Alle Aufgaben liegen in gebundenem Format mit jeweils drei bis vier Auswahlmöglichkeiten vor, wovon jeweils genau eine richtig ist.

Sowohl beim Quiz von tagesschau.de als auch beim Test von karriere.de erfolgt auf jede bestätigte Eingabe sofort eine Rückmeldung zur Korrektheit des Ergebnisses und ggf. die Anzeige der richtigen Antwort. Die Auswertung der

Eingaben erfolgt dichotom nach falsch und richtig, wobei der Nutzer bei tagesschau.de aufgefordert ist, stets eine Antwort anzukreuzen. Das Auslassen einer Aufgabe ist hier nicht möglich; beim Mathe-Quiz hingegen schon. Doch wird auch beim Auslassen einer Eingabe beim Mathe-Quiz von karriere.de durch Betätigen des „Weiter-Buttons“ die Eingabe als „falsch“ bewertet.

Einen der wenigen Selbsttests mit offenem Antwortformat repräsentieren die Fragen von karriere.de. Das offene Antwortformat birgt bei diesem Testdesign das Problem, dass nur eine einzige Antwort als korrekt anerkannt wird und demonstriert damit ein Hauptproblem offener Antwortformate in Online-Tests. Im konkreten Fall können bspw. zusätzliche oder fehlende Leerzeichen zwischen Zahl und Einheitssymbol zu fehlerhaften Auswertungen führen. Abbildung 11 verdeutlicht dieses am Beispiel der Aufgabe 1. In dieser konkreten Aufgabe kommt sogar die Problematik hinzu, dass in der Fragestellung nach einer Preisangabe in „EUR“ verlangt wird, in der Antwort aber nur die Eingabe des €-Symbols als korrekt ausgewertet wird. Wird die Antwort nicht in genau der vorgesehenen Schreibweise (s. „Erwartete, korrekte Antwort“) angegeben, erfolgt die Auswertung als „falsch“.

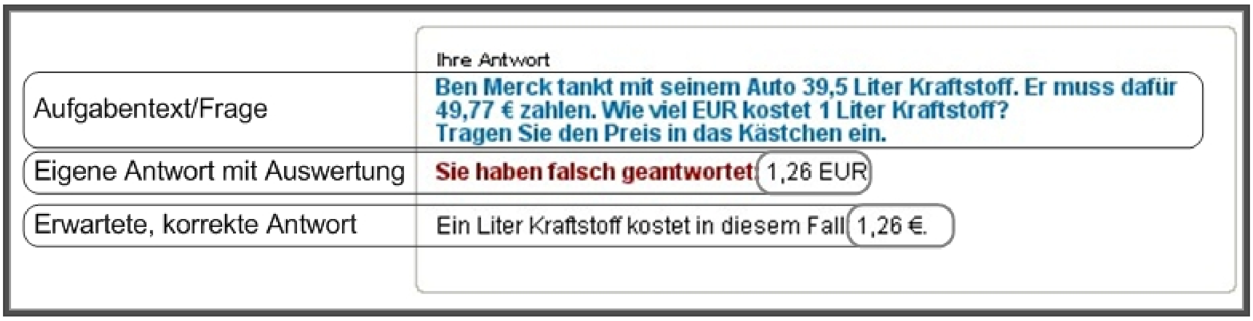


Abbildung 11: Antwortanalyse offener Aufgabenformate, Frage 1, Auslesen eines inhaltlich korrekten Ergebnisses als „falsch“ aufgrund eingeschränkter Eingabebedingungen [Ausschnitt aus karriere.de 2009].

Nach Abschluss der meisten Online-Self-Assessments erfolgt in der Regel eine Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse. Diese Ergebnisrückmeldungen wiederum unterscheiden sich bei den Portalen in Form, Inhalt und Umfang insbesondere hinsichtlich der Aussagen zu bestehenden defizitären mathematischen Bereichen. Dies sei exemplarisch verdeutlicht:

Beim Quiz von tagesschau.de wird dem Anwender nach Abschluss des gesamten Tests die von ihm erreichte Lösungsquote mitgeteilt, welche den Anteil der korrekt gelösten der insgesamt 13 Aufgaben darstellt. Anschließend werden alle Aufgabenstellungen sowie die vom Nutzer angegebenen Antworten nochmals aufgelistet. Dabei werden allerdings nicht mehr die ausgewählten Werte und korrekten Ergebnisse konkret aufgezeigt, sondern nur ob falsch oder richtig geantwortet wurde. Weder der Inhalt der eigenen falschen, noch der der richtigen Antwort wird angezeigt oder erörtert, so dass ein Nachvollziehen des eigenen Fehlers nicht möglich ist (vgl. Abbildung 12).

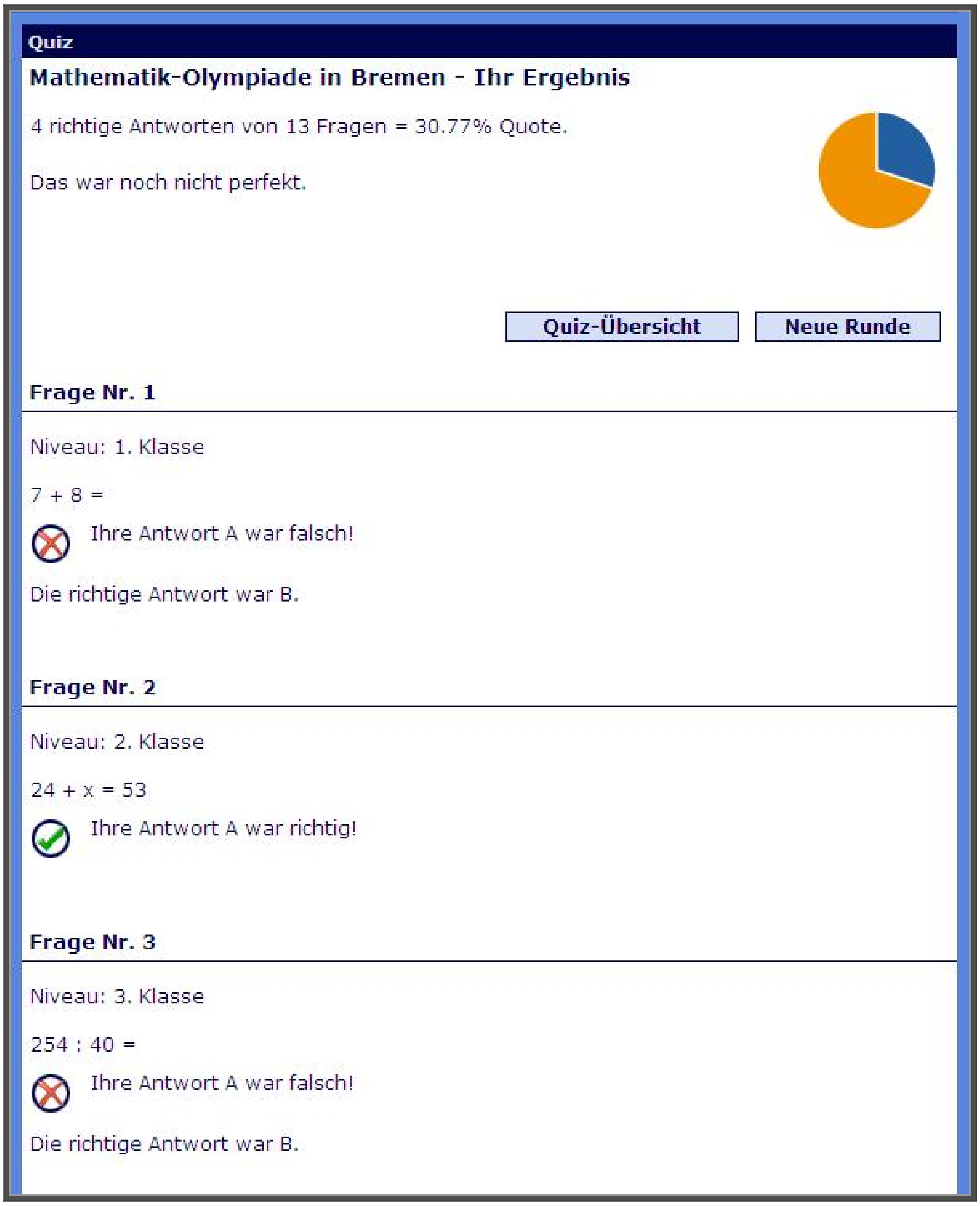


Abbildung 12: Auswertung und Rückmeldung zum Mathequiz [Ausschnitt aus tagesschau.de 2009].

Nach Beendigung des Tests von karriere.de erhält der Proband nochmals eine Zusammenstellung aller fünf Fragen unter Angabe der von ihm eingegebenen

Antworten, der Bewertung nach „falsch“ und „richtig“ sowie der Darstellung der korrekten Antwort (vgl. im Anhang Abbildung 43). Es erfolgt keine weitere Kommentierung zur Auswertung.

Auch im Test der FH Jena beschränkt sich die Rückmeldung an die Probanden darauf, alle Aufgaben mit der gesamten Antwortauswahl und der eigenen ausgewählten Antwort sowie einer dichotomen Korrekturangabe nochmals aufzulisten.

Bei keinem der analysierten, internetbasierten Selbsttests erfolgt eine Fehleranalyse, noch wird im Detail gezeigt, welchem Themengebiet die einzelnen Aufgaben zuzuordnen sind. Sofern der Proband daran interessiert ist, wo seine Defizite liegen und in welchen mathematischen Themenbereichen er dementsprechend seine Kompetenzen noch verbessern muss, ist er darauf angewiesen, andere Quellen hinzuzuziehen. Nur so kann er herausfinden, zu welchem Themenbereich die gestellten Testaufgaben zählen und welche Kompetenzanforderungen in jedem konkreten Fall an ihn gestellt wurden bzw. werden.

4.4 Fehleranalysen und diagnostisches Potential

Hinsichtlich des diagnostischen Potentials und fehleranalytischer Aspekte soll im Folgenden bei den Selbsttestportalen zum einen analysiert werden, in welchem Rahmen fehleranalytische Rückmeldungen erfolgen, und zum anderen wurde betrachtet, welches diagnostische Potential gegebene Antwortformate theoretisch bieten würden. Hierzu wurden u. a. Kenntnisse aus bereits bestehenden fehleranalytischen Untersuchungen der Mathematikdidaktik (und Psychologie) herangezogen, auf die im Detail im nachfolgenden Kapitel 5 eingegangen wird. Es wurde bspw. darauf geachtet, inwiefern gegebene Antwortauswahlen auf typische Fehlermuster zurückzuführen sind oder sich aus der Logik der Fehleranalyse herleiten lassen.

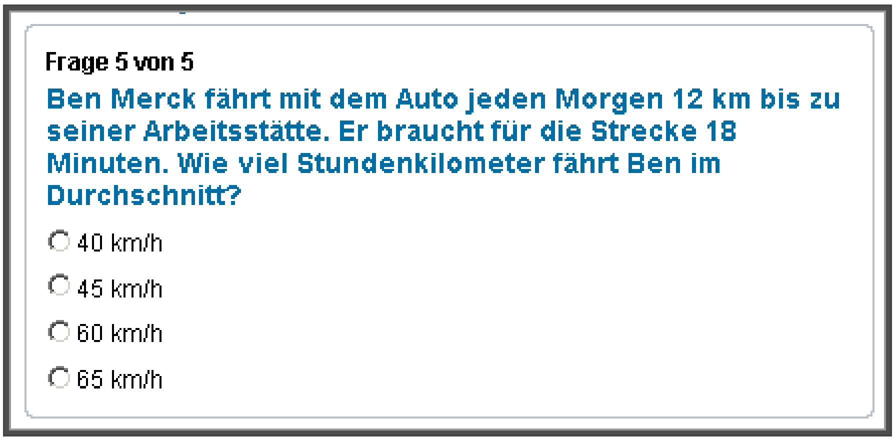


Abbildung 13: Multiple-Choice Antwortvorgaben, Frage 5 [Ausschnitt aus karriere.de 2009].

Die in Abbildung 13 dargestellten Antwortvorgaben falscher Lösungen zu Frage 5 von karriere.de spiegeln nur in einem Fall ein typisches Fehlermuster auf diese Aufgabe wieder. Die korrekte Antwort lautet 40 km/h. Diese würde in der Regel berechnet durch:

1. Berechnung der zurückgelegten Kilometer pro Minute durch 12 km : 18 min = $0,\overline{6}$ km/min
2. Berechnung der gesuchten Antwort in Kilometern pro Stunde durch Multiplikation des zuvor erlangten Zwischenergebnisses mit 60 durch $0,\overline{6} \cdot 60 = 40$ (km/h)

Nur eine der in der Frage Fünf vorgegebenen fehlerhaften Antworten lässt Rückschlüsse auf ein typisches Fehlermuster zu. Um zur Antwort „60“ zu gelangen, könnten die Probanden zuerst 60 min – also die Minutenanzahl einer vollen Stunde – durch die gegebene Kilometerzahl 12 teilen, um anschließend das hier erhaltene Zwischenergebnis „5“ mit dem zweiten gegebenen Wert 18 Minuten zu multiplizieren. Dies ist allerdings schon das naheliegendste Ergebnis, welches eine rationale Aufgabenanalyse diesbezüglich liefert und von der realistischen Betrachtung unter Einbezug der Erkenntnis aus Kapitel 5.3 möglich, aber unwahrscheinlich. Die beiden anderen Antwortvorgaben lassen keinen fehleranalytischen Hintergrund erkennen und scheinen eher zufällig gewählt – so können die Ergebnisse „45“ und „65“ nicht durch eine Kombination der gegebenen oder weiterer, eventuell assoziierter Werte nachvollziehbar und nach einem (typischen) Muster erzeugt werden. Folgende Antworten wären eher an mögliche Fehlermuster angelehnt und würden damit ein diagnostisches Potential bieten:

- 30 – hier hätte der Proband die beiden gegebenen Werte einfach addiert. Eine mögliche fehlerdiagnostische Erklärung wäre die sequentielle Betrachtung der Aufgabenmerkmale (vgl. Theorie der „binary confusion“ von Davis, Jockusch und McKnight [1978], Kapitel 5.3.3).
- 216 – hier wären die beiden gegebenen Werte multipliziert worden. Eine mögliche fehlerdiagnostische Erklärung wäre hier die Verwechselung von Operationen (vgl. hierzu auch Tabelle 14).
- 5 – was bei einer Division der Minutenzahl einer Stunde (60) durch die gegebene Kilometerzahl herauskommen würde. Eine mögliche fehlerdiagnostische Erklärung wäre hier ebenfalls die sequentielle Betrachtung der Aufgabenmerkmale.
- 90 – wenn das Zwischenergebnis 5 anschließend mit der gegebenen km-Zahl 18 multipliziert worden wäre. Eine mögliche fehlerdiagnostische Erklärung wäre hier ebenfalls die sequentielle Betrachtung der Aufgabenmerkmale. Aber eher noch ein fehlendes Verständnis der Zusammenhänge der Einheiten mit den entsprechenden Rechenoperationen (km/h bedeutet „Kilometer pro Stunde“, was berechnet wird mit „x km : y min“). Letzterer Erklärungsansatz trifft allerdings in den meisten, konstruierbaren Fehlertypen dieser Aufgabe als „Fehler-Ausgangsbasis“ zu.

Dahingegen lassen sich bei einigen Aufgaben des Tests der FH Jena mögliche typische Fehler in den Antwortvorgaben finden. Theoretisch ist also ein diagnostisches Potential in eingeschränktem Maße vorhanden. So sind zum Beispiel bei Aufgabe 6 als mögliche Lösungen der Gleichung $(w^2-9)\cdot w=0$ drei Antwortvorgaben gegeben, die sich im Rahmen einer rationalen Aufgabenanalyse als mögliche Fehlermuster identifizieren lassen. Die korrekt angegebene Lösung $w = 0 \vee w = \pm 3$ könnte bspw. durch dieses Lösungsverfahren ermittelt werden:

$$(w^2-9)\cdot w=0$$

$$w_1=0 \quad \vee \quad w^2-9=0$$

$$w_1=0 \quad \vee \quad w_{2/3}=0\pm\sqrt{(0)^2+9}$$

$$w_1=0 \quad \vee \quad w_{2/3}=\pm 3$$

Das diagnostische Potential der drei fehlerhaften Antwortvorgaben lässt sich fehleranalytisch wie folgt ableiten:

- (1) $w = 0 \vee w = 3$ oder (2) $w = 0 \vee w = -3$: Diese Lösungen könnten angekreuzt werden, wenn der Proband das Lösungsverfahren (s. oben) korrekt aber nicht vollständig anwendet. Dieses Vorgehen lässt sich z. B. auf ein ungenügendes Wurzelverständnis zurückführen.
- (3) $w = 0, w = 9$: Diese Lösung könnte erlangt werden durch das Separieren der in der vorgegebenen Gleichung enthaltenen konkreten Zahlen, was zum Beispiel durch eine Nichtkenntnis des anzuwendenden Lösungsverfahrens hervorgerufen werden könnte. Der Proband könnte in diesem Fall einfach die angegebenen, konkreten Zahlen als Lösungen der Gleichung übernehmen. (vgl. u. a. Tabelle 4).

Alle vorgestellten internetbasierten Selbsttests zur Mathematik weisen weder eine Fehleranalyse noch konkrete diagnostische Hinweise zu den defizitären Bereichen auf. Die hier exemplarisch erörterten Selbsttests stehen stellvertretend für alle frei über das Internet zugänglichen, deutschsprachigen Mathematik-Selbsttests mit internetbasiertes Auswertung der Testergebnisse.[14] Die Analyse der in den verschiedenen Portalen aufgeführten Antwortauswahlen zeigt jedoch, dass zumindest teilweise bei einigen Aufgaben und Antworten theoretisch ein diagnostisches Potential vorhanden ist, welches im Sinne einer konkreteren Defizitanalyse und sogar Fehleranalyse genutzt werden könnte.

[14] Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass zur Feststellung des aktuellen Entwicklungsstandes hinsichtlich angestrebten Selbsttestportals Mathe-Meister bei der Analyse der Online-Tests der freie Zugang zum Test über das Internet und die onlinebasierte, direkte Auswertung der Tests im Vordergrund stand. Nur Tests, die dieselben Kriterien erfüllen, sind mit dem Entwicklungsziel vergleichbar. Tests, die auszudrucken sind oder manuell ausgewertet werden, sind im Sinne der Zielsetzungen des Projektes nicht vergleichbar.

5 Fehleranalysen in der Mathematikdidaktik

Fehleranalysen verfolgen in der Mathematikdidaktik zwei grundlegende Ziele: „Zum einen geht es darum, Fehler zu erkennen und sie durch gezielte Maßnahmen in Zukunft möglichst zu verhindern […]. Zum anderen aber können Fehleranalysen uns helfen, im Hinblick auf die Art und die Organisation des mathematischen Wissens der Schüler die richtigen Fragen zu stellen, also unser Wissen über das Lernen und Lehren von Mathematik zu erweitern.“ [Hasemann 1985, S. 4, Vorwort]

Fehleranalytischen Untersuchungen stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, deren Ziel stets die Analyse oder Diagnose von Fehlern und deren Ursachen ist [vgl. auch Wittmann 2007]. Die folgenden Unterkapitel bieten eine Übersicht über die Methoden der Fehleranalyse und verwendeter Termini. Ferner werden verschiedene Untersuchungsergebnisse zu den in dieser Arbeit konkret behandelten mathematischen Themenbereichen zusammengefasst. Hierbei werden die Untersuchungsmethoden und -ergebnisse mit Ziel einer Kategorisierung und Musterbildung hervorgehoben, die als Grundlage für die anschließende Untersuchungskonzeption sowie die Analysen und Interpretationen der Daten innerhalb dieser Arbeit im Vordergrund stehen.

5.1 Fehleranalysen – Ziele und Methoden

Die Zielsetzungen dieser Arbeit implizieren die Verbindung verschiedener Forschungsbereiche u. a. der Mathematikdidaktik, der Psychologie und der Medienpädagogik. Dementsprechend analysiere ich bereits bestehende und für diese Arbeit relevante Erkenntnisse unterschiedlicher Fachrichtungen bzw. Wissenschaften, um sie anschließend für die Forschungs- und Entwicklungsaufgaben dieser Arbeit zusammenzuführen, zu adaptieren und anzuwenden. In Kapitel 4 wurden in diesem Sinne bereits aus mathematik-, mediendidaktischer und diagnostischer Perspektive bestehende internetbasierte Mathematik-Selbsttests analysiert. Dort wurde bereits an einigen Stellen auf fehleranalytische Erkenntnisse verwiesen. Hinsichtlich dessen bilden die Untersuchungsergebnisse fehleranalytischer Forschungen zu verschiedenen mathematischen Inhaltsgebieten eine maßgebliche Basis, auf der sowohl eine Testkonstruktion als auch die letztendliche Entwicklung der Antwortalternativen aufbaut. Nachfolgend werde ich daher diesen Schwerpunktbereich aus mathematikdidaktischer und psychologischer Sicht darstellen, die unterschiedlichen Erkenntnisse der einzelnen Bereiche zusammenführen. Im Vordergrund steht hierbei die Herausarbeitung von Fehlerkategorien und Fehlermustern. Diese werden u. a. in Kapitel 8.2 entsprechend der eigenen Untersuchungsergebnisse erweitert und auf Basis einer Aufgabenanalyse für das eigene Entwicklungsziel angewendet und konkretisiert.

Fehleranalysen haben eine lange Tradition in der Psychologie wie auch der Mathematikdidaktik [vgl. Radatz 1980, S. 16ff; Lorenz 1992, S. 28; Fritz 2003, S. 297]. Erste Ansätze lassen sich in der Psychologie bereits in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts finden. Psychologen wie Ranschburg [1916], Rose [1928], Weimer [1929], Fettweiß [1929] oder Seemann [1931] nahmen Kategorisierungen von Rechenfehlern hinsichtlich ihrer Ursachen vor, wobei fachdidaktische Aspekte der Mathematikdidaktik vorerst nicht beachtet wurden. Diese Betrachtungsweise verdeutlicht auch die unterschiedlichen Intentionen Deutscher und US-amerikanischer Zielsetzungen: In Deutschland waren die Wissenschaftler unter zu Hilfenahme psychologischer Theorien an der Frage interessiert, warum Schüler bestimmte Fehler begehen bzw. wie diese entstehen. Die US-amerikanischen Forscher hingegen waren vielmehr an den Erscheinungsformen bestimmter Schülerfehler und deren Häufigkeiten interessiert. [vgl. Radatz 1979, S. 22]

Nach einer längeren Pause mit nur sehr vereinzelten Veröffentlichungen aus diesem Bereich nahmen fehleranalytische Forschungen und Publikationen ab den 70er Jahren wieder deutlich zu [vgl. u. a. Hart 1978, 1981; Gerster, Grevsmühl 1983; Sommer 1982; Padberg 1983; Brandl 1992; Jost et al. 1992]. Mit seinen Veröffentlichungen um 1980 beeinflusste Radatz die Zielsetzungen und Methoden der Fehleranalyse für die mathematikdidaktische Forschung erheblich [vgl. Radatz 1979, S. 82f; 1980, S.16-32]. So lassen sich in der Mathematikdidaktik grundsätzlich zwei Zielsetzungen fehleranalytischer Untersuchungen unterscheiden:

(1) die *Kategorisierung* von Fehlern bzw. Fehlermustern und
(2) die *Ursachenermittlung* zu den einzelnen Fehlern und Fehlermustern.

Wittmann [2007] trennt diese beiden „klassischen Idealtypen“ sowohl hinsichtlich ihrer Zielsetzungen als auch der daraus resultierenden Forschungsmethoden. Die Kategorisierung von Fehlermustern (1) zielt in der Regel auf eine Beschreibung der Fehler ab, bei welcher eine „der Stoffdidaktik angelehnte, curriculum-nahe Terminologie“ verwendet wird [vgl. Wittmann 2007]. Die klassische Erhebungs- und Analysemethode ist hier die Verwendung schriftlicher, diagnostischer Tests, die teilweise durch Interviews ergänzt werden. Fehleranalysen zur Ursachenforschung (2) auf der anderen Seite sind kognitionstheoretisch orientiert. Hier kommen vorrangig Interviews und andere qualitative Methoden zum Einsatz, die eine intraindividuelle Analyse bei Schülern ermöglichen, wodurch Einsicht in die Denkprozesse der Schüler erlangt werden soll. Die hier vorliegende Arbeit ist anhand der o. g. Kriterien schwerpunktmäßig dem ersten Typ (1) von Fehleranalysen zuzuordnen. Jedoch werden an einigen Stellen auch Aspekte des 2. Typus aufgegriffen und beide miteinander verknüpft.

5.2 Fehler, Fehlermuster und Fehlerursachen

Der Begriff *Fehler* wird in mathematikdidaktischen Untersuchungen selten genauer bestimmt [vgl. Wittmann 2007, S. 175]. In der pädagogischen Psychologie betrachten Oser et al. Fehler als „von der Norm abweichende Sachverhalte oder von einer Norm abweichende Prozesse […]. Normen stellen das Bezugssystem dar, und ohne Normen und Regeln wäre es nicht möglich, fehlerhafte und fehlerfreie Leistungen, das Richtige vom Falschen zu unterscheiden.“ [Oser et al. 1999, S. 1]

In dieser Arbeit wird als *Fehler* eine mathematisch falsche Rechnung bzw. ein mathematisch falsches Ergebnis eines Lösungsprozesses bezeichnet. Rechnungen oder Ergebnisse, die mathematisch korrekt sind, aber in ihrer Form nicht einem bspw. in curricularen Vorgaben verankerten Normalverfahren entsprechen – und damit eine Abweichung von der Norm nach Oser darstellen – werden hier *nicht* als Fehler betrachtet, sondern als Alternativen eines zu einem korrekten Ergebnis führenden Lösungsverfahrens.

Fehler zeigen sich zum Beispiel in Form von *Fehlerphänomenen* in spezifischen Schülernotationen. Gerster [1982, S. 14] gelangte diesbezüglich zu dem Ergebnis, dass 80 % der Schülerfehler – also der *Phänomene* – eine bestimmte „Regelstruktur“ zeigen. Zahlreiche Schüler (in seiner Untersuchung) reagierten mit einer bestimmten Fehlerart auf bestimmte Aufgabenschwierigkeiten. Diese Fehlerarten sind nach Gerster, was auch der Großteil nachfolgender Untersuchungen bestätigt, nicht zufällig, sondern können als „gesetzmäßig bedingte Gebilde“ auf konkrete *Fehlermuster*[15] zurückgeführt und so kategorisiert werden [vgl. Gerster 1982, S. 16; zurückzuführen bereits auf Seemann 1931].

Wartha und Wittmann [2009, S. 5] beschreiben Fehlerphänomene als die „sichtbaren Produkte eines Wahrnehmungs- und Denkprozesses [, denen] tiefer liegende Fehlerursachen [zugrunde liegen], die sich auf den eigentlichen Fehlerprozess beziehen.“ Fehlerphänomene können wie in Kapitel 5.1 aufgeführt u. a. durch diagnostische Tests erhoben werden. Um diese Phänomene zu verallgemeinern wird versucht, ähnliche Fehlerphänomene und ein dahinterstehendes (verallgemeinertes) Fehlermuster zu finden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Begriffe der Phänomene und Muster auch bezogen auf korrekte Lösungen. Dementsprechend ergeben sich folgende Termini für die nachfolgenden Erörterungen:

- *Probandennotationen* sind die von Probanden schriftlich fixierten Lösungsschritte und Ergebnisse zu einem Item.
- *Fehlerphänomene* bezeichnen eine mathematisch fehlerhafte Probandennotation. Phänomene beziehen sich stets genau auf eine Aufgabenstellung.
- *Rechenphänomene* zeigen eine mathematisch korrekte Probandennotation.
- *Fehlermuster* werden erzeugt durch die Kategorisierung und Verallgemeinerung von Fehlerphänomenen. Ein Muster kann bei unterschiedlichen Items identifiziert werden.
- *Rechenmuster* stellen korrekte, verallgemeinerte Lösungsschemata dar.
- *Lösungsschemata* oder auch *Lösungsverfahren* beschreiben das Vorgehen zur Bearbeitung einer Aufgabe.

---

15 Gleichbedeutend zum Begriff Fehler*muster* wird von einigen Autoren auch der Begriff Fehler*strategie* verwendet [vgl. u. a. Padberg 1986, 2002; Herden, Pallack 2000].

In Zusammenhang mit der Fragestellung, wie ein Fehlerphänomen oder ein Fehlermuster zustande kommen kann, treten die Begriffe *Fehlerursache* und *Fehlerquelle* auf.

- *Fehlerursachen* beschreiben, wodurch Fehler entstanden sein könnten. Bei der Begründung von Fehlerursachen werden häufig auch außermathematische Einflussfaktoren mit einbezogen. Aufgrund dessen, dass eine solch tiefgründige Analyse im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen ist, wird ein zusätzlicher Begriff als geeigneter betrachtet und der Terminus der Fehlerquelle für diese Arbeit definiert.
- *Fehlerquellen* beschreiben mögliche Gründe aus dem Bereich der mathematischen Kompetenzen für fehlerhafte Lösungen, die sich auf Basis der Analyse korrekter wie fehlerhafter Lösungsschemata herleiten lassen.

Radatz [1980] unterscheidet bei Fehlerursachen zwei Kategorien von Fehlern auf intraindividueller Ebene:

- *Flüchtigkeitsfehler*, die umgangssprachlich auch als „Leichtsinnsfehler" bezeichnet werden können. Sie lassen sich dadurch charakterisieren, dass die betreffende Person einen solchen Fehler sofort korrigieren kann, wenn sie darauf aufmerksam gemacht wird.
- *Systematische Fehler* liegen insbesondere dann vor, wenn dasselbe Fehlermuster bei Aufgaben eines bestimmten Typs immer wieder auftritt. Diese Fehler sind häufig Indikatoren für ein tiefer liegendes, falsches Verständnis mathematischer Begriffe und Verfahren.

Padberg differenziert im Zusammenhang mit seinen Fehleranalysen zur Arithmetik und zur Bruchrechnung die Begriffe „systematische Fehler" und „typische" oder „charakteristische Fehler". [vgl. u. a. Padberg 1986, S. 60]

- *Systematische Fehler* liegen vor, wenn dasselbe Fehlermuster von einem Probanden bei ähnlichen Aufgaben analog angewendet wird. Diese Fehler treten intraindividuell auf, könnten aber theoretisch auch bei mehreren Schülern analysiert werden, was zur nachfolgenden Kategorisierung als typischer Fehler führen würde.

- *Typische* oder *charakteristische Fehler* kommen bei bestimmten Rechenoperationen auf Basis der Befunde einer oder mehrerer Untersuchungen häufiger vor. Diese Fehler werden intra- und interindividuell ermittelt.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Untersuchungsdesign zugrunde gelegt, welches maßgeblich typische Fehler sowohl auf intra- als auch und vor allem auf interindividueller Ebene nutzt, um die angestrebte Systematisierung von Antwortvorgaben mit diagnostischem Potential für gebundene Antwortformate zu erreichen.

5.3 Fehlerkategorisierende/-klassifizierende Untersuchungen

Im Bereich der Fehleranalyse gibt es eine Vielzahl von Untersuchungsverfahren sowie von Theorien bzw. Erklärungsversuchen für die möglichen Ursachen von Fehlleistungen der Schüler im mathematischen Lernprozess [vgl. Radatz 1980, S. 16]. Für diese Arbeit relevant sind die Ergebnisse solcher Untersuchungen, die Fehlermuster, -typen bzw. -kategorien zusammenfassen. Der Fokus liegt daher auf klassifizierenden Arbeiten, die die mathematischen Inhalte der Aufgaben als Ausgangspunkte nutzen.

Die inhaltlichen Schwerpunkte der Fehlerforschung lagen und liegen nach wie vor im Bereich der schriftlichen Rechenverfahren der Arithmetik und dem Rechnen mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen [vgl. Wittmann 2007, S. 174], wobei man sich in den Arbeiten der 20er Jahre des letzten Jahrhunderts ausschließlich der Arithmetik zugewandt hat. Ende der 70er, Anfang der 80er Jahre wurde zunehmend der Bereich der Bruchrechnung analysiert (vgl. u. a. Hart 1978, 1981; Gerster, Grevsmühl 1982; Padberg 1986]. Tietze [1987, 1988] befasst sich mit fehleranalytischen Untersuchungen in Teilgebieten der Algebra, an die später auch Malle [1993] ausführlich anknüpft.

Nachfolgend gebe ich einen Überblick über diese und andere für diese Arbeit relevante Untersuchungen. Dabei nehme ich eine Gliederung in Anlehnung an die Schwerpunkte der Untersuchungen vor und differenziere Veröffentlichungen zur Arithmetik, Bruchrechnung und Algebra, obwohl die Bruchrechnung mathematisch betrachtet ein Teilgebiet der Algebra darstellt. Mit dieser Differenzierung wird dem Stellenwert, den die einzelnen Themengebiete in den Untersuchungen einnehmen, Rechnung getragen.

5.3.1 Untersuchungen zur Arithmetik

Der Erwerb von Kenntnissen und Fähigkeiten in der Arithmetik bildet die Basis für alle weiteren mathematischen Themengebiete und Zusammenhänge. Damit ist die Arithmetik der Ausgangspunkt, der in allen Bereichen der Mathematik zu typischen Fehlern führen kann und auf den sich dementsprechend viele Fehlerphänomene zurückführen lassen.

Generell lassen sich fehleranalytische Untersuchungen zur Arithmetik nach schriftlichen, halbschriftlichen und mündlichen Rechenverfahren differenzieren, wobei Erstere bisher den Schwerpunkt der Veröffentlichungen bilden.

Schüler und andere Probanden zeigen häufig Gedächtnisschwächen beim mündlichen Bearbeiten mathematischer Aufgaben, also bei solchen Aufgaben, die sie nicht auf dem Papier, sondern im Kopf lösen sollen. Beim Kopfrechnen gehen häufig elementare Merkmale der Aufgabe bei der Aufgabenerfassung aber vor allem Merkmale während des Lösungsprozesses, wie bspw. Zwischenlösungen, verloren. So fungiert das Kurzzeitgedächtnis beim Lösen mathematischer Aufgaben als eine Art Zwischenspeicher, der umso bedeutender wird, je komplexer die Aufgabe ist. Das Kurzzeitgedächtnis muss aus diesem Grund als wichtiger Faktor zur Bestimmung von Fehlerursachen im Mathematikunterricht wahrgenommen werden. [vgl. Radatz 1980, S. 49f] Ein Fehlermuster kann unter dieser Voraussetzung nicht nur als falscher „Formel-Algorithmus" beschrieben werden, wie z. B. „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner" $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+c}{b+d}$ (vgl. Kapitel 5.2). Ein Fehlermuster kann danach auch derart formuliert werden, dass ein Schritt im Lösungsalgorithmus fehlt, mehrfach verwendet wurde oder die Reihenfolge der Lösungsschritte fehlerhaft ist.

Die Anforderungen an die Schüler bei nicht-schriftlichen[16], halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren unterscheiden sich stark, und dementsprechend differieren auch die auftretenden Fehler in ihrer Ausprägung. Schriftliche Rechenverfahren reduzieren das Rechnen mit Zahlen als Ganzes auf ein Rechnen mit Ziffern in den einzelnen Stellenwerten. Somit genügen fast schon eine Automatisierung des kleinen Einspluseins, Einsminuseins, Einmaleins sowie Einsdurcheins und die Kenntnis des jeweiligen Lösungsalgorithmus. Beim mündlichen und halbschriftlichen Rechnen hingegen muss mit den Zahlen als Ganzes umgegangen werden. Vorstellungen bspw. zur Größe der Zahlen sind hier sehr wichtig, da fehlerhafte Vorstellungen eine mögliche Fehlerursache darstellen. Gerster bezeichnet daher das Kopfrechnen und das halbschriftliche Rechnen auch als Zahlenrechnen und die schriftlichen Rechenverfahren als Ziffernrechnen [vgl. Gerster 2009, S. 269].

In seinen „Fehleranalysen im Mathematikunterricht" gibt Radatz [1980] nicht nur einen detaillierten Überblick über Ziele und Methoden der Fehleranalysen in der Mathematikdidaktik. Er widmet sich in den konkreten Analysen schwerpunktmäßig den mündlichen Rechenverfahren. Bei der Klassifizierung der Fehlertypen betrachtet er mittels Interviews und dem so genannten lauten Denken die Lösungsprozesse der Schüler, da in den schriftlichen Tests nur die Ergebnisse notiert werden und Rückschlüsse dementsprechend schwieriger abzuleiten sind. Radatz kategorisiert nicht hinsichtlich der Grundrechenarten, sondern „[…] inhaltsübergreifend nach Aspekten der Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung […]" [Radatz 1980, S. 37]. Dabei unterscheidet er sieben Kategorien, wie bspw. Schwierigkeiten durch mangelndes Sprach- und Textverständnis, bei der Analyse von Veranschaulichungen und durch falsche Assoziationen und Einstellungen [vgl. Radatz 1980, S. 37ff].

Gerster erörterte in seinen Veröffentlichungen seit Anfang der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts umfassend die Ergebnisse seiner unterschiedlichen Untersuchungen zur Fehleranalyse in der Arithmetik. Seinen Schwerpunkt legte er auf die schriftlichen Rechenverfahren und wählte dementsprechend die

[16] Für Rechenverfahren bzw. Rechnungen, die nicht schriftlich gelöst werden, werden in Anlehnung an die mathematikdidaktische Literatur die Termini „nicht-schriftlich", „mündlich" und „Kopfrechnen" analog verwendet.

Probanden aus den Jahrgangsstufen der Primarstufe aus. Seine Tests waren nicht standardisiert, vergleichsorientiert oder kriterienbezogen, sondern rein informeller Natur [vgl. Gerster 1982, S. 10]. Dennoch überprüfte er die Tests in etwa 40 Schulklassen des 4. bis 6. Schuljahres und entwickelte sie auf diesem Wege weiter. Letztlich gelangte er durch Analysen in über 120 Klassen des 3. bis 10. Schuljahres zu elf diagnostischen Tests unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades für schriftliche Rechenverfahren.

Padberg führte gemeinsam mit verschiedenen Wissenschaftlern eine Vielzahl von Untersuchungen durch. Bei seinen Darstellungen von Schülerfehlern bei der schriftlichen Addition bezieht er sich vorrangig auf die Untersuchungen Gersters [vgl. Padberg 1987, S. 267]. Gemeinsam mit Kühnhold bzw. Stiewe untersuchte er Schülerfehler im Bereich der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation [vgl. Kühnhold, Padberg 1986, S. 6 bzw. Padberg, Stiewe 1986, S. 18]. In Zusammenarbeit mit Bathelt und Post untersuchte Padberg Schülerfehler in der schriftlichen Division [vgl. Bathelt et al. 1986, S. 29ff], an die wiederum andere Wissenschaftler anknüpften. Diese und Ergebnisse anderer Wissenschaftler führt Padberg unter anderem in seinen Veröffentlichungen zur „Didaktik der Arithmetik“ auf [vgl. u. a. Padberg 2005].

Die Dissertation von Humbach [2008] liefert aktuelle Ergebnisse auf qualitativer sowie quantitativer Basis zu arithmetischen Basiskompetenzen von Schülern in der Primarstufe. Sie greift dabei u. a. auf die Ergebnisse von Radatz [1980] sowie Jost et al. [1992] zurück, die jeweils unterschiedliche Kategorisierungsschemata nutzen. Jost et al. klassifizieren im Vergleich zu Radatz nur vier Gruppen von Schülerfehlern und differenzieren dabei in Verständnis-, Automatisierungs-, Schnittstellen- und Umsetzungsfehler [vgl. Jost et al. 1992, S. 37ff]. Weitere Untersuchungen zur nicht-schriftlichen Addition und Subtraktion führten Meseth und Selter [2002] durch.

In mündlichen Rechenverfahren sind Zählfehler oder auch „Einsundeinsfehler der Nähe” nach Gerster [1982, S. 20] eine dominante Fehlerform. Sie treten in allen vier Grundrechenarten in entsprechender Form auf. Brenner verweist auf die Schwierigkeiten mit dem kleinen Einmaleins auf Basis seiner Untersuchungen von Drittklässlern [vgl. Brenner 1980]. Aufgrund der Art dieser Fehler lassen sie sich aber genauso in schriftlichen Rechenverfahren finden. Dazu zählen u. a. das doppelte Verwenden von Zahlen oder Ziffern wie auch das Weglassen von Zahlen, Ziffern oder Teiloperationen. Tabelle 1 fasst diese und ähnliche Fehlermuster zusammen. Die nachfolgenden Tabellen stellen eine Meta-Analyse der verschiedenen thematisch relevanten Studien dar. Der Aufbau ist so weit wie möglich und sinnvoll überall gleich. Auf den *Fehlertyp* – eine möglichst „sprechende Kurzbezeichnung" – folgen in der Regel *Fehlermuster* und *-phänomene*.

Fehlertyp[17]	**Fehlermuster/Beschreibung**	**Fehlerphänomene**
E1	Zählfehler, Einsundeinsfehler der Nähe: Ergebnis weicht um eins vom korrekten Ergebnis ab.	$33+5 \to 37$ $33+5 \to 39$ $38-5 \to 32$ $38-5 \to 34$
E2	Zählfehler, Einmaleinsfehler der Nähe: Ergebnis weicht um ein Vielfaches vom korrekten Ergebnis ab.	$7 \cdot 4 \to 24$ $4 \cdot 7 \to 35$
E3	Zählfehler, Einsdurcheinsfehler der Nähe: Ergebnis weicht um ein Vielfaches vom korrekten Ergebnis ab.	$42:7 \to 7$ $42:7 \to 5$
IO	Fehler der inversen Operation, bspw.: $a+b \to a-b$ oder $a \cdot b \to a:b \mid a:b=c \wedge c \in \mathbb{N}$	$37+12 \to 25$ $25 \cdot 5 \to 5$

Tabelle 1: Typische Fehler in der Arithmetik in halbschriftlichen und mündlichen Rechenverfahren, operationsübergreifend. Zusammenfassung der Ergebnisse von Radatz [1980], Gerster [1982], Bathelt et al. [1986], Padberg et al. [1986], Meseth, Selter [2002], Padberg [2005, 2009].

Große Schwierigkeiten bereitet allen Probanden unabhängig vom Alter das Rechnen mit der Null [vgl. Humbach 2008, S. 109 in Anlehnung an Röhrig 1996]. Diese nachfolgend als *Nullfehler* bezeichneten Typen treten wiederum in allen vier Grundrechenarten und bei mündlichen wie auch halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren auf. Bedingt durch die unterschiedlichen Formen der Rechenverfahren zeigen sich Nullfehler in unterschiedlichen Ausprägungen. Eine Zusammenfassung typischer Fehler mit der Null findet sich in Tabelle 2.

---

17 Aufgrund der Zusammenfassung vieler verschiedener Studien erfolgt eine systematische eigene Bezeichnung der Fehlertypen. Diese lehnt sich an die Schemata von Gerster [1928] und Padberg [2005] an. Die Bezeichnung von Fehlertypen dient insbesondere in den nachfolgenden Analysen einem direkten, eindeutigen Zugriff.

Fehlertyp	**Fehlermuster/Beschreibung**	**Fehlerphänomen**
Nulld1	$a+0 \to 0$ $0+a \to 0$	$5+0 \to 0$ $0+7 \to 0$
Nulld2	$a \cdot 0 \to a$ $0 \cdot a \to a$	$12 \cdot 0 \to 12$ $0 \cdot 25 \to 25$
NullSub1	Notation einer Null im Ergebnis, wenn Borgen für Subtraktion in einer Stelle notwendig.	$\begin{array}{r} 2\ 4\ 9 \\ -\ 1\ 7\ 3 \\ \hline \to 1\ 0\ 6 \end{array}$
NullSub2	Dominierung einer Null aus Subtrahend oder Minuend	$\begin{array}{r} 2\ 4\ 9 \\ -\ 1\ 0\ 3 \\ \hline \to 1\ 0\ 6 \end{array}$
Null2	Vermeidung der Null im Ergebnis	$\begin{array}{r} 2\ 4\ 9 \\ -\ 1\ 4\ 3 \\ \hline \to 1\ \ \ 6 \end{array}$

Tabelle 2: Typische Nullfehler in verschiedenen Operationen und Rechenverfahren. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse von u. a. Radatz [1980], Gerster [1982], Padberg et al. [1986], Jost et al. [1992], Padberg [2005]., Humbach [2008].

Ein analog zu Nullfehlern auftretender Fehler, bedingt durch eine Übergeneralisierung der Eins, tritt in folgender Form auf: $a \cdot 1 \to 1$ oder $1 \cdot a \to 1$ [vgl. u. a. Gerster 1982, S. 28f, S. 221; Padberg 2005, S. 274]. Barr verweist hier insbesondere auf Schwierigkeiten mit der Null bei der Division [vgl. Barr 1983, S. 2-4].

Bedingt durch die Verfahren des schriftlichen Rechnens können Fehlertypen klassifiziert werden, die in mündlichen Rechenverfahren nicht auftreten. So bspw. Fehler durch Nichtberücksichtigung überstehender Stellen [vgl. u. a. Gerster 1982, S. 217 und Tabelle 3]. Beim Divisionsverfahren fallen darunter u. a. diverse Fehler beim Herunterholen der Ziffern – wie Vergessen, falsche Reihenfolge, doppeltes Herunterholen. Ebenso finden sich hier Fehler bei der Berechnung bzw. dem Eintrag der Teilprodukte. [vgl. Gerster 1982, S. 223ff; Bathelt et al. 1986, S. 41]

Fehlertyp	Fehlermuster/Beschreibung	Fehlerphänomen
Stelle1[18]	Nichtberücksichtigung überstehender Stellen	$\begin{array}{r} 3249 \\ -\ \ 103 \\ \hline \rightarrow\ \ 146 \end{array}$
Stelle2	Stellenwertfehler durch falsche Anordnung (links- oder rechtsbündig ohne Berücksichtigung der korrekten Stellenwertzuordnung)	$\begin{array}{r} \underline{123 \cdot 41} \\ 123 \\ \underline{\rightarrow 4_1 92} \\ \rightarrow 615 \end{array}$
MulBe1	Behalteziffer vergessen	$\begin{array}{r} \underline{123 \cdot 4} \\ \rightarrow 482 \end{array}$
MulBe2	Notation der Behalteziffer als zusätzliche Stelle im Teil-/Endprodukt	$\begin{array}{r} \underline{123 \cdot 4} \\ \rightarrow 4812 \end{array}$
MulBe3	Behalteziffer erst addiert, dann Zwischenergebnis multipliziert	$\begin{array}{r} \underline{23 \cdot 4} \\ \rightarrow 122 \end{array}$
MulBe4	Eintrag der Behalteziffer anstatt der Produktziffer	$\begin{array}{r} \underline{23 \cdot 4} \\ \rightarrow 81 \end{array}$

Tabelle 3: Nur in schriftlichen Rechenverfahren auftretende typische Fehler. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse von u. a. Gerster [1982], Bathelt et al. [1986], Padberg et al. [1986], Padberg [2005].

Perseverationsfehler (vgl. Tabelle 4, siehe Folgeseite) stellen diejenigen Fehlertypen dar, die in allen Rechenoperationen, Rechenverfahren und dementsprechend in allen mathematischen Bereichen auftreten. Bereits in den Veröffentlichungen zu den psychologischen Untersuchungen von Rechenfehlern durch Weimer [1929] wird die Perseveration als Fehlerursache genannt. Perseverationserscheinungen zählen zu den Konzentrations- und Aufmerksamkeitsdefiziten, die u. a. mit den anfangs angeführten Gedächtnisschwächen zusammenhängen können. „Nach G. Pippig[19] perservieren beim Rechnen bevorzugt Zahlen, Relationen zwischen ihnen oder geistige Operationen, die am Anfang oder Ende des vorausgegangenen Handlungsabschnittes bedeutsam waren.“ [Gerster 1982, S. 31] Gerster führt hier u. a. die Fehler auf, bei denen eine

18 Die Stellenwertfehler Stelle1 und Stelle2 treten analog – jeweils passend – in allen schriftlichen Rechenverfahren auf.

19 [Vgl. Pippig 1975, S. 624 nach Gerster 1982, S. 31].

mehrfach auftretende Zahl oder Ziffer fehlerhafter Weise in das Ergebnis eingetragen wird, oder aber eine Summandenziffer anstatt sie zu addieren in das Ergebnis übertragen wird. [vgl. Gerster 1982 S. 31, S. 217ff]

Fehlertyp	**Fehlermuster/Beschreibung**	**Fehlerphänomen**
Pers1	Übertragung einer Zahl/Ziffer ins Ergebnis	$531+556 \rightarrow 587$ $11 \cdot 10 \rightarrow 111$
Pers2	Notation des Übertrags im Ergebnis	$\begin{array}{r} 2\ 4\ 9 \\ \underline{+\ 1\ 2_1 3} \\ \rightarrow 3\ 6\ 1 \end{array}$
PersOp	Wiederholung der Operation der vorhergehenden Aufgabe oder des vorhergehenden Rechenschritts	$7-3=4$ $\ldots-\ldots=\ldots$ $\ldots$ $\Rightarrow 5+3 \rightarrow 2$

Tabelle 4: Perseverationsfehler in mündlichen und schriftlichen Rechenverfahren. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse u. a. von Weimer [1929], Gerster [1982], Padberg [2005].

Insbesondere in schriftlichen Rechenverfahren treten verschiedene Ausprägungen von *Übertragsfehlern* auf. Den einfachsten Fall bildet dabei die Nichtbeachtung des Übertrags [vgl. u. a. Gerster 1982, S. 32]. In Tabelle 5 sind typische Übertragsfehler zusammengestellt (vgl. Folgeseite).

Fehlertyp	**Fehlermuster/Beschreibung**	**Fehlerphänomen**
Ü1[20]	Nichtbeachtung des Übertrags	$\begin{array}{r} 2\,4\,9 \\ +\,1\,2_1 3 \\ \hline \rightarrow 3\,6\,2 \end{array}$
Ü2	Nichtbeachtung des Übertrags zur Ziffer Null (Spezialfall von Ü1)	$\begin{array}{r} 2\,4\,9 \\ +\,1\,0_1 3 \\ \hline \rightarrow 3\,4\,1 \end{array}$
Ü3	Nichtbeachtung des Übertrags bei leerer Stelle (Spezialfall von Ü1)	$\begin{array}{r} 2\,4\,9 \\ +\quad 8_1 3 \\ \hline \rightarrow 2\,3\,2 \end{array}$
Ü4	Nichtbeachtung des Übertrags zur Neun (Spezialfall von Ü1)	$\begin{array}{r} 2\,0\,9 \\ +\,1\,9_1 3 \\ \hline \rightarrow 3\,9\,2 \end{array}$
Ü5	Wiederholter Eintrag bzw. Berücksichtigung der Übertragsziffer	$\begin{array}{r} 2\,4\,9 \\ +\,1_1 2_1 3 \\ \hline \rightarrow 4\,7\,2 \end{array}$
Ü6	Eintragen der Übertragsziffer als zusätzliche Stelle im Ergebnis (ähnlich MulBe2 bei der schriftlichen Multiplikation, vgl. Tabelle 3)	$\begin{array}{r} 2\,4\,9 \\ +\,1\,2\,3 \\ \hline \rightarrow 3\,6\,1\,2 \end{array}$
Ü7	Übertragsfehler beim/nach Ergänzen bis 10	$\begin{array}{r} 4\,0\,0 \\ -\quad 9\,6 \\ \hline \rightarrow 3\,1\,4 \end{array}$

Tabelle 5: Typische Übertragsfehler in verschiedenen Rechenverfahren, insbesondere schriftlichen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse u. a. von Gerster [1982], Bathelt et al. [1986], Meseth, Selter [2002], Padberg [2005].

Padberg zählt zu diesen Fehlern zudem den so genannten *Rechenrichtungsfehler*. So wird bspw. bei der schriftlichen Subtraktion häufig die absolute Differenz zwischen zwei Stellenwerten berechnet, sofern die Subtraktion nicht ohne Borgen möglich ist [vgl. Padberg 2005, S. 99f].

[20] Die Übertragsfehler Ü1 bis Ü6 treten analog – entsprechend dem jeweiligen Verfahren – insbesondere auch in Subtraktion und Multiplikation auf.

5.3.2 Untersuchungen zur Bruchrechnung

Die Bruchrechnung bildet nach der Arithmetik einen darauf aufbauenden, aber dennoch als *Basis*bereich zu bezeichnendes Themengebiet in der Mathematik. Didaktisch wird ihre Notwendigkeit sogar vorrangig innermathematisch begründet [vgl. u. a. Padberg 2002, 2009]. Sie ist Grundlage für alle anderen Themengebiete der Algebra wie auch der Stochastik und viele Teilgebiete der Geometrie. Ihre Aspekte finden sich in nahezu allen mathematischen Themengebieten in unterschiedlicher Form wieder. So begründet sich zum Teil auch der hohe Stellenwert, den die Bruchrechnung bei Untersuchungen zur Fehleranalyse bisher einnimmt. Aufgrund dessen wird sie hier auch als separates Gebiet aufgearbeitet.

Eine Vielzahl nationaler und internationaler Untersuchungen zu Schülerfehlern in der Bruchrechnung führte in den letzten Jahrzehnten zur Identifikation verschiedener typischer Fehlermuster in diesem Bereich. Diese Untersuchungen gelangen selten zu exakt übereinstimmenden prozentualen Ausprägungen von diagnostizierten Fehlermustern. Gründe hierfür sind ebenso wie in der Arithmetik die unterschiedlichen Zusammensetzungen der Probandengruppen, unterschiedlich konstruierte diagnostische Aufgaben bzw. Tests sowie – und dies vor allem in der Bruchrechnung – differierende, teilweise stark voneinander abweichende didaktische oder curriculare Voraussetzungen. Inhaltlich zeigen sich aber deutliche Übereinstimmungen bei den Kategorisierungen. Ich bilde daher begründet auf den inhaltlichen Aspekten verschiedener Untersuchungsergebnisse Zusammenstellungen von Fehlermustern und -kategorien. Der Übersichtlichkeit halber fasse ich die Ergebnisse nationaler und internationaler Studien nachfolgend vorwiegend tabellarisch zusammen. Diese Ergebnisse werden jedoch insbesondere in Kapitel 8.2 im Detail wieder aufgegriffen und bilden eine maßgebliche Grundlage für die Entwicklung der Antwortalternativen.

Die Gruppe „Concepts in Secondary Mathematics and Science“ (CSMS) des Chelsea College der Universität London um Hart [1978, 1980, 1981, 1987] führte von 1974 bis 1979 die Langzeitstudie „Strategies and Errors in Secondary Mathematics“ (SESM) mit rund 10.000 Schülern im Alter von 11 bis 16 Jahren (Sekundarstufe I) durch. Die Studie basiert auf der Durchführung mehrerer schriftlicher Tests unter den Oberthemen Algebra, Bruchrechnung, Verhältnisrechnung und Dreisatz, von denen die Probanden jeweils nur einen bis zwei Testbögen bearbeiteten [vgl. Hart 1987, S. 14f]. Die Ergebnisse der Studie bestätigten international im gleichen Zeitraum durchgeführte Untersuchungen darin, dass bestimmte Fehlermuster in der Bruchrechnung vorherrschen, die in Abhängigkeit von der jeweiligen Operation festgemacht wurden.

Die aktuell wohl bekanntesten Veröffentlichungen zur Bruchrechendidaktik und zu Schülerfehlern in der Bruchrechnung aus dem deutschsprachigen Raum sind die Arbeiten von Padberg [vgl. u. a. 1983; 1986; 2002]. Die von ihm gewonnenen Ergebnisse basieren vor allem auf der Analyse schriftlicher Tests, die im Herbst 1982 kurz nach Beginn des Schuljahres an 861 Schüler aus 28 Klassen des 7. Schuljahrganges von insgesamt 8 Realschulen im Bielefelder Raum ausgegeben wurden. Dieser Erhebung gingen zwei Voruntersuchungen mit jeweils ca. 200 Schülern voraus. Weitere Arbeiten von Studierenden und Doktoranden erweiterten im Laufe der Jahre die Datenbasis und vertieften die Analysen.

Anders geht Lörcher hinsichtlich des Testdesigns in seinen Untersuchungen vor. In Anlehnung an bestehende diagnostische Tests zur Bruchrechnung differenziert er in seinen Untersuchungen die Tests zuerst in einen Additionstest und einen Subtraktionstest mit verschiedenen Schwierigkeitsdimensionen [vgl. Lörcher 1982]. Den Additionstest bearbeiteten insgesamt 132 Hauptschüler des siebten bis neunten Schuljahres sowie 438 Realschüler des sechsten und siebten Schuljahres und insgesamt 346 Realschüler der Jahrgangsstufen acht bis zehn [vgl. Lörcher 1982, S. 174]. Der Subtraktionstest wurde von 353 Realschülern des sechsten bis neunten Schuljahres bearbeitet. Auch für die Multiplikation und Division wurden diagnostische Tests entwickelt, die mit insgesamt „162 Schülern in je zwei Hauptschul-, Realschul- und Gymnasialklassen des 6. Schuljahrs“ [Lörcher 1982, S. 178] durchgeführt wurden. Die Analysen der Testergebnisse resultierten in der Festlegung verschiedener Schwierigkeitsmerkmale von Aufgaben und typischen Fehlermustern.

Hasemann führte ein Jahr später (1983) bei 100 Hauptschülern einen schriftlichen Test mit Bruchrechenaufgaben durch und interviewte anschließend einzelne Schüler. Er gelangte durch diese Methode im Rahmen der Ursachenforschung zu dem Ergebnis: „Die Regeln werden häufig rein mechanisch (korrekt oder auch nicht) benutzt, aber Einsicht in den Sinn ihres Tuns ist bei vielen Schülern nicht zu erkennen“ [Hasemann 1983, S. 33].

Auch Gerster und Grevsmühl ließen in etwa 20 Klassen diagnostische Tests bearbeiten [Gerster, Grevsmühl 1983, S. 654]. Sie widmeten sich vorrangig der Entwicklung konkreter diagnostischer Testbögen für die Anwendung durch Lehrer im Unterricht. Zur Überprüfung der Schülerantworten entwickelten sie Fehlertypenlisten, anhand derer die Ergebnisse verglichen und das zugrunde liegende Fehlermuster diagnostiziert werden kann. Dies gilt für eine reduzierte Anzahl von Schülerfehlern, wie sie bspw. als *typische Fehler* von Hart [1980], Lörcher [1982] oder Padberg [1986; 2002] identifiziert wurden.

Gemeinsam mit Daubert wertete Gerster zudem über mehrere Jahre hinweg diagnostische Tests zum Thema Bruchrechnung aus, die in „über 80 Klassen des 6. bis 9. bzw. 10. Schuljahres in Haupt- und Realschulen“ [Daubert, Gerster 1983, S. 758] durchgeführt wurden. Entscheidend ist ihrer Meinung nach, dass „dem Lehrer die Schwierigkeiten und Fehlermuster beim Bruchrechnen bewusst sind, und ob er entsprechend fehlervorbeugend unterrichtet“ [Daubert, Gerster 1983, S. 758]. Deshalb stellen sie in ihrer Veröffentlichung die wichtigsten Fehlermuster und mögliche Ursachen vor allem für die Hand des Lehrers dar.

Eine häufige Fehlerursache für verschiedene Fehlermuster in der Bruchrechnung ist die „komponentenweise“ Betrachtung von Brüchen, wie Hasemann [1983, S. 72] sie bezeichnet. Bruchzahlen werden nicht als eine Zahl wahrgenommen, sondern in ihre einzelnen Komponenten zerlegt, mit denen dann getrennt von einander agiert wird. Dies führt bspw. zu den in der Addition und Subtraktion am häufigsten auftretenden Fehlermustern „Zähler plus/minus Zähler, Nenner plus/minus Nenner“ (vgl. in Tabelle 7 u. a. A1 und S1). Auch fehlerhafte Regelanwendungen beim Rechnen mit Bruchzahlen in gemischter

Schreibweise[21] lassen sich häufig auf ebendieses komponentenweise Betrachten zurückführen, wie z. B. die getrennte Operationsanwendung auf die ganzzahligen Anteile und die Bruchanteile einer gemischten Schreibweise: $m\frac{a}{b} \cdot l\frac{c}{d} \rightarrow (m \cdot l) + \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (MulG1).

Alle genannten Untersuchungen wurden bei Schülern unterschiedlicher Klassenstufen und Schulformen von Regelschulen verschiedener deutscher Bundesländer bzw. auch anderer Länder (u. a. Großbritannien, USA, Australien) durchgeführt. Die Fehlermuster der einzelnen Untersuchungen lassen sich systematisch zusammenfassen, auch wenn sie sich in ihren konkreten Ausprägungen in Abhängigkeit von der jeweiligen Probandengruppe unterscheiden. Die nachfolgend erarbeitete Kumulation der Ergebnisse der genannten Untersuchungen zu typischen Fehlermustern habe ich in Abhängigkeit von Operation und Operandenform kategorisiert. Unterschieden wird innerhalb der vier Grundrechenarten sowie durch Differenzierung nach den Operandenformen in:

- Brüche (B),
- gleichnamige Brüche (Bgl),
- ungleichnamige Brüche (Bugl),
- Brüche in gemischter Schreibweise (G) und
- natürliche Zahlen (N).

Bei Verknüpfungen von Brüchen mit natürlichen Zahlen herrschen nach Padberg Fehlermuster vor, bei denen die natürliche Zahl (wie ausschließlich bei der Multiplikation zulässig) nur mit dem Zähler des Bruches verknüpft wird [vgl. Padberg 1986, S 62f]: $n \pm \frac{a}{b} \rightarrow \frac{n \pm a}{b}$ oder $\frac{a}{b} \pm n \rightarrow \frac{a \pm n}{b}$. Dabei lassen sich zwei Hypothesen für die Entstehung dieser Notationen finden:

1. das falsche Ausführen der Operation,
2. das falsche Umwandeln der natürlichen Zahl.

[vgl. Padberg 1986, S. 62ff; Winter, Wittmann 2009]

---

[21] Für Bruchzahlen der Form $g\frac{a}{b}$ finden sich unterschiedliche Bezeichnungen wie „gemischte Zahl“, „Bruchzahlen in gemischter Schreibweise“, „gemischte Brüche“ etc.. Im Rahmen dieser Arbeit wird vorrangig der Terminus „Bruchzahl in gemischter Schreibweise“ verwendet und der Lesbarkeit halber teilweise mit Ausdrücken wie „gemischte Schreibweise“ abgekürzt.

Die häufigsten Fehlermuster beim Umwandeln natürlicher Zahlen in Brüche bzw. umgekehrt sind dabei:

Fehlertyp	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
UN1	$n \rightarrow \frac{n}{n}$	$3 \rightarrow \frac{3}{3}$
UN2	$n \rightarrow \frac{1}{n}$	$12 \rightarrow \frac{1}{12}$
UN3	$\frac{n}{n} \rightarrow n$	$\frac{3}{3} \rightarrow 3$

Tabelle 6: Typische Fehlermuster bei der Umwandlung natürlicher Zahlen. Zusammenfassung der Ergebnisse von u. a. Daubert, Gerster [1983], Padberg [1986], Winter, Wittmann [2009].

Die Verknüpfung gleichnamiger Brüche, die bei der Addition und Subtraktion in der Regel seltener zu Fehlern führt, ist hingegen in der Multiplikation und Division häufig Auslöser typischer Fehlermuster (vgl. Tabelle 7, Tabelle 8, siehe Folgeseiten). Hierbei findet vielfach eine Übertragung des Regelwerkes aus Addition und Subtraktion statt, wodurch beim Rechnen der gleiche Nenner beibehalten und die Operation nur im Zähler durchgeführt wird: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} \rightarrow \frac{a \cdot c}{b}$. Analog zeigt sich dieses Muster in der Division, sofern die Zahlwerte es ermöglichen [vgl. Padberg 1986, S. 66]. Zu betrachten ist hier insbesondere Tabelle 8 (siehe Folgeseite). Bei dieser Tabelle wird auf eine Aufführung von Fehlerphänomenen verzichtet, da die algebraischen Strukturen der Muster diese einfach herleiten lassen.

Fehlertyp[22]	**Fehlermuster**	**Auftreten bei Verknüpfung von**			
		BBgl	**BBugl**	**BN**	**NB**
A1	$\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} \rightarrow \frac{z_1 + z_2}{n_1 + n_2}$	dominant	dominant, häufiger als bei BBgl	-	-
S1	$\frac{z_1}{n_1} - \frac{z_2}{n_2} \rightarrow \frac{z_1 - z_2}{n_1 - n_2}$ bzw. $\frac{z_1}{n_1} - \frac{z_2}{n_2} \rightarrow \frac{\lvert z_1 - z_2 \rvert}{\lvert n_1 - n_2 \rvert}$ (Nur, wenn Subtraktion der Zahlen in Zähler und Nenner in gleicher Richtung möglich.)	-	dominant, seltener als A1 bei BBugl	-	s. S2
S3	$n_1 - \frac{z}{n_2} \rightarrow \frac{n_1 - z}{n_2}$ bzw. $n_1 - \frac{z}{n_2} \rightarrow \frac{\lvert n_1 - z \rvert}{n_2}$	-	-	-	dominant

Tabelle 7: Typische Fehlermuster bei der Addition und Subtraktion mit Brüchen. Zusammenfassung der Ergebnisse von Padberg [1986; 2002] und Gerster, Grevsmühl [1983].

Die Untersuchungen gelangen übereinstimmend zu dem Ergebnis, dass häufig Regeln von einer auf eine andere Operation übertragen werden. So stellte Hasemann in seinen Untersuchungen fest, dass „sehr häufig […] die Regel für die Multiplikation auf die Addition übertragen“ [Hasemann 1983, S. 32] wird. Gerster und Grevsmühl nennen zudem die Fehlertypen „Addition ersetzt durch Multiplikation“ sowie „Addition ersetzt durch Subtraktion“ und „Addition mit Kehrwertbildung“ [Gerster, Grevsmühl 1983, S. 657] (vgl. u. a. Tabelle 7 und Tabelle 9). Durch die Übergeneralisierung einzelner Regelelemente aus anderen Operationen entstehen u. a. zwei seltene, aber klassifizierbare Fehler in Addition und Subtraktion, die von Padberg [2002, S. 104ff] im Rahmen der Bruchrechnung als A2 und S2 benannten Muster (vgl. Tabelle 9, Tabelle 14, siehe Folgeseiten).

[22] Benennung der Fehler nach Padberg bzw. in Anlehnung daran [vgl. Padberg 1986; 2002].

Fehlertyp	**Fehlermuster**	**Auftreten bei Verknüpfung von**			
		BBgl	**Bbugl**	**BN**	**NB**
M1	$\frac{z_1}{n} \cdot \frac{z_2}{n} \rightarrow \frac{z_1 \cdot z_2}{n}$	dominant	-	-	-
M2	$\frac{z_1}{n} \cdot \frac{z_2}{n} \rightarrow \frac{z_1 \cdot z_2}{n+n}$	häufig, nicht systematisch	selten vorhanden, systematisch	-	-
M3	$n_1 \cdot \frac{z}{n_2} \rightarrow \frac{n_1 \cdot z}{n_1 \cdot n_2}$ $\frac{z}{n_1} \cdot n_2 \rightarrow \frac{z \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}$	-	-	dominant, systematisch	
M4	$\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} \rightarrow \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$	unbedeutend		-	-
D1	$\frac{z_1}{n} : \frac{z_2}{n} \rightarrow \frac{z_1 : z_2}{n}$ Wenn Zählerdivision in $\mathbb{N}$ aufgeht.	häufig	-	-	-
D2	$\frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} \rightarrow \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$	häufig, systematisch		-	-
D3	$\frac{z}{n_1} : n_2 \rightarrow \frac{z \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}$	-	-	häufig, systematisch (s. auch E1)	
D4	$\frac{z}{n_1} : n_2 \rightarrow \frac{z}{n_1} \cdot n_2$	-	-	häufig	
D5	$\frac{z}{n_1} : n_2 \rightarrow \frac{z : n_2}{n_1}$ bzw. $\frac{z}{n_1} : n_2 \rightarrow \frac{n_2 : z}{n_1}$ Wenn Division in $\mathbb{N}$ aufgeht.	-	-	häufig	
E1[23]	$n \rightarrow \frac{n}{n}$	-	-	häufig	

Tabelle 8: Typische Fehlermuster bei der Multiplikation und Division von Brüchen sowie Einbettungsfehler. Zusammenfassung der Ergebnisse von Padberg [2002] und Gerster, Grevsmühl [1983].

23 E: Einbettungsfehler bei der Umwandlung natürlicher Zahlen in Brüche.

Fehlertyp	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
A2	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+c}{b\cdot d}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\rightarrow\frac{3+1}{8\cdot 4}\rightarrow\frac{4}{32}$
A3	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\rightarrow\frac{3\cdot 1}{8\cdot 4}\rightarrow\frac{3}{32}$
S2	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a-c}{b\cdot d}$	$\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\rightarrow\frac{3-1}{8\cdot 4}\rightarrow\frac{2}{32}$
S4	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\rightarrow\frac{5\cdot 3}{8\cdot 4}\rightarrow\frac{15}{32}$

Tabelle 9: Fehler durch Übergeneralisierung oder Übertragung anderer Rechenoperationen. Zusammenfassung der Ergebnisse u. a. von Daubert, Gerster [1983], Padberg [2002].

Das Auftreten von Brüchen in gemischter Schreibweise ist ein weiterer, insbesondere in höheren Schuljahrgängen verbreiteter Fehlerfaktor. Ebenso wie beim Rechnen mit natürlichen Zahlen kommt es hierbei häufig zu Umwandlungsfehlern. Zudem lässt sich daran der bereits o. g. Fehlertyp MulG1 festmachen. Ebenfalls können folgende Fehlertypen in diesem Zusammenhang klassifiziert werden:

Fehlertyp	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
MulG1	$m\frac{a}{b}\cdot l\frac{c}{d}\rightarrow(m\cdot l)+\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$2\frac{3}{4}\cdot 6\frac{5}{6}\rightarrow 12\frac{15}{24}$
MulG2	$g\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\rightarrow g+\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$2\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\rightarrow 2\frac{15}{24}$
MulG3	$g\frac{a}{b}\cdot n\rightarrow g\cdot n+\frac{a}{b}$	$2\frac{3}{4}\cdot 5\rightarrow 10\frac{3}{4}$
DivG1	$\frac{a}{b}:g\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b}\cdot g\frac{d}{c}\rightarrow g\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	$\frac{3}{4}:2\frac{5}{6}\rightarrow\frac{3}{4}\cdot 2\frac{6}{5}\rightarrow 2\frac{18}{20}$
DivG2	$g_1\frac{a}{b}:g_2\frac{c}{d}\rightarrow n\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\mid g_1:g_2=n\wedge n\in\mathbb{N}$	$8\frac{1}{3}:4\frac{5}{6}\rightarrow 2\frac{5}{18}$

Tabelle 10: Typische Schülerfehler der Bruchrechnung bei Operationen mit gemischten Schreibweisen. Zusammenfassung der Ergebnisse von Daubert, Gerster [1983], Padberg [2002].

5.3.3 Untersuchungen zur Algebra

Auch wenn die Bruchrechnung einen Teilbereich der Algebra darstellt, zeigt sich im vorhergehenden Kapitel, dass diese einen besonderen Stellenwert in einer Vielzahl von Untersuchungen einnimmt. Die vielen anderen Teilbereiche der Algebra, wie zum Beispiel die Potenzrechnung, lineare und quadratische Gleichungen oder Termumformungen dagegen wurden in der Regel bereichsübergreifend und in nur wenigen veröffentlichten fehleranalytischen Untersuchungen betrachtet. Diese werden nun zusammenfassend vorgestellt.

Mittels der Analyse der Klassenarbeiten von zwei Klassen des 8. Schuljahrgangs einer russischen Schule (Moskau) typisierte Shevarev bereits 1946 einige Fehlermuster beim Rechnen mit Potenzen. Schon hier zeigen sich die engen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilbereichen der Algebra. Shevarev identifiziert Fehlermuster, die sich konkret ausschließlich auf Fehler im Zusammenhang mit der Potenzschreibweise zurückführen lassen. Ebenso zeigt er auch Fehler im Umgang mit Potenzen auf, die bspw. nur in Brüchen auftreten, wie das Fehlermuster PK1 $\frac{a^{cx}b^{dy}}{a^{iy}b^{jx}} \rightarrow \frac{a^{c\cancel{x}}b^{d\cancel{y}}}{a^{i\cancel{y}}b^{j\cancel{x}}} \rightarrow \frac{a^{c}b^{d}}{a^{i}b^{j}}$ (vgl. auch Tabelle 14).

Auf Basis verschiedener von ihnen durchgeführter Untersuchungen mit Schülern veröffentlichten Davis, Jockusch und McKnight 1978 in einem Artikel dominierende Fehlermuster zu den von ihnen gestellten Aufgabentypen. Sie clusterten verschiedene Fehlermuster über einzelne Teilbereiche, wie dem Lösen linearer oder quadratischer Gleichungen und dem grundlegenden Rechnen mit Variablen hinaus unter Betrachtung möglicher Ursachenaspekte. Die exemplarische Darstellung und die bereichsübergreifende Clusterung ermöglichen weiterführende Hypothesen zu Fehlermustern für andere Teilbereiche und Aufgabentypen.

Auf dem Gebiet der Algebra bieten im europäischen Raum die Arbeiten von Tietze [vgl. u. a. 1987; 1988] und Malle [vgl. u. a. 1983; 1986; 1993] insgesamt eine umfassende Synthese verschiedener nationaler und internationaler Erkenntnisse. Diese wurden von ihnen jeweils durch eigene Untersuchungen vertieft bzw. erweitert. Tietze konkretisiert seine Theorien zur Entstehung von

Fehlern und bestimmten Fehlermustern schwerpunktmäßig für den Bereich der Gleichungslehre. Malle veröffentlicht 1993 mit seinem Buch „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ eine Art Kompendium nationaler und internationaler Erkenntnisse für die Fehleranalyse in diesem Bereich.

Kurth legt in seinen Untersuchungen ein besonderes Augenmerk auf den Bereich der Proportionen und Antiproportionen. An seinem von 1985 bis 1989 andauernden Projekt nahmen ca. 1.000 Schüler aus 87 sechsten bis neunten Klassen teil, die hauptsächlich aus den Schulformen Haupt- und Realschule aber auch teilweise der Orientierungsstufe, des Gymnasiums und der Berufsschule stammten. Die Schüler bearbeiteten im Laufe der Jahre verschiedene Versionen eines Tests mit Textaufgaben zum Thema proportionale und antiproportionale Zuordnungen. 1987 führte Kurth die Hauptuntersuchung des Projektes durch, an der 114 Schüler einer Osnabrücker Realschule teilnahmen. Unter dem Aspekt des „Einflusses von Unterricht auf das Lösungsverhalten“ bei diesen Aufgaben erstellte er schließlich ein Kategorisierungsschema auf Basis von Rechenmustern. [vgl. Kurth 1992, S. 311-313] Die Nachvollziehbarkeit der Fehlermuster erschließt sich über Kurths Aufgabendefinitionen und seine Erkenntnisse zu korrekten Rechenmustern. Daher erfolgt an dieser Stelle ein kleiner Exkurs hierzu, der inhaltlich in einer späteren Entwicklungsphase dieser Arbeit erneut aufgegriffen wird (vgl. insbesondere Kapitel 8.2).

In seinen Untersuchungen geht Kurth [1992, S. 317f] von der folgenden tabellarischen Anordnung der gegebenen Größen a, b, c und der gesuchten Größe x aus. Die Zuordnung der Variablen ergibt sich dabei aus der Reihenfolge, in der sie in den Aufgaben vorkommen. (G, G*) seien die beteiligten Größenbereiche:

G	G*
a	b
c	x

Bei der Aufgabenstellung [in Anlehnung an Kurth 1992, S. 318f]:

> „Bei einem Rühreirezept kommen 10 Eier auf 8 Esslöffel Milch.
> Wie viel Esslöffel Milch kommen auf 15 Eier?“

ergibt sich entsprechend der Variablenzuordnungsvorschrift (siehe Folgeseite):

a = 10, b = 8, c = 15.

G : „Eier“, G* : „Esslöffel Milch“

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten fehleranalytischen Untersuchungen betrachtet Kurth bewusst auch „erfolgreiche“ Lösungsverfahren von Schülern, die er als Ausgangspunkt zur Kategorisierung der Fehlermuster nutzt. Er unterscheidet bspw. bei proportionalen Zuordnungen zwischen drei „erfolgreichen“ Operationsmustern, auf denen schließlich die Typisierung von Fehlermustern aufbaut. Die Differenzierung der Lösungsverfahren entsteht durch die Analyse der Reihenfolge, in der die Berechnungen durchgeführt bzw. die Beziehungen zwischen den Operanden hergestellt wurden. In Tabelle 11 werden diese erfolgreichen Lösungsverfahren zusammengefasst und durch Phänomene exemplarisch erörtert. Die genannten Phänomene stellen eine Herleitung aus o. g. Aufgabenstellung dar.

Operation	**Erfolgreiches Lösungsmuster**	**Phänomen**
I-Operationen (Prop)	$c = a \cdot y \rightarrow x = y \cdot b$ Ermittlung einer multiplikativen Beziehung zw. a und c, Übertragung auf b zur Berechnung von x.	$10 : 5 = 2 \wedge 15 : 5 = 3$ $8 : 2 = 4 \rightarrow 3 \cdot 4 = 12$ oder $15 = 10 \cdot 1{,}5 \rightarrow 8 \cdot 1{,}5 = 12$
HA-Operationen (Prop, als Unterform der I-Operationen)	$a + y = c \wedge a : y = z$ $b : z = q \rightarrow b + q = x$ Ermittlung einer multiplikativen Beziehung zw. a und c, Übertragung auf b zur Berechnung von x durch „Building-Up-Methode“ [vgl. Kurth 1992, S. 318] aus Halbieren und Addieren.	$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 5 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ +\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$
Z-Operationen (Prop)	$b : a = y \rightarrow y \cdot c = x$ Ermittlung einer multiplikativen Beziehung zw. a und b, Übertragung auf c.	$8 : 10 = 0{,}8$ $\rightarrow 0{,}8 \cdot 15 = 12$
RD-Operationen (Prop)	$b \cdot c = y \rightarrow y : a = x$ Multiplikation von b und c mit anschließender Division durch a.	$8 \cdot 15 = 120$ $\rightarrow 120 : 10 = 12$

Tabelle 11: Erfolgreiche Operationsmuster zur Lösung von Aufgaben mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen in Anlehnung an Kurth [1992, S. 318f].

Bei der fehleranalytischen Betrachtung der Schülerlösungen kommt Kurth zu dem Ergebnis, dass die Operationen häufig nur unvollständig ausgeführt werden, wodurch eine Vielzahl von Fehlern entsteht. Einige nicht erfolgreiche Lösungsverfahren sind aber auch auf konkrete fehlerhafte Ausführungen der Operationen zurückzuführen, so insbesondere die falsche Reihenfolge der Operanden bei der Division. Zu diesem Ergebnis gelangte auch schon Fischbein [1985] bei seinen Untersuchungen von Textaufgaben zur Division. So werden dort häufig Divisor und Dividend verwechselt, wodurch ein falsches Teilergebnis entsteht, mit dem (häufig folgerichtig) weitergerechnet wird.

Im Sinne konkreter Fehlermuster identifiziert Kurth bei proportionalen Zuordnungen fehlerhafte Übertragungen der Zwischenergebnisse. Karplus et al. [1974], Hart [1981] und Vergnaud [1983] stellten in ihren Untersuchungen außerdem fest, dass additive Modelle entwickelt wurden: Anstatt einer multiplikativen Beziehung zwischen den Operanden (vgl. Tabelle 11) wird eine additive Beziehung angenommen, woraus fehlerhafte Zwischenergebnisse resultieren. Diese und andere Fehlermuster werden in Tabelle 12 zusammengefasst und exemplarisch an Phänomenen konkretisiert.

Fehlertyp	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
PropInversOp1	Anstatt der multiplikativen Beziehung zw. a und c Übertragung der inversen Beziehung (Division) auf b (I-Operation). $c = y : a \rightarrow x = b \cdot y$	$15 = y : 10$ $15 \cdot 10 = 150$ $\rightarrow 8 \cdot 150 = 1200$
PropInversOp2	Anstatt der multiplikativen Beziehung zw. a und b Übertragung der inversen Beziehung (Division) auf c (Z-Operation). $c = y : a \rightarrow x = b \cdot y$	$10 : 8 = 1{,}25$ $1{,}25 \cdot 15 = 18{,}75$
PropInversOp3	Annahme einer additiven anstatt multiplikativen Beziehung zwischen a und c (I-Operation). $c = a + y \rightarrow x = y + b$	$15 - 10 = 5 \rightarrow 5 + 8 = 13$
PropInversOp4	Annahme einer additiven anstatt multiplikativen Beziehung zwischen a und b (Z-Operation). $a - b = y \rightarrow y + c = x$	$10 - 8 = 2 \rightarrow 2 + 15 = 17$ oder $10 - 8 = 2 \rightarrow 15 - 2 = 13$

Tabelle 12: Fehlermuster bei proportionalen Zuordnungen in Anlehnung an Karplus et al. [1974], Hart [1981], Vergnaud [1983] und Kurth [1992].

Bei antiproportionalen Zuordnungen lassen sich nach Kurth nur zwei erfolgreiche Hauptoperationsmuster identifizieren. Analog zu den Operationen bei proportionalen Zuordnungen bezeichnet er diese als I- und Z-Operationen. Bei I-Operationen wird zunächst eine multiplikative Beziehung zwischen a und c ermittelt und die hierzu inverse Beziehung auf b übertragen. Bei Z-Operationen wird zuerst a mit b multipliziert und dann durch c dividiert. [vgl. Kurth 1992, S. 323f][24] Typische Fehlermuster bei antiproportionalen Zuordnungen zeigen sich ähnlich denen bei proportionalen Zuordnungen. Allerdings entstehen typische Fehler hier u. a. dadurch, dass erfolgreiche Operationsmuster von proportionalen Zuordnungen fälschlicherweise auf Antiproportionen übertragen werden: So wird bei den Z-Operationen anstatt korrekt $(a \cdot b) : c$ falsch $c : (a \cdot b)$ gerechnet (vgl. APropInversOp1 in Tabelle 13). Der Verständlichkeit halber werden nachfolgend Fehlerphänomene zu antiproportionalen Zuordnungen auf ein konkretes Beispiel bezogen [in Anlehnung an Beispiele von Kurth 1992, S. 324ff]:

„Ein Schwimmbecken kann von 4 parallel laufenden Pumpen in 40 Stunden geleert werden. Wie viele Stunden benötigen 20 Pumpen dazu?“ (Korrektes Ergebnis: 8 Stunden)

Daraus folgt nach o. g. Variablenzuordnungsvorschrift: a = 4, b = 40, c = 20.

---

[24] Um die Operationsbezeichnungen nachfolgend für proportionale und antiproportionale Zuordnungen klar trennen zu können, werden den Typenbezeichnungen sinngemäß die Abkürzungen „prop“ und „aprop“ zugewiesen.

Fehlertyp	Fehlermuster	Fehlerphänomene
ApropInversOp1	Falsche Reihenfolge der Divisions-operanden: $c:(a \cdot b) = x$	$20:(4 \cdot 40) = 0{,}125$ oder $40:4 = 10 \rightarrow 20:10 = 2$
ApropLin1	Unterstellung einer nicht vorhandenen Linearität oder fehlerhafte Übertragung von Linearitäten	$40 = 4 \cdot 10 \rightarrow x = 20 \cdot 10$ oder $40:4 = 10 \rightarrow x:20 = 10$
ApropInversOp2	Ermittlung Zusammenhang a und c über Differenz: $a - c = \lvert y \rvert \rightarrow a = y \cdot z \rightarrow b - \frac{b}{z} = x$	$4 - 20 = \lvert 16 \rvert$ $4 = 16 \cdot z \rightarrow 16 = 4 \cdot 4$ $\rightarrow 20 - \frac{20}{4} = 15$
ApropInvOp2	Ermittlung Zusammenhang a und c über Differenz, Differenzübertragung auf c: $a - c = \lvert y \rvert \rightarrow b - y = x$	$4 - 20 = \lvert -16 \rvert$ $\rightarrow 40 - 16 = 24$

Tabelle 13: Typische Fehlermuster bei antiproportionalen Zuordnungen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse von Suarez [1977], Hart [1981] und Kurth [1992].

Bereits Tabelle 12 zeigt Fehlermuster auf, die auf das Verwechseln von Rechenoperationen zurückgeführt werden können. Wie auch im Fall der Arithmetik und der Bruchrechnung (vgl. Kapitel 5.3.1 und 5.3.2) spielen die Verwechslung von Rechenoperationen und die Übertragung von Rechenmustern eine dominierende Rolle bei Fehlerphänomenen in algebraischen Teilgebieten. Es lässt sich feststellen, dass bspw. die Verwechslung von Operationen jedoch fast ausschließlich in einer Richtung auftreten und „eine 'höhere' Rechenoperation mit einer 'niedrigeren' verwechselt" wird [Malle 1993, S. 106]. So wird die Multiplikation irrtümlich zur Addition oder die Division zur Subtraktion. Davis, Jockusch und McKnight [1978] fassen diese Fehler unter dem Begriff der „binary confusion" zusammen und begründen diese durch eine selektive Wahrnehmung der Informationen aus Termen und Gleichungen. Dieser Erklärungsansatz lässt sich so auch auf typische Fehler in der Bruchrechnung übertragen, wenn zum Beispiel bei Brüchen in gemischter Schreibweise der ganzzahlige und der gebrochene Anteil getrennt von einander verknüpft werden oder beim Agieren mit Brüchen stets nur innerhalb der Zähler und der Nenner gearbeitet wird (vgl. Kapitel 5.3.2). Einige Beispiele dieser Fehlermuster lassen sich für andere Teilbereiche der elementaren Algebra in Anlehnung an Malle [1993, S. 166] und Davis et al. [1978] folgendermaßen zusammenfassen:

Höhere Operation	Wird zu niedrigerer Operation	Fehlermuster	Fehlerphänomen
Multiplikation	Addition	$a \cdot b \to a + b$	$4 \cdot 5 \to 9$
Division	Subtraktion	$a : b \to a - b$	$25 : 5 \to 20$
Potenzierung	Multiplikation	$a^b \to a \cdot b$	$2^3 \to 6$ oder $4^5 \to 4 \cdot 5 \to 20$

Tabelle 14: Fehlermuster und -phänomene durch Operationsaustausch.

Shevarev [1978] verfolgt einen ähnlichen Erklärungsansatz bei Fehlern im Umgang mit Potenzen. Er stellt fest, dass Schüler nur einige Merkmale einer Aufgabe wahrnehmen, dabei aber spezifische, welche die eine Aufgabe von anderen Aufgaben unterscheiden, häufig übersehen. So gelangt er zu typischen Schülerfehlern im Rahmen des Rechnens mit Potenzen, die in Tabelle 15 aufgeführt werden.

Fehlertyp	Fehlermuster / Beschreibung	Fehlerphänomen
P1[25]	$\left(a^b\right)^c \to a^{b+c}$ Addition statt Multiplikation der Exponenten	$\left(a^3\right)^5 \to a^{3+5} \to a^8$
PK1	$\frac{a^{cx} b^{dy}}{a^{iy} b^{jx}} \to \frac{a^{c\cancel{x}} b^{d\cancel{y}}}{a^{i\cancel{y}} b^{j\cancel{x}}} \to \frac{a^c b^d}{a^i b^j}$ Kürzen von Potenzen in Brüchen	$\frac{a^8\ b^9}{a^6\ b^4} \to \frac{a^2\ b^3}{a^2\ b^1}$
PP1	$\left(x^a + y^b\right)^c \to x^{ac} + y^{bc}$ Zuweisung eines Exponenten auf einzelne Summanden anstatt auf die Summe	$\left(a^2 + b^5\right)^3 \to a^6 + b^{15}$
PA1	$(a+b)^z \to a^z + b^z$ Zuweisung eines Exponenten auf einzelne Summanden anstatt auf die Summe (Spezialform von PP1 mit Exponenten 1 und 2)	$(a+b)^2 \to a^2 + b^2$

Tabelle 15: Zusammenfassung von Fehlermustern bei Potenzen [in Anlehnung an Shevarev 1978; Malle 1993; Becker 1985].

---

25 Abkürzungen zur Systematisierung im Rahmen dieser Arbeit.

Insbesondere beim Umformen von Bruchtermen wird deutlich, dass die verschiedenen Teilbereiche der Algebra eng miteinander verzahnt sind. Daher können in Termen die vier Grundrechenarten, Brüche, Potenzen, Wurzeln und Variablen in verschiedener Form miteinander verknüpft auftreten. Dementsprechend lassen sich beim Umformen von Termen typische Fehler aus der Bruchrechnung wiederfinden, wie das Kürzen aus Summen oder der dominante Fehler PK1 aus der Potenzrechnung (vgl. Tabelle 15). So ist es häufig gar nicht das Termumformen an sich, welches Probleme bereitet. Fehler können nicht selten auf einzelne Elemente aus den Termen reduziert werden, wie z. B. das fehlerhafte Umwandeln eines Bruches im Term oder die Missachtung von Rechengesetzen aus der Arithmetik. Gleiches gilt für das Lösen von Gleichungen verschiedener Art. Das fehlerhafte Auflösen einer Wurzel innerhalb eines Terms führt zu einem fehlerhaften Ergebnis. Tabelle 16 fasst solche elementaren Fehler zusammen.

<table>
<tr><th>Fehlertyp</th><th>Fehlermuster</th><th>Fehlerphänomen</th></tr>
<tr><td>WA1</td><td>$\sqrt{a+b} \to \sqrt{a} + \sqrt{b}$</td><td>$\sqrt{x+y} \to \sqrt{x} + \sqrt{y}$</td></tr>
<tr><td>PA1</td><td>$(a+b)^2 \to a^2 + b^2$</td><td>$(g+f)^2 \to g^2 + f^2$</td></tr>
<tr><td>besZahl1</td><td>$a \cdot 0 \to a$</td><td>$x \cdot 0 \to x$</td></tr>
<tr><td>besZahl2</td><td>$a + 1 \to a$</td><td>$x + 1 \to x$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">besZahl3</td><td>$a \cdot \frac{1}{a} \to a$</td><td>$x \cdot \frac{1}{x} \to x$ oder $3 \cdot \frac{1}{3} \to 3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ähnlich UN3 in Bruchrechnung (vgl. Tabelle 6)</td></tr>
</table>

Tabelle 16: Elementare Fehlermuster der Algebra. Zusammenfassung der Ergebnisse von Matz [1980], Becker [1985] und Malle [1993].

Becker [1985] stellte fest, dass viele Fehlermuster auch auf Übergeneralisierungen zurückzuführen sind. Dies trifft zum einen schon auf die in Tabelle 16 vorgestellten Fehler zu, begründet zum anderen aber auch typische Fehlermuster beim Umgang mit binomischen Formeln (vgl. Tabelle 17) oder anderen Gleichungen (vgl. Tabelle 18). J. Tietze und auch Malle stellten Übergeneralisierungsfehler insbesondere bei der Anwendung von Rechengesetzen fest: So werden das Assoziativ- und das Distributivgesetz häufig vertauscht oder die Voraussetzungen für die Anwendung vergessen [vgl. Malle 1993, S. 160; Tietze J. 2007, S. 10ff].

Bezeichnung	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
Bin1	$(a-b)^2 \rightarrow a^2 - 2ab - b^2$	$(m-n)^2 \rightarrow m^2 - 2mn - n^2$
Bin2	$(a \cdot b)^2 \rightarrow a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$	$(m \cdot n)^2 \rightarrow m^2 \cdot 2mn \cdot n^2$

Tabelle 17: Fehlermuster in binomischen Formeln. Zusammenfassung der Ergebnisse von Becker [1985] und Malle [1993].

Bezeichnung	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
Lin1	$(x-a)\cdot(x-b)=c \quad \vert c \neq 0$ $\rightarrow (x-a)=c \;\wedge\; (x-b)=c$	$(x-8)\cdot(x-12)=23$ $\rightarrow (x-8)=23 \;\wedge\; (x-12)=23$
Üdistr1	$a\cdot(b\cdot c)\rightarrow(a\cdot b)\cdot(a\cdot c)$	$m\cdot(n\cdot o)\rightarrow(m\cdot n)\cdot(m\cdot o)$
LinB1	$\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{b}\rightarrow a=x+b$	$\frac{1}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{8}\rightarrow 5=x+8$
LinW1	$\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow a+b$	$\sqrt{10^2+33^2}\rightarrow 10+33$
Üdistr2	$a+(b+c)\rightarrow a+b+a+c$	$x+(2x+3)\rightarrow x+2x+x+3$

Tabelle 18: Weitere Fehlermuster der Algebra durch Übergeneralisierung. Zusammenfassung der Ergebnisse von Matz [1980; 1982], Malle [1993], Tietze J. [2007].

Das falsche Auflösen von Klammern ist eine weitere Komponente, die sich in verschiedenen Ausprägungen zeigt. Hiezu gehören die Nichtbeachtung der Punkt-vor-Strich-Regeln sowie eine Nichtbeachtung der Reihenfolge bei mehrfach verschachtelten Klammern oder die Missachtung des Vorzeichenwechsels durch ein Minus vor einer Klammer mit Summanden [vgl. Tietze J. 2007, S. 18ff].

5.4 Fazit und Schlussfolgerung

Insgesamt zeigt sich in allen hier vorgestellten Untersuchungen zu verschiedenen mathematischen Themenbereichen, dass typische Fehler in jedem der vorgestellten mathematischen Bereiche identifiziert werden können und sich außerdem teilweise auch themenbereichsübergreifende Ähnlichkeiten zeigen. Hierunter fallen z. B. die Perseverationsfehler, das Verwechseln von Operationen oder Übergeneralisierungen. Im Hinblick auf diese Ähnlichkeiten und weitere ableitbare Verknüpfungen zwischen mathematischen Themenbereichen und typischen Fehlern werde ich in den Analysen und insbesondere dem Entwicklungsteil dieser Arbeit diese Aspekte wieder aufgreifen und entsprechend meiner Zielsetzungen Erkenntnisse und Methoden adaptieren.

TEIL III METHODISCHES RAHMENWERK

6 Darstellung und Begründung des Entwicklungskonzepts

6.1 Methoden der diagnostischen Forschung

Die Methoden zur diagnostischen Forschung werden in erster Linie – analog zu Methoden in der Unterrichtsforschung [vgl. Voigt 1997; Schoy-Lutz 2005] wie auch der allgemeinen Human- und Sozialforschung [vgl. Bortz, Döring 2006; Schnell et al. 2008] – in *quantitative und qualitative Forschung* differenziert. Der grundlegende Unterschied zwischen diesen beiden Methodenansätzen wird zum einen anhand der jeweils spezifischen Formen der Erhebung und zum anderen durch den unterschiedlichen Umgang mit den gewonnenen Daten charakterisiert. Des Weiteren werden die gewonnenen Daten in *quantitative und qualitative Daten* unterschieden, wobei durch qualitative Erhebungsverfahren durchaus auch quantitative Daten erfasst oder qualitative Daten quantitativ analysiert werden können. Letztlich wird zwischen den Formen der *Datenerhebung*, der *Datenanalyse* und der *Daten an sich* unterschieden.

Entgegen älterer methodologischer Auffassungen gelten qualitative und quantitative Forschungsansätze nicht mehr als unvereinbar. Als Synonym für die Realisierung von Forschungen, die quantitative und qualitative Methoden erfolgreich miteinander verknüpfen, steht der Begriff der *Triangulation* [vgl. u. a. Flick 2008]. Auch im Projekt Mathe-Meister und in dieser Arbeit werden Formen von Triangulationen verwendet. Ich werde dieses Kapitel mit einer theoretischen Aufarbeitung dieser Theorie abrunden und Aspekte daraus in den darauf folgenden Kapiteln insbesondere bei den Erörterungen des Untersuchungsdesigns für diese Arbeit konkretisieren.

Der Begriff der Aufgabenanalysen wurde bereits mehrfach erwähnt und stellt eine leitende Methode dieser Arbeit dar. Daher erfolgt in diesem Kapitel ebenfalls eine theoretische Aufarbeitung unterschiedlicher Ansätze aus Aufgabenanalysen.

6.1.1 Quantitative und qualitative Forschungsmethoden

Fehleranalysen im Speziellen und diagnostische Untersuchungen im Allgemeinen sind bisher vorrangig geprägt durch qualitative Erhebungs- und Auswertungsverfahren. Dies trifft insbesondere auf diagnostische Untersuchungen zur Ursachenforschung individueller Lösungsphänomene zu (vgl. Kapitel 5.1). Bei fehlerkategorisierenden Untersuchungen herrscht die Verwendung quantitativer Methoden vor, die durch die Anwendung qualitativer Methoden und genauso umgekehrt ergänzt werden. Ebenso werden zur Validierung bzw. Generalisierung qualitativer Ergebnisse häufig quantitative Methoden herangezogen.

„Ein erstes Unterscheidungsmerkmal zwischen qualitativer und quantitativer Forschung ist die Art des verwendeten Datenmaterials: Während in der qualitativen Forschung Erfahrungsrealität zunächst verbalisiert wird (qualitative, verbale Daten), wird sie im quantitativen Ansatz numerisch beschrieben.“ [Bortz, Döring 2006, S. 296]. Quantitativ orientierte Forschungsansätze sind in der Regel streng theorie- und hypothesengeleitet. Es steht die Frage im Vordergrund, wie die zur Beantwortung der Forschungsfragen zu erhebenden Merkmale operationalisiert bzw. quantifiziert werden sollen. Dabei werden vorrangig mittels schriftlicher Befragungen, aber auch quantitativer Interviews auf Basis einer möglichst großen, repräsentativen Stichprobe die zahlenmäßigen Ausprägungen der Merkmale gemessen und miteinander oder mit anderen Variablen in Beziehung gesetzt. Die dadurch gewonnenen Ergebnisse werden für die durch die Stichprobe repräsentierte Grundgesamtheit generalisiert oder es werden damit Hypothesen bestätigt. Im Rahmen der fehleranalytischen Forschung werden in den meisten Fällen standardisierte Testbögen verwendet, dies zeigt sich bspw. auch bei der Mehrzahl der in Kapitel 5.3 aufgeführten Untersuchungen. Außerdem wird bei quantitativen Ansätzen ein besonderes Augenmerk auf die Repräsentativität der Erhebung gelegt. [vgl. Bortz, Döring 2006, S. 137-294]

„In der qualitativen Forschung werden verbale bzw. nicht numerische Daten interpretativ verarbeitet.“ [Bortz, Döring 2006, S. 298] Die vorherrschenden Erhebungsverfahren qualitativer Untersuchungen sind Befragungen und Beobachtungen. Befragungen können hierbei z. B. auch über standardisierte

Fragebögen erfolgen, finden in der Regel aber über Interviews statt. Qualitative Befragungs- und Beobachtungsformen arbeiten mit offenen Fragen und es wird den Befragten viel Spielraum bei der Beantwortung oder Reaktion auf die Fragen und Aufgabenstellungen gelassen. Zusätzlich werden bei der Auswertung von Interviews in qualitativen Analyseansätzen die Interaktionen von Interviewer und Befragtem sowie die persönliche Wahrnehmung des Interviewers berücksichtigt. Die anschließende Transkriptionsform all dieser Aspekte hängt dann vor allem von den Fragestellungen und der dafür gewählten Analyseform ab. Sowohl bei Befragungen als auch und vor allem bei Beobachtungen gibt es so genannte non-reaktive Verfahren, bei denen während des Erhebungsprozesses in keiner Form Einfluss auf die untersuchten Personen, Ereignisse oder Prozesse ausgeübt wird und so der Ausprägung der Probanden die maximale Freiheit seitens der Beobachter gewährt wird. [vgl. Bortz, Döring 2006, S. 295-350; Schnell et al. 2008, S. 319-419]

6.1.2 Quantitative und qualitative Daten

Die Unterscheidung des Datenformats in quantitative und qualitative Daten erfolgt u. a. anhand der Frage, ob es sich um numerische, d. h. in Zahlen transformierte, quantitative Daten handelt, oder um nichtnumerische, verbale Daten. Eine andere Grundlage für die Differenzierung zwischen quantitativen und qualitativen Daten basiert nicht primär auf der numerischen Ausprägung, sondern macht die Unterscheidung am Skalenniveau der Daten fest. „Die für den quantitativen Ansatz typische Quantifizierung bzw. Messung von Ausschnitten der Beobachtungsrealität mündet in die statistische Verarbeitung von Messwerten. Demgegenüber operiert der qualitative Ansatz mit Verbalisierungen (oder anderen nichtnumerischen Symbolisierungen, z. B. grafischen Abbildungen) der Erfahrungswirklichkeit, die interpretativ ausgewertet werden […]. Quantifizierungen werden allenfalls eingeführt, um den Grad der Übereinstimmung unterschiedlicher Deutungen zu messen.“ [Bortz, Döring 2006, S. 296] Qualitative Daten sind vor allem textueller Form wie z. B. Beobachtungsprotokolle, Interviewtexte oder Briefe. Ebenso zählen auch Fotografien, Bilder, Zeichnungen, Filme oder andere Objekte zu qualitativen Datenformen.

6.1.3 Triangulation

Der Begriff der Triangulation wird vor allem in der qualitativen Forschung seit Jahrzehnten benutzt. Dabei wird er zum einen im Zusammenhang mit der Güte qualitativer Untersuchungen, „[…] aber auch im Kontext der Verknüpfung von qualitativer und quantitativer Forschung diskutiert“ [Flick 2008, S. 7]. „Vereinfacht ausgedrückt bezeichnet der Begriff der Triangulation, dass ein Forschungsgegenstand von (mindestens) zwei Punkten aus betrachtet – oder konstruktivistisch formuliert: konstituiert – wird. In der Regel wird die Betrachtung von zwei oder mehr Punkten aus durch die Verwendung verschiedener methodischer Zugänge realisiert […]“ [Flick 2008, S. 11]. Glaser und Strauss [1967] bezeichnen aber auch die Verwendung verschiedener Datentypen als Triangulation und empfehlen dieses Vorgehen als Möglichkeit eines differenzierten Blickwinkels: „Different kinds of data give the analyst different views or vantage points from which to understand a category and to develop meine properties […]“ [Glaser, Strauss 1967, S. 65].

Der Terminus „Triangulation“ stammt ursprünglich aus der Landvermessung, in der die Triangulation eine ökonomische Methode zur Lokalisation von Positionen auf der Erdoberfläche darstellt. Noch heute wird diese Technik des Ausmessens eines Ortes von mindestens zwei, in der Regel drei Standpunkten aus verwendet.

Aus Sicht dieser Begriffsauffassungen sowohl im Bereich der Landvermessung als auch und vor allem in der (qualitativen) Forschung kann der Terminus der Triangulation entsprechend übertragen werden – dies gilt sowohl für die Methoden und Daten als auch für die Inhalte und wissenschaftlichen Persektiven, von denen aus ein Forschungsgegenstand betrachtet wird. Es wird daher in Anlehnung an Flick [2008] sowie Glaser und Strauss [1967] der Begriff der Triangulation für diese Arbeit wie folgt definiert:

- *Triangulation*: „Triangulation beinhaltet die Einnahme unterschiedlicher Perspektiven auf einen Untersuchungsgegenstand oder allgemeiner: bei der Beantwortung der Forschungsfrage. Diese Perspektiven können sich in unterschiedlichen Methoden, die angewandt werden, und/oder unterschiedlich gewählten theoretischen Zugängen konkretisieren, wobei beides wiederum mit einander in Zusammenhang steht bzw. verknüpft werden sollte. Weiterhin bezieht sie sich auf die Kombination unterschiedlicher Datensorten jeweils vor dem Hintergrund der auf die Daten jeweils eingenommenen theoretischen Perspektiven. […] Durch die Triangulation […] sollte ein prinzipieller Erkenntniszuwachs möglich sein, dass also bspw. Erkenntnisse auf unterschiedlichen Ebenen gewonnen werden, die damit weiter reichen, als es mit einem Zugang möglich wäre.“ [Flick 2008, S. 12]

6.1.4 Rationale und empirische Aufgabenanalysen

Einen zentralen Bestandteil bei der Auswahl sowie der Entwicklung von Aufgaben bildet die Aufgabenanalyse. In der didaktischen Forschung wird hier in der Regel zwischen rationalen und empirischen Aufgabenanalysen unterschieden. Rationale Aufgabenanalysen bauen auf normativen Erwartungen an idealtypische Lösungsverfahren und -muster auf. Für empirische Aufgabenanalysen hingegen werden durch empirische Erhebungen tatsächlich beobachtbare Lösungswege genutzt. In dieser Arbeit werden in Anlehnung an Bromme, Seeger und Steinbrink diese Definitionen übernommen [vgl. Bromme et al. 1990, S. 4f].

Alle Aufgabenanalyseformen kommen auch hinsichtlich der Untersuchung typischer Fehlermuster im Rahmen diagnostischer Forschung zum Einsatz. Hier wird insbesondere im Rahmen mathematikdidaktischer Forschungen die psychologische Aufgabenanalyse zumeist als Bestandteil der rationalen Aufgabenanalyse eingesetzt [vgl. Hoffart 2008 und 2009; Winter 2008]. Mögliche idealtypische, korrekte wie fehlerhafte Lösungsansätze und -verfahren werden im Rahmen rationaler Aufgabenanalysen aufgestellt durch Analysen des benötigten mathematischen Wissens, der Vorstellungen und Fähigkeiten, die zur korrekten Lösung einer Aufgabe notwendig sind. Hinsichtlich der Fehleranalyse werden Kenntnisse über potentielle Fehlvorstellungen und typische Fehlermuster genutzt und die „traditionelle“ Form der Aufgabenanalyse dementsprechend adaptiert, die nach Bromme et al. ursprünglich zum Ziel hat, „unter einer pädagogischen oder didaktischen Perspektive die ideale Performanz eines mittleren, idealen Aufgabenlösers [zu rekonstruieren]“ [Bromme et al 1990, S. 6]. Hinsichtlich der Fehleranalyse wird in dieser Arbeit der typische „nicht ideale Aufgabenlöser“ hinzugenommen. Exemplarisch werden die dafür genutzten Methoden der Aufgabenanalyse an konkreten Beispielen zur Aufgabenentwicklung in Kapitel 7.2.2 detailliert erörtert.

Die Ansätze empirischer und rationaler Aufgabenanalysen stützen sich gegenseitig. Im Rahmen der Ausführungen zum Untersuchungsdesign dieser Arbeit wird dieser Aspekt als eine Art „Wechselspiel“ zwischen diesen beiden Ansätzen ersichtlich (vgl. Kapitel 6.37).

6.2 Ausgangssituation und Forschungsdesiderata

Zur Ermittlung der Ausgangssituation hinsichtlich bestehender internetbasierte Mathematik-Self-Assessments wurde analysiert, inwieweit diese fehlerdiagnostische Rückmeldungen an den Nutzer geben (vgl. Kapitel 4). Aus den Analysen der Antwortvorgaben der verschiedenen Online-Tests lässt sich abschließend schlussfolgern, dass diese sich nicht an fehleranalytischen Untersuchungen und Erkenntnissen (vgl. Kapitel 5.3ff) orientieren. Auch seitens der Testentwickler, Autoren oder Herausgeber gibt es diesbezüglich keine Angaben, die dieser Vermutung widersprechen würden. Es handelt sich nicht oder nur bei einzelnen Antwortvorgaben um typische (korrekte oder) fehlerhafte Ergebnisse, die auf bekannte oder hypothetisch ableitbare Fehlermuster[26] zurückgeführt werden können (vgl. bspw. Abbildung 13).

Die vorhergehenden Analysen internetbasierter Selbsttestportale zu mathematischen Inhalten weisen insgesamt betrachtet verschiedene Defizite auf:

- Für die gestellten Aufgaben in ihrer Summe erfolgt seitens der Autoren kein Nachweis über die Repräsentativität der Testitems für die jeweiligen Themengebiete. Wie die Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen werden, können an der Repräsentativität der Aufgaben erhebliche Zweifel angemerkt werden.

[26] Unter Fehlermustern werden fehlerhafte Lösungen betrachtet, die sich auf ein Muster zurückführen lassen. Typische Fehlermuster sind solche, die bei einem Aufgabentyp interpersonell häufiger auftreten. Die Definitionen und Erörterungen hierzu erfolgen ausführlich in Kapitel 5.2.

- Die Rückmeldung zu den erlangten Testergebnissen geben häufig keinerlei Auskunft über die Themengebiete, in denen Defizite vorliegen, so dass die Probanden auf Basis der Testaufgaben über andere Wege herausfinden müssen, zu welchen Themengebieten die einzelnen Aufgaben zählen.
- Die Einbindung offener Antwortformate verfälscht in vielen Fällen die Testergebnisse durch nicht berücksichtigte Nutzereingaben, wie z. B. die Eingabe oder das Weglassen von Leerzeichen und Einheitssymbolen. Aufgrund dessen werden inhaltlich korrekte Antworten häufig als „falsch“ gewertet.
- Die Antwortvorgaben und Antwortmöglichkeiten insbesondere bei gebundenen Antwortformaten erfassen nur bei vereinzelten Aufgaben einiger Portale die Ergebnisse fehleranalytischer Forschungen und haben kein oder ein sehr geringes diagnostisches Potential.
- Ggf. theoretisch vorhandenes diagnostisches Potential wird nicht genutzt. Eine fehleranalytische Auswertung der Ergebnisse geht über eine dichotome Auswertung nach falsch und richtig nicht hinaus.

Die Beispiele aus Kapitel 4 zum theoretischen diagnostischen Potential von Distraktoren verdeutlichen, dass schon eine rationale Aufgabenanalyse unter Einbezug bestehender Erkenntnisse fehleranalytischer Forschung eine Konstruktion typischer Antwortvorgaben ermöglicht. Obwohl solches also möglich wäre, lässt sich eine Fehleranalyse in internetbasierten Testumgebungen zur Mathematik zum Zeitpunkt des Projektstarts aber auch bei den Recherchen während des laufenden Projekts nicht finden. So wurde im Verlauf der Erstellung dieser Arbeit der Markt der internetbasierten Mathematiktests weiterhin beobachtet. Es erschienen laufend neue, kurze Tests mit in der Regel fünf bis zehn Aufgaben bspw. von Zeitungen im Rahmen der Veröffentlichung von Presseartikeln. Im kostenpflichtigen Bereich schaltete die Verlagsgemeinschaft Schroedel, Westermann, Diesterweg verschiedene Online-Diagnosen für einige Klassenstufen (5, 7, 9) frei [vgl. Schroedel et al. 2010]. Die dortigen Tests sind als Unterstützung für die Hand des Lehrenden konzipiert und nicht als Selbsttests gedacht.

Die Testauswertung ist nur den Lehrenden vorbehalten und sowohl bei den Aufgabenstellungen hinsichtlich der Antwortformate bzw. -vorgaben als auch bei den Auswertungen zeigt sich, dass auch hier keine tiefgründige Fehleranalyse erfolgt oder sich dahinter verbirgt.[27]

Die im vorhergehenden Kapitel 5 detailliert erörterten Analysen bestehender Untersuchungen zur Fehleranalyse aus Psychologie und Mathematikdidaktik (vgl. insbesondere Kapitel 5.3) machen deutlich, dass die Schwerpunkte in diesem Bereich auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt auf den schriftlichen Rechenverfahren und dem Rechnen mit gemeinen und Dezimalbrüchen liegen [vgl. auch Wittmann 2007, S. 175]. Die vereinzelten Veröffentlichungen zur kategorisierenden Fehleranalyse mit dem Augenmerk auf anderen mathematischen Bereichen, wie z. B. der Algebra [Malle 1983, 1986, 1993; Tietze 1987, 1988] bilden zwar eine Grundlage für weitere Untersuchungen, lassen jedoch noch viele Fragen unbeantwortet. So fehlt es an fehlerkategorisierenden Untersuchungsergebnissen bspw. im Bereich der Geometrie und in vielen Teilbereichen der Algebra; bei letzteren u. a. zu linearen Gleichungssystemen, ebenso zu grundlegenden Aspekten wie Termumformungen.

Eine derzeit offene Frage gilt der Entwicklung von Antwortalternativen mit diagnostischem Potential in internetbasierten Multiple-Choice-Selbst-Tests. Dieser Fragestellung widme ich mich im Rahmen der Entwicklung des Testdesigns ebenfalls in dieser Arbeit.

Meiner Untersuchung und Entwicklung liegen verschiedene leitende Hypothesen zugrunde:

I. In den verschiedenen mathematischen Themengebieten treten jeweils Fehler auf, die sich in bestimmter Form charakterisieren, clustern und teilweise sogar in algebraischen, ausschließlich computergestützt auswertbaren Ausdrücken als „Fehlermuster“ darstellen lassen.

[27] Ein kostenloses Demovideo und eine Anleitung zeigen die Funktionen und Ziele des Tests: vgl. http://www.westermann.de/diagnose_neu/mathematik_diagnose.xtp.

II. Solche Fehlermuster treten in den verschiedenen mathematischen Bereichen wiederholt auf. Aufgrund der Erkenntnisse aus bestehenden mathematikdidaktischen und psychologischen Untersuchungen zur Fehleranalyse können für fehleranalytisch noch unerforschte Themengebiete und konkrete Aufgabenkonstruktionen charakteristische Fehlermuster antizipiert werden.

III. Mit Hilfe solcher Fehlermuster (und antizipierter korrekter Lösungsmuster) können Multiple-Choice-Testverfahren generiert werden, die tiefergehende diagnostische Aussagen ermöglichen.

IV. Multiple-Choice-Formate bergen prinzipiell eine hohe Ratewahrscheinlichkeit hinsichtlich der Antwortauswahl. Diese wird zum einen im konkreten Fall der Einbindung in Self-Assessments gesenkt, weil davon ausgegangen werden kann, dass Personen, die sich auf freiwilliger Basis eigenständig dazu entscheiden, ihre eigenen Kompetenzen zu testen, nicht daran interessiert sind, sich selbst zu täuschen. Zum anderen wird eine Modifizierung des klassischen Multiple-Choice-Test hinsichtlich der Anzeige der Antwortalternativen die Ratewahrscheinlichkeit nochmals mindern. Außerdem führt die Analyse des diagnostischen Potentials bei der Auswahl der Distraktoren dazu, die Ratewahrscheinlichkeit zusätzlich zu reduzieren, was auch Lind und Knoche [2004] bestätigen.

6.3 Entwicklungskonzept und Untersuchungsdesign

Die Entwicklung konkreter Distraktoren mit diagnostischem Potential für gebundene Antwortformate bildet das Hauptziel dieser Arbeit und stellt sogleich auch die letzte Stufe des Entwicklungs- und Untersuchungskonzeptes dar. Ich werde zeigen, dass zur Erreichung dieses Ziels eine Kombination diverser Forschungsmethoden, Datenformate und Inhaltsaspekte sinnvoll ist, wodurch letztlich auf verschiedenen Ebenen eine Triangulation stattfindet.

Nachfolgend werden die Aspekte des für diese Arbeit entwickelten Untersuchungsdesigns einzeln erörtert und anschließend in Form eines Entwicklungskonzepts zusammengeführt. Vorab werde ich kurz auf die Zusammenhänge mit der Projektstruktur und den darin verankerten Aufgabenpaketen zurückgreifen, um die Einordnung nachfolgend erörterter methodischer Aspekte und Zusammenhänge mit dem Projekt Mathe-Meister zu ermöglichen.

6.3.1 Zusammenhänge mit der Projektstruktur

Die Zielsetzungen und Arbeitspakete des Gesamtprojektes Mathe-Meister wurden bereits in Kapitel 2.1 dargestellt und erläutert. Die dort in Abbildung 1 aufgeführten Arbeitspakete und Aufgaben laufen innerhalb des Projektes Mathe-Meister eng verzahnt und häufig parallel ab. Und auch die Zielsetzung dieser Arbeit führt zu einer Verknüpfung und Einbindung an unterschiedlichen Stellen des Gesamtprojektes. Die Aspekte dieser Arbeit verteilen sich vorrangig über die ersten vier Arbeitspakete des Gesamtprojekts. In Abbildung 14 wird dies nochmals verdeutlicht. Der Schwerpunkt meiner Arbeit liegt dabei auf dem Beratungspaket. Die Konzeption des zu entwickelnden Beratungspaketes umfasst zum einen die Entwicklung eines Testdesigns für die digitale Testumgebung. Hier ist im Rahmen dieser Arbeit die vorgenommene Modifikation des klassischen Multiple-Choice-Verfahrens relevant. Zum anderen beinhaltet diese Konzeption die Entwicklung diagnostisch aussagekräftiger Antwortalternativen. Hierauf liegt das Hauptaugenmerk dieser Arbeit.

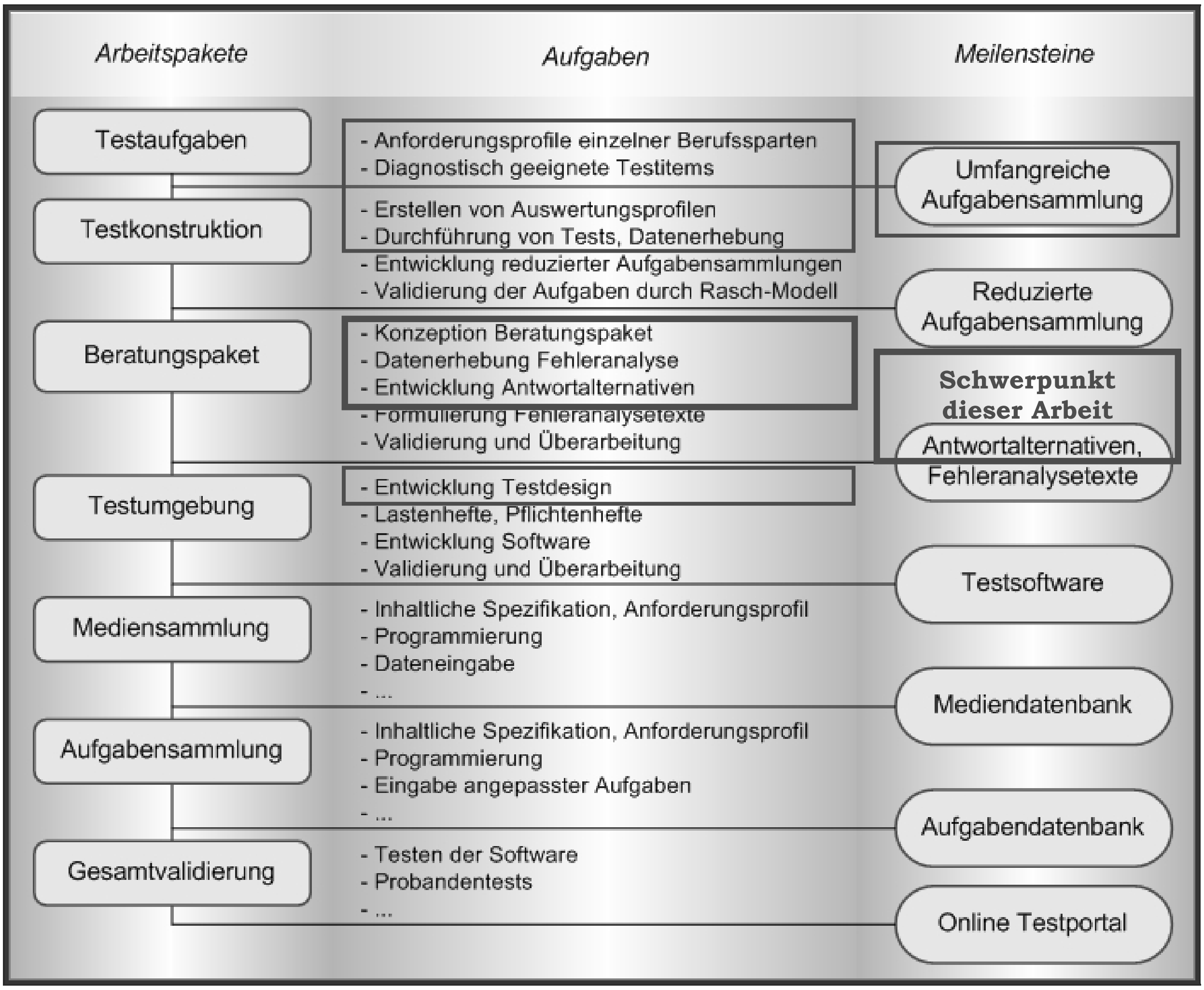


Abbildung 14: Arbeitspakete, Aufgaben und Teilziele (Meilensteine) im Gesamtprojekt Mathe-Meister, Kennzeichnung der im Rahmen dieser Arbeit eingebundenen Bereiche sowie des Schwerpunktes der Arbeit [in Anlehnung an Stein et al. 2010].

6.3.2 Methodische Vorüberlegungen und Grundentscheidungen

Wie schon in den ersten Kapiteln vorgestellt, gibt es im Bereich der fehleranalytischen Untersuchungen zu verschiedenen mathematischen Themenbereichen die übergreifende Erkenntnis, dass viele der am häufigsten auftretenden Fehler einem Muster folgen und dadurch kategorisiert werden können. „Bei näherer Betrachtung der Art der Schülerfehler beim schriftlichen Rechnen stellt man fest, dass die meisten Schülerfehler – entgegen einer verbreiteten Klischeevorstellung – *nicht Flüchtigkeitsfehler* sind (bedingt etwa durch Unlust, Unaufmerksamkeit, Müdigkeit). Vielmehr zeigen etwa 80 % der Schülerfehler beim schriftlichen Rechnen eine bestimmte ‚Regelstruktur'." [Gerster 1982, S. 14, Hervorhebungen dort]. Hart [1981], Padberg [1986; 2002] und andere kategorisierten z. B. im Bereich der Bruchrechnung ebenfalls so genannte typische Fehlermuster.

Der grundlegende Gedanke für die Entwicklung konkreter Aufgaben und Antwortalternativen in gebundenem Antwortformat ist, die Auswahlvorgaben der Antworten so zu gestalten, dass eine Auswertung ist eindeutig möglich ist. Zusätzlich soll auf Basis der ausgewählten Antwort(en) möglichst eine Diagnose erfolgen können, die über die Aussage „falsch-richtig" hinausgeht und potentielle Fehlermuster aufzeigt.

Um dies zu erreichen, soll die Anzeige von Antwortauswahlen auf den typischen korrekten wie fehlerhaften Lösungsmustern zum jeweiligen Aufgabentyp aufbauen. Damit dies möglich ist, müssen derartige Muster für verschiedene Bereiche der Schulmathematik entsprechend der Bestimmung der Anforderungsprofile zu jeder Indikatoraufgabe[28] für das Test-Portal Mathe-Meister ermittelt bzw. entwickelt werden. Darunter fallen u. a. die Anforderungsprofile

- Rechnen mit und Umwandeln von Einheiten
- Rechnen mit Potenzen
- Rechnen mit Brüchen (in verschiedenen Schreibweisen)
- Rechnen mit Variablen
- Lineare Gleichungen
- Termumformungen
- Quadratische Terme
- Gleichungen
- Satz des Pythagoras

Die in Kapitel 5.3 zusammengeführten Ergebnisse bestehender Untersuchungen zu Lösungsmustern zeigen im Vergleich mit den vorab aufgeführten Anforderungsprofilen, dass bisher nicht alle für das Projekt Mathe-Meister notwendigen Themen bzw. Aufgabentypen in dieser Hinsicht untersucht wurden. Im Rahmen dieser Arbeit wird diesbezüglich die für die Entwicklung notwendige Vollständigkeit hergestellt und solche Fehlermuster durch eine breit angelegte Empirie ermittelt bzw. entwickelt.

---

[28] Die Basis zur Ermittlung der nachfolgend aufgeführten Themen von Indikatoraufgaben bzw. die Indikatoraufgabenauswahl an sich wird in Kapitel 7.1 und 7.2 aufgezeigt.

Grundlegende Arbeitshypothese dieser Arbeit

Meiner Meinung nach lassen sich viele der dargestellten Erkenntnisse im Rahmen rationaler und psychologischer Aufgabenanalysen hypothetisch auf andere mathematische Bereiche und Aufgaben transferieren. So lässt sich bspw. die Theorie der „binary confusion“ von Davis, Jockusch und McKnight [1978], die besagt, dass Schüler Aufgabenmerkmale nur selektiv wahrnehmen, nicht nur bei Fehlermustern in der Bruchrechnung wiederfinden (vgl. Kapitel 5.3.2), sondern kann als Theorie auch auf andere Bereiche übertragen werden. Ebenso stellt Shevarev [1978] das gleiche Phänomen auch bei der separaten Betrachtung des Rechnens mit Potenzen fest (vgl. Kapitel 5.3.3).

Außerhalb der in den vorhergehenden Kapiteln konkretisierten mathematischen Themenbereiche ließ sich zum Zeitpunkt der Recherchen allerdings keine Veröffentlichung finden, die diesen Theorieansatz vertiefend verfolgt und damit die bestehenden Erkenntnisse der Fehlerdiagnostik mittels der Methoden der Aufgabenanalysen auf andere mathematische Themen- und Aufgabentypen zu übertragen. Die Methoden der Aufgabenanalyse ermöglichen meines Erachtens ebenso die Evaluation. Ich werde in der hier vorliegenden Arbeit diese Hypothese verfolgen und die Erkenntnisse im Bereich der Fehleranalyse mittels der Methoden der rationalen und empirischen Aufgabenanalysen auch auf andere mathematische Kernbereiche transferieren. Dazu werden neue fehleranalytische Untersuchungen für die projektrelevanten mathematischen Themenbereiche geschaffen und bestehende Erkenntnisse erweitert und vertieft. Mit diesen neu gewonnenen Ergebnissen und Methoden können künftig typische Fehlermuster bei der Entwicklung der Antwortvorgaben innerhalb eines internetbasierte Selbsttests berücksichtigt bzw. konstruiert werden. So entsteht ein diagnostisches Potential und für das Mathe-Meister-Portal auch eine konkrete Umsetzungsidee zur Nutzung dieses Potentials.

6.3.3 Entscheidungsaspekte für das zu nutzende Antwortformat

Freie Antwortformate sind für diagnostische Tests am besten geeignet, da sie ein besonders hohes Diagnosepotential bieten [vgl. u. a. Winter 2008; Sill, Sikora 2007; Lienert, Raatz 2007]. Sie bringen aber auch den Nachteil mit sich, dass der Auswertungsaufwand sehr hoch und eine objektive Bewertung sehr schwierig ist. Des Weiteren erfordert der Einsatz freier Antwortformate in einem computerbasierten System einen Formeleditor, der die Eingabe beliebiger mathematischer Ausdrucksweisen und -formen ermöglicht. Die Bedienung eines solchen Editors könnte für die Nutzer in Abhängigkeit vom individuellen Kenntnisstand stark unterschiedliche Bedienungsschwierigkeiten mit sich bringen. Die freien Eingaben der Benutzer müssten computerbasiert (automatisiert) im gesetzten Zeitrahmen diagnostisch auswertbar sein, was sowohl von der technischen Leistungsfähigkeit bei einer internetbasierten Umgebung als auch seitens der inhaltlichen Konzeption kaum möglich ist. So zeigen schon Untersuchungen zu Kalkülaufgaben in der Bruchrechnung, wie komplex die Möglichkeiten unterschiedlicher Rechenwegnotationen von Probanden sein können. Im Rahmen der Untersuchungen eines Projektes zur Rechenweganalyse in der Bruchrechnung habe ich bspw. zu einer einzigen Aufgabe 3.200 unterschiedliche Rechenwege erfasst [vgl. u. a. Winter 2009]. Diese Rechenwegalternativen müssten theoretisch alle durch das System für die Auswertung beachtet werden. Schon in diesem eingeschränkten Themenbereich zeigt sich demnach das bisher ungelöste Problem, *alle* Notationsformen technisch und inhaltlich automatisiert und eindeutig auszuwerten. Selbst wenn dieses möglich wäre, müsste mit längeren Auswertungszeiten und dementsprechend längeren Reaktionszeiten des Systems gerechnet werden. Auch sind die Eingaben und Auswertungen offener Antwortformate sehr fehleranfällig, wie sich bspw. in Kapitel 4.3 beim Portal von karriere.de zeigt, wo bereits ein zu viel oder zu wenig angegebenes Leerzeichen eine inhaltlich fehlerhafte Auswertung zur Folge hat. Diese und alle anderen theoretisch möglichen Eingaben müssten im System implementiert sein und dementsprechend abgerufen werden können.

Gebundene Antwortformate weisen ebenfalls Vor- und Nachteile auf, die abzuwägen sind. So sind die Ergebnisse eindeutig erfassbar, wodurch eine objektive Auswertung ermöglicht wird [vgl. LIS BW 2009]. Für den Einsatz in computerbasierten Testsystemen sind sie hinsichtlich dieses Aspektes deutlich vorteilhafter, da sie technisch sicherer und mit weniger Zeitaufwand implementiert sowie die Antwortvorgaben eindeutig mit den inhaltlichen und technischen „Reaktionen“[29] verknüpft werden können. Es kann von vornherein eindeutig festgelegt werden, wie das Programm in Abhängigkeit von den Benutzereingaben reagieren soll. Durch die klare Begrenzung der Ausprägungen kann eine zeitnahe Reaktion des Systems realisiert werden. Zudem ist der Zeitaufwand für die Probanden bei gebundenen Antwortformaten deutlich geringer als bei offenen, was den Programmanforderungen hinsichtlich der Durchführungszeit sehr entgegenkommt. Einen Nachteil im Vergleich zu offenen Antwortformaten bildet hier die sehr zeitintensive Konstruktion der Aufgaben und Distraktoren. In Multiple-Choice-Verfahren besteht prinzipiell eine höhere Ratewahrscheinlichkeit und die Diagnosemöglichkeiten sind eingeschränkt [vgl. auch LIS BW 2009].

Für die zu implementierende computerbasierte Testumgebung wurde aufgrund obiger Überlegungen entschieden, dass gebundene Antwortformate sowohl hinsichtlich der technischen Entwicklung, der Anwenderfreundlichkeit, als auch der Auswertungszeit und -eindeutigkeit zum aktuellen Stand von Technik und Wissenschaft ökonomisch und hinsichtlich der Projektzielsetzungen effizient sind. Der Entwicklungsaufwand, der zur Aufgabenkonstruktion betrieben werden muss, ist nicht reduzierbar. Was die höhere Ratewahrscheinlichkeit sowie die eingeschränkten Diagnosemöglichkeiten betrifft, so ist es Teil dieses Entwicklungskonzeptes, diese Aspekte deutlich zu verbessern.

---

29 Eine technische Reaktion kann hier z. B. ein Aufruf einer Datenbank sein, der einen Eintrag bspw. in eine Defizitanalyse zur Folge hat.

6.3.4 Untersuchungsverlauf und Entwicklungsaspekte

In dieser Arbeit werden diverse Forschungsfragen und Zielsetzungen aufgegriffen (vgl. Kapitel 2 und Kapitel 6.3.1). Verschiedene Aufgabenbereiche und Ziele sind eng miteinander verbunden und stehen in wechselseitiger Beziehung zueinander. So werden bspw. zu allen Teilaspekten der Arbeit stets Validierungen vorgenommen, deren Ergebnisse wiederum zu einer Überarbeitung des validierten Bereichs führen. Validierungen und Evaluationen finden innerhalb dieser Arbeit prozessbegleitend (formativ) statt und werden in unterschiedlichem Maße am Ende jedes Teilziels auch summativ durchgeführt. Aufgrund der engen Verzahnung aller Aspekte dieser Arbeit laufen viele Schritte parallel ab.

Die Komplexität der Zielsetzung dieser Arbeit bedingt, unterschiedliche Forschungsansätze hinsichtlich qualitativer und quantitativer Methoden (vgl. Kapitel 6.1.1) sowie verschiedene Datenformate (vgl. Kapitel 6.1.2) und Wissenschaftstheorien miteinander zu verbinden. Im Sinne des in Kapitel 6.1.3 erörterten Triangulationsbegriffs erfolgt dies sowohl auf der Ebene der Erhebungsmethoden als auch – und insbesondere – auf Basis der Datenformate, der darauf anzuwendenden Analyseverfahren und der Daten an sich. In Kapitel 2.2 wird diesbezüglich bereits im Allgemeinen exemplarisch erörtert, wie der Forschungs- und Entwicklungsprozess meiner Arbeit aufgebaut ist und abläuft. Abbildung 15 (siehe Folgeseite) stellt nun die einzelnen Bereiche, Aufgaben, Methoden und (Teil)Ziele dieser Arbeit schematisch im Detail dar und zeigt die Vernetzung untereinander auf. Zur Herstellung einer besseren Übersichtlichkeit habe ich dabei den „spiralförmig vernetzt“ [30] ablaufenden Prozess optisch soweit möglich in eine annähernd lineare Grundstruktur gebracht. Die einzelnen Schritte und Phasen dieses Untersuchungs- und Entwicklungskonzepts werden nachfolgend erörtert. In Kapitel 7 wird auf die einzelnen Aspekte dann im Detail hinsichtlich deren Umsetzung an konkreten Beispielen eingegangen.

---

[30] Die Begriffswahl „spiralförmig“ erfolgt in Anlehnung an das aus den Didaktiken bekannte Konzept eines Spiralcurriculums. Die Ergänzung um den Terminus „vernetzt“ dient der Veranschaulichung der starken Verknüpfung diverser Aspekte auch abweichend von der grundlegenden „Spiralstruktur“ und in verschiedene Richtungen aufeinander einwirkend.

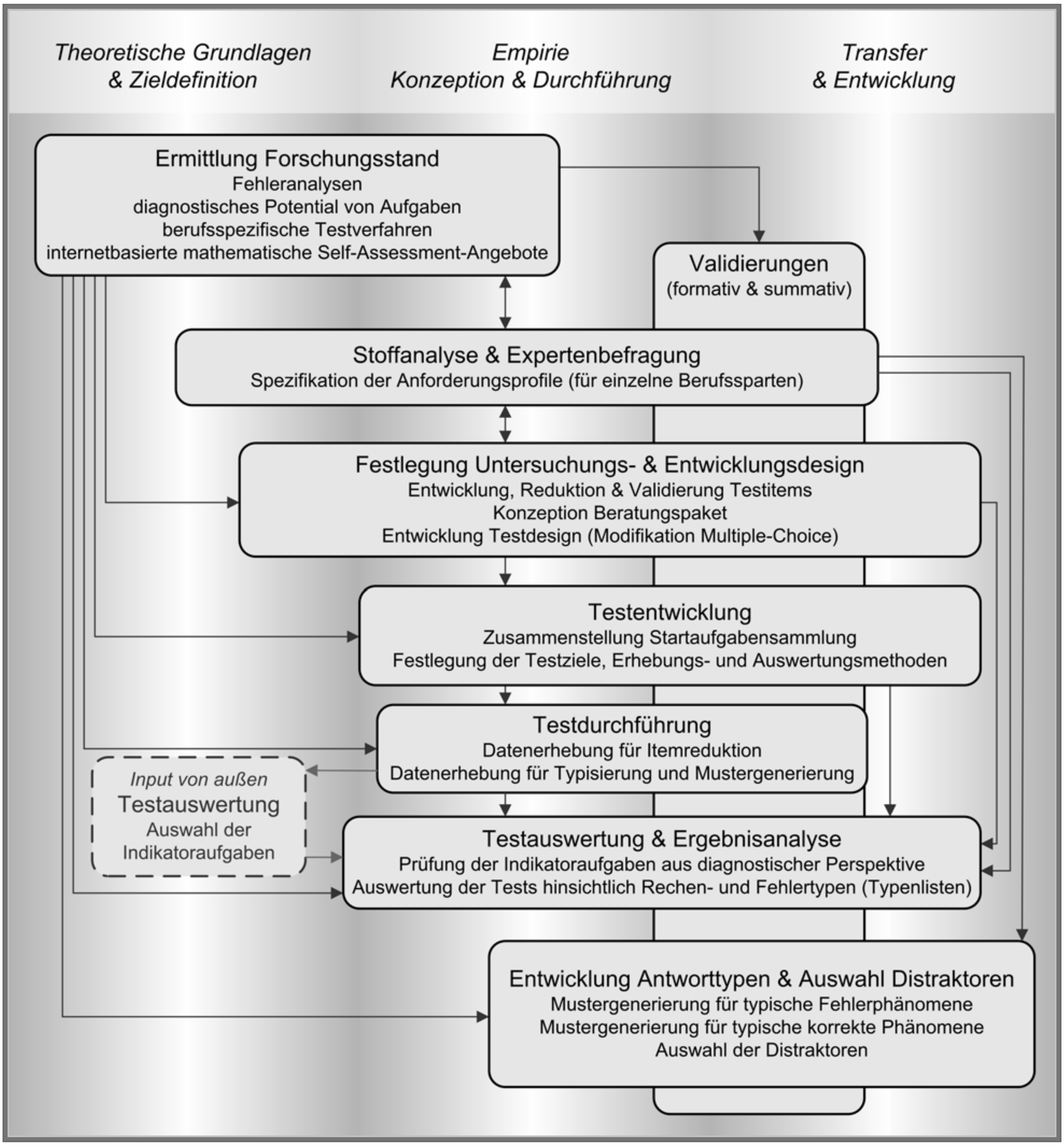


Abbildung 15: Schematische (nicht chronologische) Darstellung der Arbeitspakete, Aufgabenbereiche und (Teil-)Ziele dieser Arbeit.

Die erste Phase des Untersuchungsdesigns dieser Arbeit stellt die Ermittlung von Anforderungsprofilen für die Zielgruppe und ihre Untergruppenspezifikationen dar. Die Basis dafür bilden die mittels einer Stoffanalyse und Interviews bei Dozierenden der verschiedenen Lehrbereiche erlangten qualitativen und quantitativen Daten, die zusätzlich durch ein Expertenrating auf curriculare Validität hin überprüft werden.

Parallel gehe ich die Entwicklung eines diagnostischen Erhebungsverfahrens an. Dabei sollen mit einem Verfahren alle drei in Kapitel 6.3.1 aufgeführten Zielsetzungen des Gesamtprojekts bzgl. empirischer Erhebungen weitestgehend ermöglicht werden. Der inhaltliche mathematische Rahmen wird hierfür durch die Ergebnisse der Stoffanalyse definiert. Grundlegend für die Aspekte dieses Teilschrittes zur Entwicklung eines Erhebungsverfahrens sind zudem Methoden der empirischen Sozialforschung sowie die Erkenntnisse diagnostischer Forschungen insbesondere im Bereich der Fehleranalyse (vgl. Kapitel 5 und Kapitel 6.1).

Im Rahmen der Testentwicklung geht der empirischen Untersuchung eine ausführliche rationale Aufgabenanalyse vorher, um das diagnostische Potential der Testaufgaben schon für die Voruntersuchungen zu erhöhen. Die vorliegenden fehleranalytischen Untersuchungsergebnisse stellen die Ergebnisse nationaler und internationaler Untersuchungen von Schülern allgemeinbildender Schulen dar. Die Zielgruppe dieses Projektes hebt sich hier deutlich ab. Es handelt sich um Erwachsene mit unterschiedlichen Schulabschlüssen, verschiedenen Ausbildungsgängen und voneinander abweichenden Zeitspannen, die zwischen ihrem letzten schulischen Kontakt mit Mathematik und dem angestrebten Meisterlehrgang liegen. Die Voraussetzungen sind demnach höchst inhomogen, auch wenn alle die gleiche Zielsetzung verfolgen, den Meisterabschluss zu erlangen. Es soll daher ebenfalls durch eine empirische Erhebung überprüft werden, inwiefern die Ergebnisse vorliegender Untersuchungen mit Schülern aus allgemeinbildenden Schulen auf diese Zielgruppe übertragen werden können oder ggf. verändert werden müssen.

Im Rahmen des Gesamtprojekts Mathe-Meister besteht an verschiedenen Stellen zu unterschiedlichen Fragestellungen der Bedarf an empirischen Untersuchungen. „Angesichts des in der Regel hohen Aufwandes, der […] bei Erhebungen mit der Vorbereitung, Durchführung und Auswertung der Erhebung verbunden ist, wäre es wünschenswert, dass eine Erhebung gleichzeitig mehrere Funktionen erfüllen kann. […] [Es zeigt sich] jedoch, dass eine solche Multifunktionalität von Leistungserhebungen in der Regel nicht möglich ist, dass sich die Merkmale der Erhebungen mit den jeweiligen Funktionen in der Summe erheblich unterscheiden.“ [Sill, Sikora 2007 S. 81].

Bei der Konkretisierung der einzelnen Projektziele stellten sich folgende Aspekte bzw. Fragestellungen heraus, zu deren Beantwortung empirische Erhebungen und Analysen unumgänglich sind:

1. Bestimmung der Ausgangslage der Zielgruppe im Sinne einer Leistungsmessung;
2. Ermittlung diagnostisch aussagekräftiger Testaufgaben/Testitems;
3. Ermittlung von Indikatoraufgaben zur statistisch und inhaltlich validen Reduktion der Testaufgabenauswahl/Itemauswahl[31];
4. Bestimmung der Ausgangslage der Zielgruppe hinsichtlich der Validierung bzw. Erweiterung und Neuerfassung typischer Lösungsmuster (korrekt wie fehlerhaft).

Hinsichtlich dieser Aspekte und Fragestellungen werden die Tests spiralförmig[32] und stark vernetzt mit anderen Teilprozessen und -ergebnissen der Arbeit in mehreren Phasen ausgewertet. Die Untersuchung beginnt mit der umfangreichen Startaufgabensammlung (vgl. Abbildung 15). Erhebungen mit diesen Items führen zu neuen Testzusammenstellungen, die anschließend weiter untersucht werden. Hinsichtlich der Reduktion des Aufgabenpools resultieren daraus nach mehreren Phasen u. a. die Indikatoraufgaben, für die im Rahmen dieser Arbeit Distraktoren entwickelt werden (vgl. Abbildung 15). Dabei werden sowohl qualitative und quantitative Daten erhoben als auch in unterschiedlicher Form analysiert. So ist der Triangulationsansatz insbesondere in diesem Bereich zu finden. Für die diagnostische Analyse der Testaufgaben werden bspw. umfangreiche so genannte Typenlisten angelegt, in denen gleichartige Rechenphänomene gruppiert werden, die als Grundlage insbesondere zur anschließenden Mustergenerierung dienen. Dabei findet nicht nur eine Berücksichtigung der Ergebnisse, sondern des gesamten notierten Lösungsweges statt. So kann bspw. auf empirischer Basis nachvollzogen werden, dass identische – korrekte wie falsche – Ergebnisse auf unterschiedlichen Wegen entstehen können. Auch die Ermittlung der Indikatoraufgaben beinhaltet die Auswertung dieser Typenlisten. Dabei liegen der Itemreduktion in erster Linie

31 Die Begriffe Testaufgabe und Testitem werden nachfolgend synonym verwendet.

32 Die Begriffswahl „spiralförmig“ erfolgt in Anlehnung an das aus den Didaktiken bekannte Konzept eines Spiralcurriculums.

statistische Analysen zugrunde. Dieser Teil ist aus der Arbeit ausgelagert (vgl. Abbildung 15). Die Ergebnisse der statistischen Untersuchungen wiederum werden mit den Erkenntnissen dieser Arbeit hinsichtlich diagnostischer Eignung der Testitems sowie Abdeckung des inhaltlichen Spektrums überprüft. Letztlich führt eine Kombination statistischer und diagnostischer sowie inhaltlicher Analysen zur Auswahl der Indikatoraufgaben für das Testportal.

Inhaltlicher und methodischer Schwerpunkt dieser Arbeit

Für diese Indikatoraufgaben werden anschließend im Rahmen dieser Arbeit konkrete Antwortalternativen ermittelt bzw. entwickelt. Diese werden in Mustern bzw. Kategorien beschrieben, um eine anschließenden Verallgemeinerung und die Entwicklung analoger Testaufgabensätze und Distraktoren zu ermöglichen. Bei der Entwicklung der Antwortalternativen stehen die Typenlisten im Vordergrund. Alle Rechenergebnisse und -wege werden analysiert, kategorisiert und in Musterdefinitionen übersetzt. Das bedeutet, dass für jede einzelne Indikatoraufgabe alle Probandennotationen qualitativ analysiert werden. Es wird zudem quantitativ festgehalten, wie häufig die einzelnen Kategorien auftreten. Darauf basiert das anschließende Ranking für das Testportal, da nicht stets alle Muster als Distraktoren ausgegeben werden können. Für das Testportal Mathe-Meister wird die Anzahl der Distraktoren auf elf pro Item begrenzt, zwei davon sind Distraktoren mit den Aussagen „Ich kenne die Antwort nicht“ und „Meine Antwort ist nicht dabei“ (vgl. Abbildung 16). Nachfolgend wird daher bei der Auswahl von Antwortalternativen in der Regel von einer Begrenzung auf neun Distraktoren gesprochen. Außerdem wird das Multiple-Choice-Verfahren in dem Sinne modifiziert, dass die Distraktoren nicht sofort bei Einblendung der Aufgabe angezeigt werden. Der Nutzer ist angewiesen, zuerst die Aufgabe in einem begrenzten Zeitfenster zu bearbeiten. Dann wird ihm die Antwortauswahl zur Verfügung gestellt, er kann sein Ergebnis mit den vorliegenden abgleichen und eines auswählen. Die Auswahl von Distraktoren, die typische Lösungen widerspiegeln, sowie die Antwortalternative „Meine Antwort ist nicht dabei“ tragen – wenn der Proband sich an die Regeln hält – zu einer Reduktion der Ratewahrscheinlichkeit bei [vgl. Lind, Knoche 2004]. Durch die begrenzte Anzahl der Distraktoren bleibt der Test überschaubar und in geeignetem zeitlichem Rahmen (vgl. Abbildung 16).

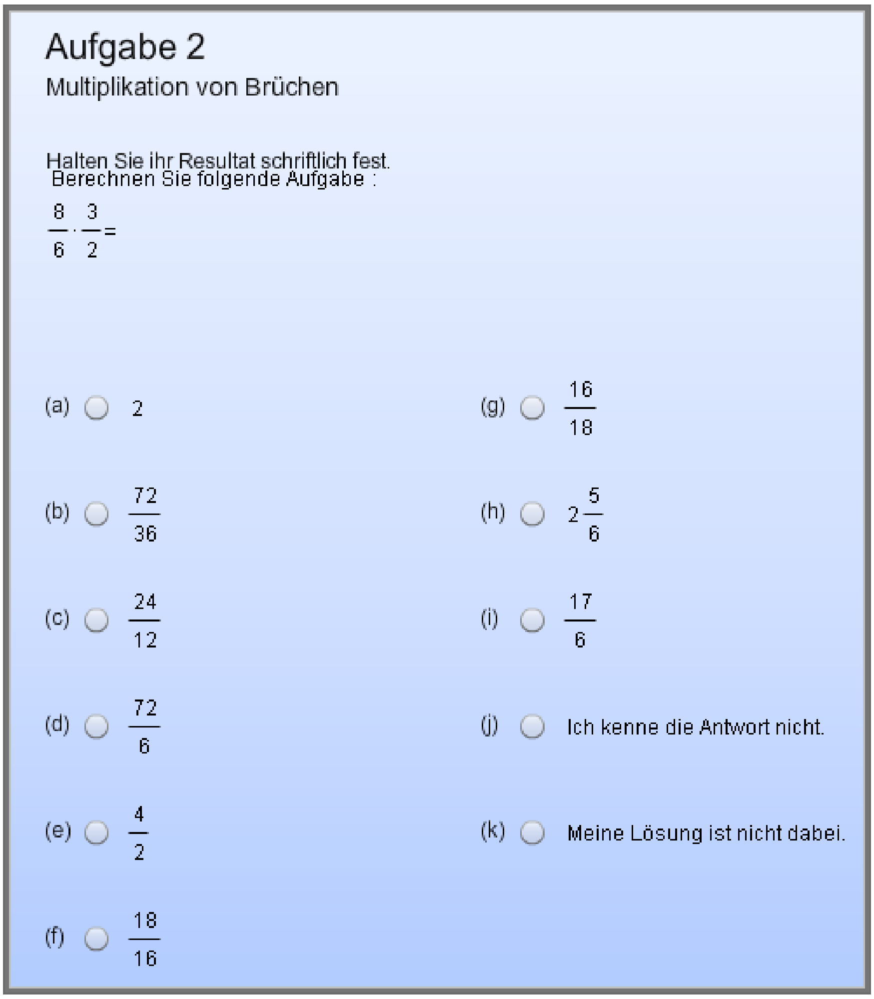


Abbildung 16: Screenshot einer Aufgabe mit Anzeige der Distraktoren im Online-Test Mathe-Meister[33].

In allen Punkten dieses Untersuchungs- und Entwicklungsprozesses werden viele der oben genannten Aufgaben parallel durchlaufen, einige bedingen einander wechselseitig, so dass stets eine Vernetzung und Berücksichtigung aller Teilaspekte dieser Arbeit erfolgen muss. Das Schema in Tabelle 11 zeigt die wesentlichen Phasen dieser Arbeit und deren Verzahnung miteinander. In der sich anschließenden ausführlichen Darstellung des Untersuchungsverlaufs werden die einzelnen Elemente in ihrer theoretischen Chronologie34 ausführlich erörtert und in die hier aufgeführten wissenschaftstheoretischen Methoden und Inhalte eingeordnet.

---

33 Das Design der Testseite befindet sich zum Zeitpunkt des Screenshots noch in der Überarbeitung.

34 Eine chronologische, voneinander vorerst getrennte Betrachtung der einzelnen Aspekte soll insbesondere die Lesbarkeit der Arbeit unterstützen. Einfließende Ergebnisse aus nachfolgenden oder vorhergehenden Punkten werden an den gegebenen Stellen sinngemäß mit einbezogen.

TEIL IV THEORETISCHE UND EMPIRISCHE UNTERSUCHUNGEN

7 Theoretische und empirische Analysen – Testitementwicklung

Theoretische und empirische Analysen liefern die grundlegenden Inhalte und Ergebnisse für das Entwicklungsziel dieser Arbeit. In diesem Kapitel wird erörtert wie die in Kapitel Teil I dargestellten Methoden im Konkreten angewendet werden. Dabei wird auch exemplarisch aufgezeigt, welche Rolle die in den Kapiteln 4 und 5.3 aufgearbeiteten Inhalte insbesondere zur Fehleranalyse dabei spielen und wie sie im Einzelfall eingebunden werden.

7.1 Stoffanalyse und Expertenbefragung

Die zu Beginn der verschiedenen Meisterlehrgänge vorausgesetzten mathematischen Grundlagen wie auch die darauf aufbauenden mathematischen Zusammenhänge werden nicht explizit in Rahmenvorgaben formuliert. Das Fach Mathematik als solches wurde 2005 im Rahmen der Meisterausbildung abgeschafft. Stattdessen soll seitdem eine kontextgebundene Integration verschiedener mathematischer Inhalte in den anderen Unterrichtsfächern stattfinden. So wird bspw. für die Meisterabschlussprüfungen im Metallgewerbe im Rahmenlehrplan explizit betont, „dass es nicht mehr auf die Vermittlung von Einzelwissen ankommt. Auch die frühere separate Prüfung von Grundlagenfächern wie Mathematik fällt weg. Es wird unter der handlungsorientierten Ausrichtung der Prüfung vom Prüfling der Nachweis verlangt, dass er Probleme analysieren und bewerten sowie geeignete Lösungswege aufzeigen und dokumentieren kann. Dazu soll er technologische, […] und mathematische Kenntnisse verknüpfen.“ [Bundesverband Metall 2005, S. 5] Diese Regelung der anwendungsorientierten Verknüpfung mathematischer Inhalte in anderen Fächern ist bis zum Projektstart im Oktober 2007 in Handwerks- sowie Industrie- und Handelskammern aller Bundesländer in vergleichbarer Form eingeführt worden. Damit zusammenhängend gibt es auch nur wenige aktuelle Lehrbücher, die sich explizit mit Mathematik in den einzelnen Berufsfeldern befassen. Zur Ermittlung der zu Beginn verschiedener Meisterlehrgänge vorausgesetzten mathematischen Grundlagen ist es daher notwendig, sowohl alle verfügbaren Mathematiklehrwerke, als auch eine Vielzahl anderer Lehr-[35] und Unterrichtsmaterialien einzelner Dozenten und Kammern[36] zu analysieren. In Anlehnung an die Vorgehensweisen rationaler Aufgabenanalysen [vgl. Bromme et al. 1999] werden auf Basis der in den verschiedenen Quellen dargestellten Anfangsthemen zuerst die mathematischen Inhalte und Anforderungen extrahiert und kategorisiert. Innerhalb dieser daraus folgenden umfangreichen und teilweise von den Anforderungen her sehr komplexen Kategorien wurde anschließend im Detail analysiert, welche grundlegenden mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in jedem einzelnen Bereich vorausgesetzt werden. Die so isolierten Grundlagen wurden anschließend im Sinne eines Expertenratings durch Lehrende der einzelnen Berufssparten validiert, ggf. erweitert und berufspezifisch differenziert.

7.1.1 Extraktion mathematischer Grundlagen – Aufgabenanalyse I

Zur Extraktion der vorausgesetzten mathematischen Grundlagen und zur Erstellung der entsprechenden Anforderungsprofile für jeden mathematischen Bereich werden innerhalb der Stoffanalyse bei allen Eingangsaufgaben jedes Lehrwerks und der anderen Unterlagen die Methoden der rationalen Aufgabenanalyse angewendet. Dabei wird an dieser Stelle durch die hier als *Aufgabenanalyse I* bezeichnete Analyse auf die Zerlegung der gegebenen Aufgaben in darin enthaltene mathematische Kernbereiche, Anforderungen und Aufgabenaspekte abgezielt.

Zum Zwecke der Konkretisierung diagnostischer Aufgaben kommen die Methoden der rationalen Aufgabenanalyse in angepasster Form, ergänzt durch eine empirische Aufgabenanalyse bei der letztendlichen Konstruktion und Auswahl der Aufgaben- und Antwortformate ein weiteres Mal zur Anwendung (vgl. Kapitel 7.2.5.3).

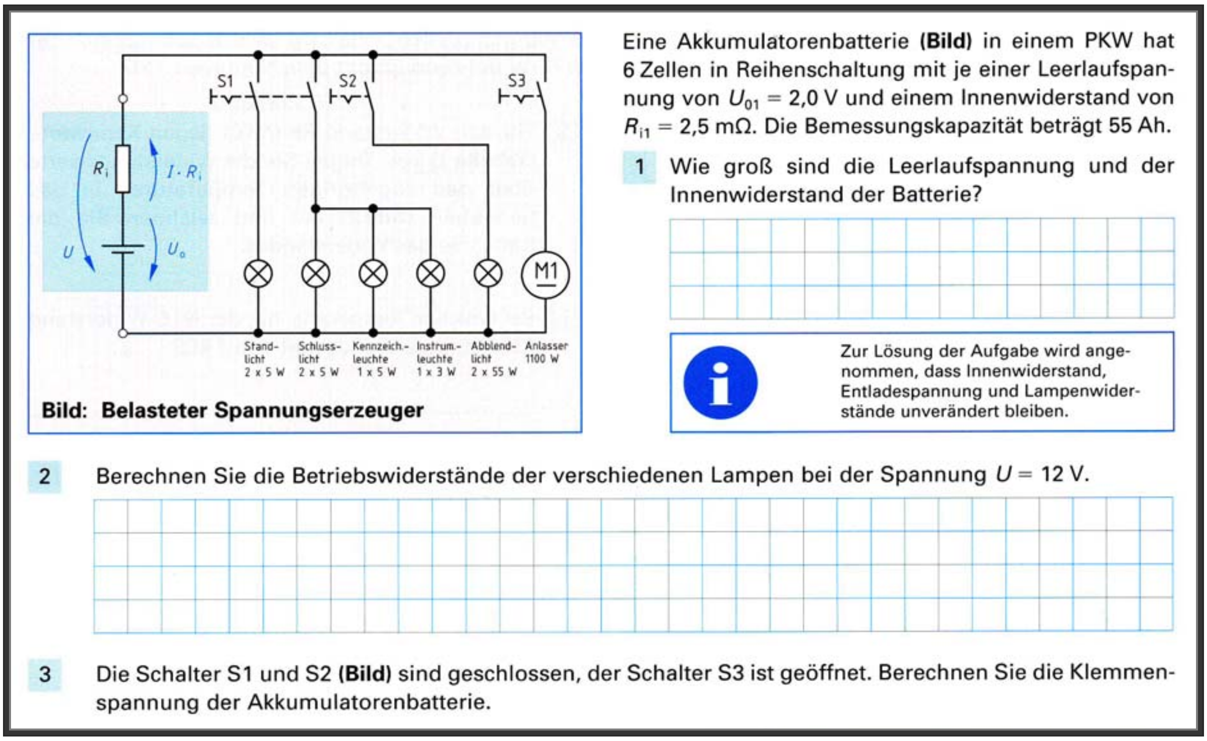
---

[35] Im Literaturverzeichnis findet sich eine Auswahl berufsspezifischer Lehrwerke, die durch Lehrende empfohlen und sich bei der Analyse als sinnvoll erwiesen hat.

[36] Viele Dozierende aus unterschiedlichen Kammern stellten für das Projekt freundlicherweise ihre selbst erarbeiteten Unterrichtsmaterialien zur Verfügung, die mathematische Aspekte berücksichtigen.

Wie anfangs erörtert, werden mathematische Kompetenzen nicht separiert in „reinen“ Mathematikaufgaben in der Meisterausbildung gefordert, sondern in berufsspezifische Kontexte eingebunden. Diese Tatsache bedingt bei der Extraktion der mathematischen Grundlagen zusätzlich die Differenzierung dieser Aufgabenaspekte von den jeweiligen fachspezifischen Kompetenzanforderungen. Mit dem Ziel, einen Einblick in die zu Beginn der verschiedenen Meisterlehrgänge gestellten Aufgaben mit mathematischen Inhalten zu geben und aufzuzeigen, wie die Methoden der rationalen Aufgabenanalyse in diesem Zusammenhang in dieser Arbeit adaptiert und angewendet werden, werden dieses Vorgehen und die daraus erfolgenden Erkenntnisse nun an konkreten Aufgabenstellungen erörtert.

Zu Beginn jedes Meisterlehrgangs werden prinzipiell die Inhalte, Kenntnisse und Fähigkeiten aus der Gesellenzeit vorausgesetzt. Die im Rahmen der Meisterausbildung hinzukommenden Kompetenzen werden durch Anknüpfung an bekannte Themen hergeleitet. Diese herleitenden Aufgabenstellungen sind jene, aus denen die mathematischen Grundlagen isoliert werden. Ein repräsentatives Beispiel für eine solche Aufgabenstellung aus dem Bereich Elektrotechnik ist nachfolgend dargestellt in Abbildung 17.



Eine Akkumulatorenbatterie **(Bild)** in einem PKW hat 6 Zellen in Reihenschaltung mit je einer Leerlaufspannung von $U_{01} = 2{,}0$ V und einem Innenwiderstand von $R_{i1} = 2{,}5$ mΩ. Die Bemessungskapazität beträgt 55 Ah.

1 Wie groß sind die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand der Batterie?

Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass Innenwiderstand, Entladespannung und Lampenwiderstände unverändert bleiben.

2 Berechnen Sie die Betriebswiderstände der verschiedenen Lampen bei der Spannung $U = 12$ V.

3 Die Schalter S1 und S2 **(Bild)** sind geschlossen, der Schalter S3 ist geöffnet. Berechnen Sie die Klemmenspannung der Akkumulatorenbatterie.

Abbildung 17: Einführende Aufgabenstellung im Rahmen der Meisterausbildung zur Vorbereitung auf Prüfungen im Berufsfeld Elektrotechnik [Bastian et al. 2005, S. 5].

Aus dieser Aufgabenstellung lassen sich neben den fachspezifischen Kompetenzen der Elektrotechnik, wie z. B. die Kenntnis der Formeln zur Spannungs- und Widerstandsberechnung und dem Verständnis verschiedener Schaltungstypen, der Bemessungskapazität und der Funktionsweise von Akkumulatoren und dem Lesen von Schaltungen, auch Kompetenzen aus dem sprachwissenschaftlichen Bereich ableiten, wie Lesefähigkeit und Textverständnis. Ebenso werden für die Lösung dieser und anderer Aufgaben in verschiedenen Berufsfeldern u. a. Modellierungskompetenzen verlangt. Aus der Perspektive der mathematischen Grundlagen können in dieser Aufgabe zusätzlich folgende Bereiche isoliert werden:

- Formelumstellungen, im konkreten Fall Formeln mit Brüchen;
- dadurch impliziert werden u. a. Kenntnisse und Fähigkeiten in den Bereichen
    - des Umstellens von Brüchen (Kürzen, Gleichnamig machen etc.),
    - des Rechnens mit unterschiedlichen Einheiten,
    - des Rechnens mit rationalen Zahlen und
    - der Grundrechenarten in der Menge der natürlichen Zahlen sowie in der Menge der rationalen Zahlen.

Im konkreten Fall lassen sich diese Anforderungen mittels der rationalen Aufgabenanalyse u. a. an folgenden Stellen der Aufgabenstellung und möglicher Lösungsverfahren identifizieren und isolieren (vgl. Abbildung 18, Abbildung 19). Es werden im Sinne der klassischen rationalen Aufgabenanalyse idealtypische Lösungswege antizipiert. Erweitert wird diese klassische Form hier hinsichtlich der detaillierten Betrachtung der mathematischen Kompetenzen bzw. Themengebiete, die innerhalb dieser idealtypischen Lösungswege zum Einsatz kommen.

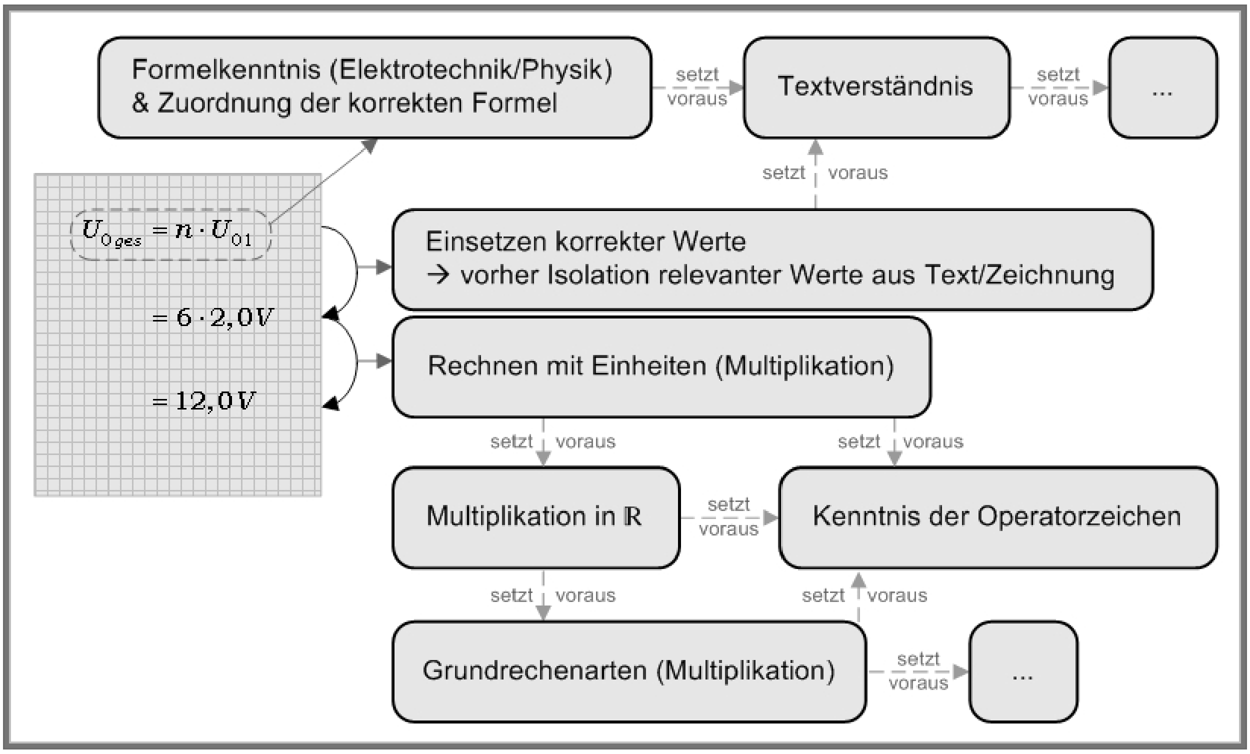


Abbildung 18: Extraktion fachübergreifender Anforderungen aus einem idealtypischen Lösungsweg zur Aufgabe 1 (Teil 1) aus Abbildung 17.

Diese relativ kurze und einfach strukturierte Textaufgabenstellung aus dem Bereich Elektrotechnik verdeutlicht bereits die Komplexität der hier adaptierten Form der rationalen Aufgabenanalyse zur Extraktion mathematischer Grundlagen, die zur Bewältigung solcher Einstiegsaufgaben aus Sicht der Lehrenden vorausgesetzt werden müssen. Selbst in einer „einfachen" durch ein dreischrittiges Lösungsverfahren lösbaren Aufgabe wie der hier gezeigten verbirgt sich eine Vielzahl direkt isolierbarer mathematischer Grundlagen, die wiederum weitere daraus ableitbare Grundlagen bedingen. Die rationale Aufgabenanalyse wird daher bei allen Aufgaben auf die direkt ersichtlichen potentiellen Bearbeitungsschritte angewendet. Die dadurch ermittelten Grundlagen werden anschließend so lange weiter verfeinernd analysiert, bis alle grundlegenden mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bis auf die kleinste Ebene isoliert wurden. Abbildung 19 zeigt erste Schritte dieser weiteren Unterteilungen von nicht direkt aus dem antizipierten Bearbeitungsweg ersichtlichen mathematischen Anforderungen und Themengebiete. Diese Form der rationalen Aufgabenanalyse wurde dabei auf alle Einstiegsaufgaben jedes Lehrwerkes – i. d. R. die ersten 15 bis 20 Seiten – für alle vorliegenden Quellen aus den diversen Berufsbereichen angewendet.

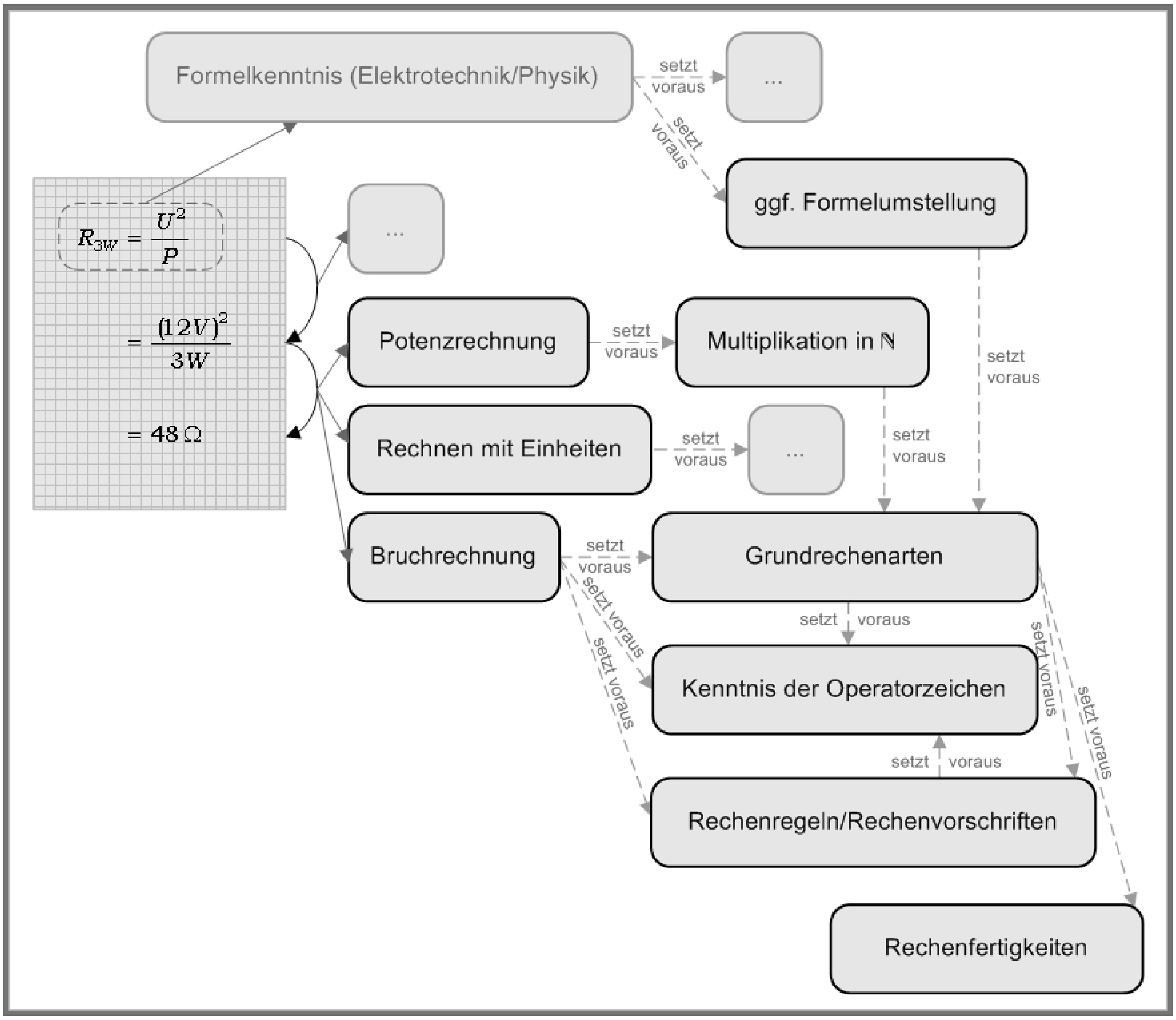


Abbildung 19: Direkte und abgeleitete Extraktion mathematischer Grundlagen aus einem idealtypischen Lösungsweg zur Aufgabe 2 (Teil 1) aus Abbildung 17.

Ein berufsspezifisch übergreifender Themenbereich in der Meisterausbildung sind betriebswirtschaftliche Gebiete wie Kosten- und Leistungsrechnung sowie Buchführung. Sie sind elementarer Bestandteil in allen Berufssparten, denn Meister müssen in der Lage sein, ein Unternehmen auch aus betriebswirtschaftlicher Perspektive erfolgreich zu führen. Hier kommen bei Einstiegsaufgaben vor allem die Prozentrechnung und die Anwendung der Dreisatzprinzipien zur Anwendung. Zudem ist das Lesen und das Verständnis *von* sowie das Rechnen *mit* Gleichungen und die Erfassung grafischer Darstellungen wie Säulen-, Balken- und anderer Diagramme notwendig. Insbesondere in diesem Bereich fällt eine zusätzliche Schwierigkeit durch sehr lange, komplexe Aufgabentexte auf (vgl. u. a. Hackenberg 2007a/c).

7.1.2 Ergebnisse und Validierung der Stoff- und Aufgabenanalyse I

Die durch die vorhergehend beschriebene Stoff- und Aufgabenanalyse I ermittelten benötigten bzw. vorausgesetzten Grundlagenfähigkeiten und -kenntnisse aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen wurden anschließend im Sinne eines Expertenratings mittels einer Online-Umfrage sowie persönlicher Interviews mit Lehrenden verschiedener Meisterkurse auf curriculare Validität überprüft und berufsspezifisch differenziert. An der Normierung und Validierung der Aufgaben und Tests nahmen letztlich 30 Lehrende[37] aus sechs Handwerks- sowie Industrie- und Handelskammern verschiedener Bundesländer teil.

Die Stoff- und Aufgabenanalyse I liefern nach Abschluss der Normierungs- und Validierungsphasen folgende mathematischen Themenbereiche bzw. Kompetenzen, die zu Beginn verschiedener Meisterlehrgänge als grundlegend vorausgesetzt werden (Oberkategorien, Reihenfolge ohne Wertung, berufsübergreifend):

- Begriffe zur Geometrie
- Bruchgleichungen
- Datenentnahme aus Diagrammen und fachspezifischen Zeichnungen
- Dreisatz, Prozentrechnung und Zinsrechnung
- Einsatz des Taschenrechners
- Geometrie: Flächen-, Oberflächen- und Volumenberechnung; Satz des Pythagoras
- Grundlegende mathematische Begriffe und Rechengesetze
- Grundrechenarten
- Lineare Gleichungen
- Proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnung
- Quadratische Gleichungen
- Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen
- Rechnen mit Einheiten, Umrechnen von Einheiten
- Termumformungen
- Wurzeln und Potenzen

---

[37] 22 Lehrende nahmen an der Online-Befragung teil, 4 davon und weitere 8 andere stellten sich für Interviews zur Verfügung.

Durch das Expertenrating wurden die einzelnen Anforderungen bestätigt und für die unterschiedlichen in das Projekt eingebetteten Berufsfelder spezifiziert. Ein Einblick in die Ergebnisse dieser Spezifikationen und der Validierung durch das Expertenrating (im Rahmen der Online-Befragung) wird exemplarisch im Anhang gegeben (vgl. Anhang 14.2).

7.2 Empirische Erhebungen

Wie in den Kapiteln 2 und 6.3.1 erörtert, verfolgt die im Rahmen dieser Arbeit konzipierte empirische Erhebung verschiedene Zielsetzungen, die durch das konkrete Test- und Untersuchungsdesign möglichst alle erreicht werden sollen:

1 Bestimmung der Ausgangslage der Zielgruppe im Sinne einer Leistungsmessung;

2 Ermittlung diagnostisch aussagekräftiger Testaufgaben/Testitems;

3 Ermittlung von Indikatoraufgaben zur statistisch und inhaltlich validen Reduktion der Testaufgabenauswahl/Itemauswahl;

4 Bestimmung der Ausgangslage der Zielgruppe hinsichtlich der Validierung bzw. Erweiterung und Neuerfassung typischer Lösungsmuster (korrekt wie fehlerhaft). (vgl. Kapitel 6.3.1).

Die Erhebung der Daten zur Erreichung der o. g. Zielsetzungen 1 bis 4 werden schriftliche Tests eingesetzt. Die Entwicklung der Tests und die Erfassungsmethoden müssen in diesem Fall sowohl quantitative als auch qualitative Daten liefern, um den o. g. vier Zielsetzungen gerecht zu werden. Ebenso bedingen die unterschiedlichen Zielsetzungen sowohl qualitative als auch quantitative Analyseansätze.[38] Die Vernetzung dieser Zielsetzungen und Methoden wird verdeutlicht in Abbildung 15, siehe Seite 82).

[38] Zur Unterscheidung qualitativer und quantitativer Methoden und Daten sowie deren Kombination sei verwiesen auf die Erörterungen in den Kapiteln 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3.

7.2.1 Testdesign und Testaufgabenanforderungen

Die Ergebnisse aus verschiedenen anderen Studien wie PISA oder TIMSS zur Leistungsmessung [vgl. u. a. PISA-Konsortium 2004, 2007; Baumert et al. 2000a/b] zeigen unter anderem, dass diagnostische Tests von Schülern verschiedener Alterstufen in der Regel in einem Zeitrahmen von 45 bis max. 60 Minuten adäquat bearbeitet werden können. Aus diesem Grund sind die Tests für einen Bearbeitungszeitrahmen von max. 45 Minuten konzipiert. Testtheoretische Veröffentlichungen verdeutlichen des Weiteren die Notwendigkeit der Information der Probanden über Ziele und Verwendungsform der Testergebnisse, weswegen alle Tests mit einleitenden Worten zum Projekt, dessen Zielen und der Verwendungsform der Testdaten beginnen [vgl. Lienert, Raatz 1998] (vgl. Anhang 14.4.1).

Auf eine mathematische Bezeichnung der einzelnen abgefragten Inhalte bspw. durch Überschriften wie „Proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnungen“ wird im Testdesign verzichtet, um unnötigen Verunsicherungen vorzubeugen. Die einzelnen Bereiche werden aber optisch bspw. durch Linien strukturiert und voneinander getrennt, um Perseverationsfehler insbesondere durch Operationsübertragungen zu verringern. Aufgabenstellungen, die die Anwendung des Taschenrechners überprüfen, sind in diesen Tests ausgelagert, um der Verwendung des Taschenrechners bei den anderen Aufgabenstellungen und dadurch einer Ergebnisverfälschung vorzubeugen.

Bei den Testaufgaben handelt es sich überwiegend um reine Kalkülaufgaben mit offenem Antwortformat. Einige Aufgaben z. B. im Bereich der Prozentrechnung oder der Geometrie müssen durch kurze Texteinkleidungen ergänzt werden, um die Aufgabenstellung eindeutig zu gestalten. Nachfolgend werden Anforderungen an die Aufgabenstellung bezüglich der für diese Arbeit relevanten Aufgaben erörtert.

Anforderungen an die Testaufgaben

Alle in die Tests eingebundenen Aufgaben müssen in ihrer Gesamtheit und jede im Einzelnen neben den allgemeinen testtheoretischen weiteren, speziellen Anforderungen im Rahmen diese Projektes gerecht werden (TAA: Testaufgabenanforderungen).

TAA1 *Vollständigkeit der Inhalte*: Die Aufgaben sollen in ihrer Gesamtheit alle geforderten mathematischen Grundlageninhalte, -kenntnisse bzw. -fähigkeiten, die zu Beginn der Meisterausbildung vorausgesetzt werden, abfragen bzw. repräsentativ abbilden.

TAA2 *Vollständigkeit der Aufgabenaspekte*: Die Aufgaben sollen innerhalb der einzelnen Grundlageninhalte/Themenkategorien (wie z. B. Bruchrechnung) alle relevanten Aufgabenkombinationen und -aspekte in ihrer Mannigfaltigkeit möglichst vollständig abdecken.

TAA3 *Eindeutigkeit der Aufgabenstellung*: Die Aufgabenstellungen sollen eindeutig und klar verständlich sein.

TAA4 *Rechnerische Anforderungen*: Alle Aufgaben sollen ohne zu Hilfenahme von bspw. Taschenrechnern lösbar sein.

TAA5 *Diagnostisches Potential*: Alle Aufgaben sollen fehleranalytisch geeignet sein und eine möglichst eindeutige Fehleranalyse ermöglichen – also ein hohes diagnostisches Potential bieten.

7.2.2 Entwicklung Testitems – Aufgabenanalyse II

Kapitel 7.1.2 liefert einen Überblick über die für Meisterschüler zu Beginn ihres Lehrgangs relevanten mathematischen Grundlagen. Für die diagnostischen Tests wurden diese auf Basis der Validierungsdaten und fehlerdiagnostischer Erkenntnisse weiter verfeinert und einige Kategorien intern differenziert, um u. a. die zuvor erörterten Testaufgabenanforderungen zu erfüllen (vgl. Kapitel 7.2.1 insbesondere TAA2 und TAA5). Nachfolgend wird die Auswahl der diagnostischen Aufgaben anhand einiger Kategorien exemplarisch begründet.

Für die ausgewählten Kategorien werden zur Verdeutlichung der Anforderungen in dem jeweiligen mathematischen Bereich konkrete Anforderungsprofile als Resultat aus den Ergebnissen der vorhergehenden Stoffanalyse spezifiziert. Außerdem wird im Einzelnen auf die in Kapitel 7.2.1 aufgeführten Testaufgabenanforderungen eingegangen. Im Allgemeinen lässt sich hierzu vorab für alle Aufgaben festhalten (siehe Folgeseite):

- Zu TAA1: Die Aufgabenstellungen fragen in ihrer Gesamtheit alle geforderten mathematischen Grundlagen ab, die zu Beginn der Meisterausbildung vorausgesetzt werden, wobei auf Aufgabenstellungen zur Benutzung des Taschenrechners aus genannten Gründen verzichtet wird. Die Vollständigkeit bzw. repräsentative Abfrage bestimmter Grundlageninhalte, -kenntnisse und -fähigkeiten wird durch die Ermittlung so genannter Indikatoraufgaben gewährleistet. Diese Reduktion des Startaufgabenpools auf eine repräsentative Auswahl so genannter Indikatoraufgaben erfolgt auf Basis statistischer, inhaltlicher und diagnostischer Auswertungen empirischer Daten.[39]
- Zu TAA2: In den einzelnen Unterthemen können in der Regel nicht *alle* relevanten Aufgabentypen und -aspekte abgedeckt werden, da diese in ihrer Gesamtheit zu umfangreich wären, um auch nur für ein Unterthema vollständig in den zeitlichen Rahmen der Tests zu passen.[40]
- Zu TAA3: Alle Aufgabenstellungen sind so gewählt und formuliert, dass sie eindeutig lösbar sind. Eindeutig bedeutet in diesem Fall, dass es genau ein Ergebnis bzw. eine Lösungsmenge gibt, welches ggf. in verschiedenen Schreibweisen formuliert werden kann (bspw. als Bruch oder natürliche Zahl). Einige Aufgabenstellungen zielen aber auch konkret darauf ab, zwar eindeutig formuliert zu sein, aber dennoch vom Lösungsvorgehen her eventuell genau das Komplement des eigentlichen korrekten Ergebnisses zu erhalten. Dieser Aspekt bedient so wiederum die Anforderungen an ein hohes diagnostisches Potential (vgl. TAA5).
- Zu TAA4: Alle Aufgabenstellungen sind von ihren Zahlen und Rechenanforderungen her so konzipiert, dass sie grundsätzlich ohne Zuhilfenahme von Taschenrechnern und Formelbüchern lösbar sein sollen.
- Zu TAA5: Die fehleranalytische Eignung aller Aufgaben ist durch eine systematische Konstruktion auf Basis vorliegender Forschungsergebnisse und eigener rationaler und empirischer Aufgabenanalysen gegeben. Sie wird exemplarisch an einigen Aufgaben dargelegt. Auch werden Aufgaben-

[39] Eine detaillierte Erörterung der statistischen Merkmale des Auswahlverfahrens der Indikatoraufgaben findet sich bei Podlogar [2010].
[40] Eine Erörterung zu dieser Einschränkung erfolgt umgehend im Anschluss (vgl. 7.2.2.1).

konstellationen insbesondere aus fehleranalytischen Aspekten z. B. nur in Aufgabenstellungen mit natürlichen Zahlen formuliert, so dass bspw. die korrekte Anwendung der Rechengesetze identifizierbar ist.

7.2.2.1 Verdeutlichung der Komplexität von Aufgabenaspekten

Jeder Aufgabentyp setzt sich aus verschiedenen Aufgabenaspekten zusammen. Als *Aufgabenaspekte* werden z. B. die Form des Ergebnisses, der Operation oder der jeweiligen Rechenanforderungen einer Aufgabe betrachtet. Allein die voneinander abweichende Reihenfolge von Operanden kann einen unterschiedlichen Aufgabentyp hervorrufen, der einen anderen Schwierigkeitsgrad abbildet: So führen z. B. die Gleichungen $x^2+4x-5=0$, $2x^2+8x-10=0$ und $x(x+4)=5$ prinzipiell zum gleichen Ergebnis, stellen aber unterschiedliche Anforderungen an den Ablauf des Lösungsverfahrens. Des Weiteren bieten unterschiedliche Aufgabentypen – aber sogar Aufgaben innerhalb eines Typus – verschiedene Diagnosemöglichkeiten bzw. -schwierigkeiten (s. hierzu auch TAA5).

In der TAA2 wird die (möglichst vollständige) Abdeckung aller Aufgabenaspekte innerhalb eines Themengebietes durch die Gesamtheit der gestellten Testaufgaben hierzu gefordert. Diese Anforderung stellt eine der anspruchsvollsten TAA dar, da die Komplexität von Aufgabenaspekten immens ist. Nachfolgend werden exemplarisch am Beispiel der Konstruktion reiner Kalkülaufgaben innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen die Erfassung und Kombinationsvarianten von Aufgabenaspekten an sich erörtert. Dabei wird darauf eingegangen, in wie weit sich diese Komplexität und Variationsmöglichkeiten regelrecht exponentiell erweitern, sobald man einen weiteren Aufgabenaspekt hinzunimmt – wie z. B die Erweiterung des Zahlbereichs.

Bei der Konstruktion von Kalkülaufgaben in der Menge der natürlichen Zahlen kommen u. a. folgende Kategorien für Aufgabenaspekte zum Tragen:

- Die Operationsart und das geforderte bzw. notwendige Rechenverfahren,
- die Form der Ausgangsoperanden und des Ergebnisses und die Beziehungen der Operanden zueinander sowie
- die Rechenanforderungen bzw. die Anforderungen bei der Bearbeitung.

In Abbildung 20 werden diese Kategorien und dadurch implizierte Subkategorien verdeutlicht. Diese Aufgabenaspekte können nahezu in jeder Variante miteinander und mit sich selbst kombiniert werden, wodurch sich die bereits erörterten unterschiedlichen Aufgabentypen ergeben.

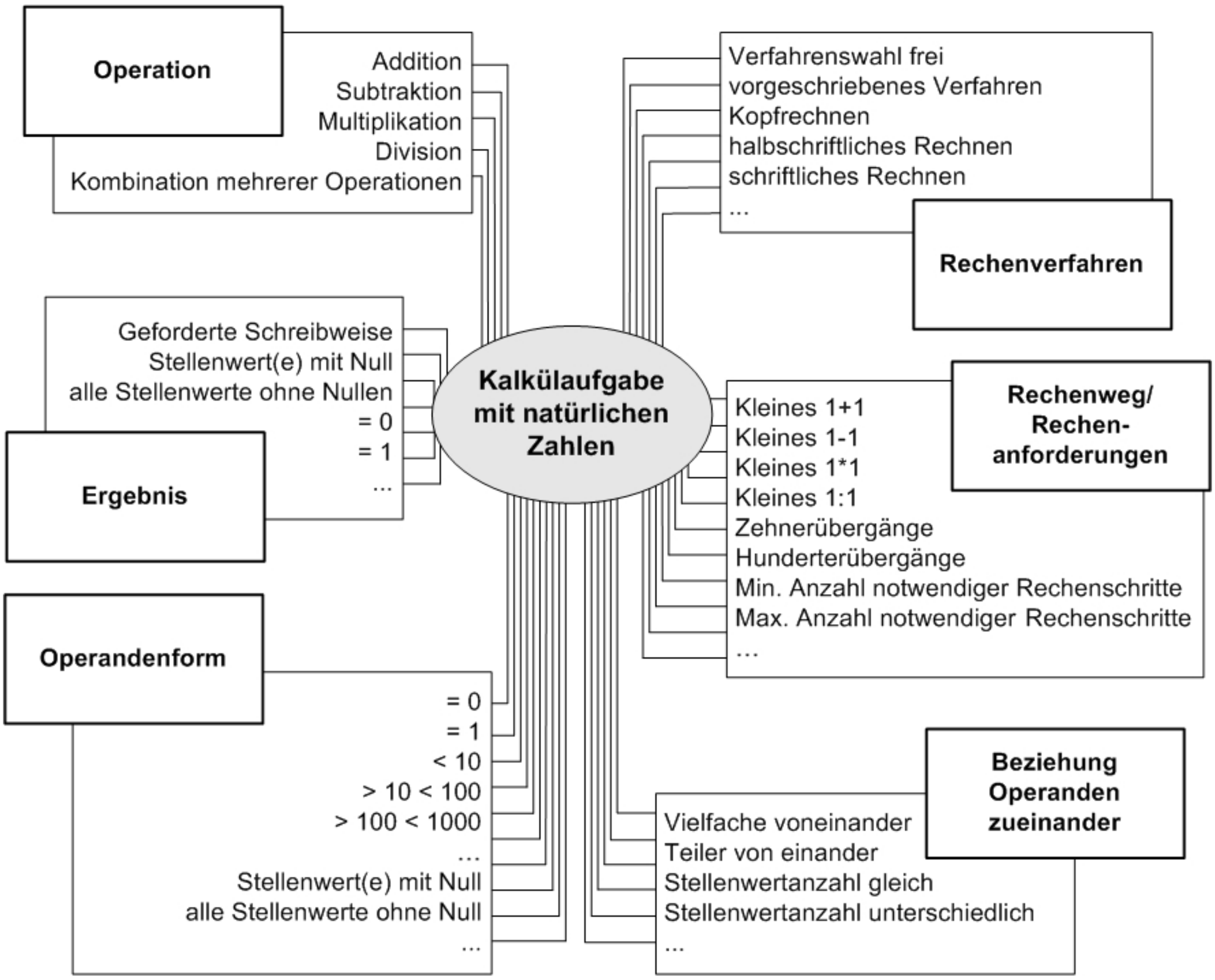


Abbildung 20: Aufgabenaspekte zur Konstruktion von Kalkülaufgaben innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen.

Zu diesen Aspekten kommen mögliche Erweiterungen. Eine mögliche Erweiterung könnte bspw. die Einbindung von Einheiten in das Rechnen mit natürlichen Zahlen sein, wie in Aufgabenstellungen der Form „Berechne die Gesamtlänge: 50m+12m+60cm und gib das Ergebnis in Meter an.“. In diesem Fall müssen die Aufgabenaspekte von Kalkülaufgaben in der Menge der natürlichen Zahlen (vgl. Abbildung 20) u. a. mit den Aufgabenaspekten zum Umrechnen von Einheiten (vgl. Abbildung 21) kombiniert werden (vgl. Abbildung 22). Dadurch nehmen die Aufgabenaspekte und Subkategorien deutlich zu – ebenso wächst die Anzahl möglicher Aufgabentypen nahezu exponentiell an. In Abbildung 23 werden die Auswirkungen dieser Verknüpfung im Ansatz gezeigt.

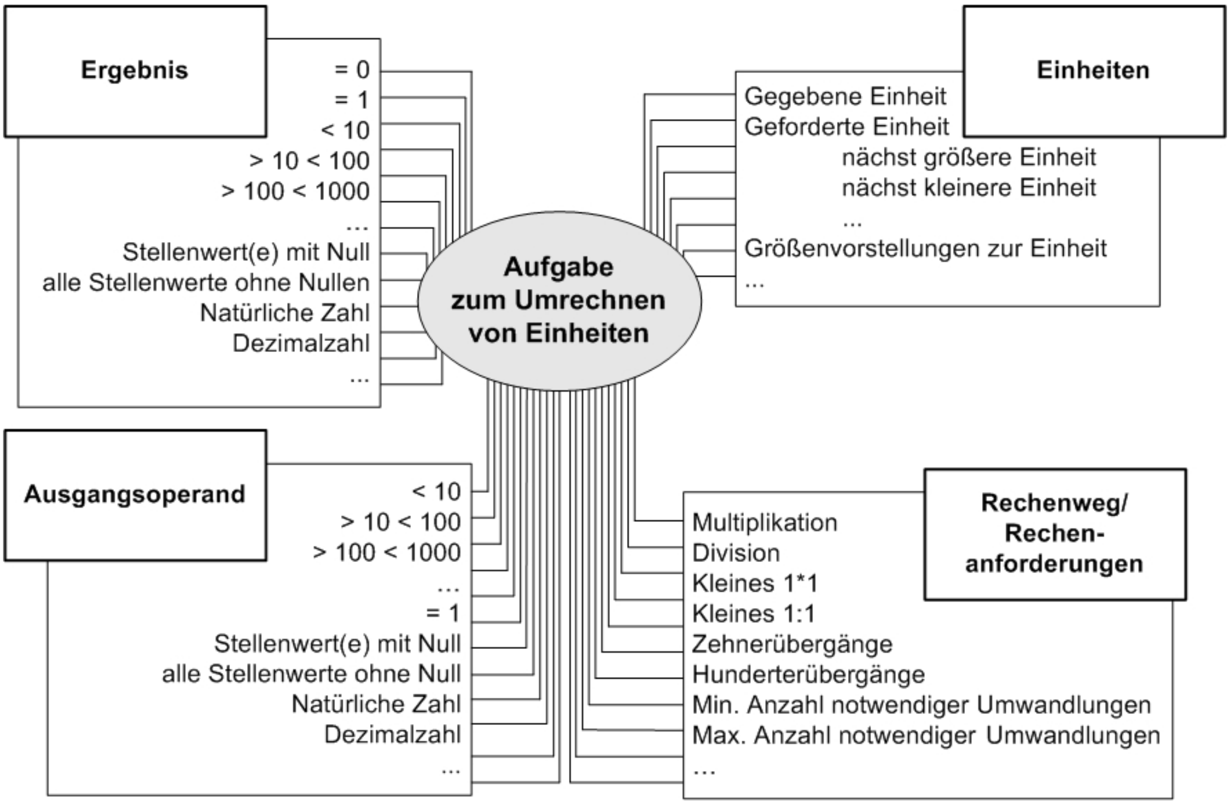


Abbildung 21: Aufgabenaspekte für die Konstruktion grundlegender Aufgaben zum Umrechnen von einer Einheit in eine andere.

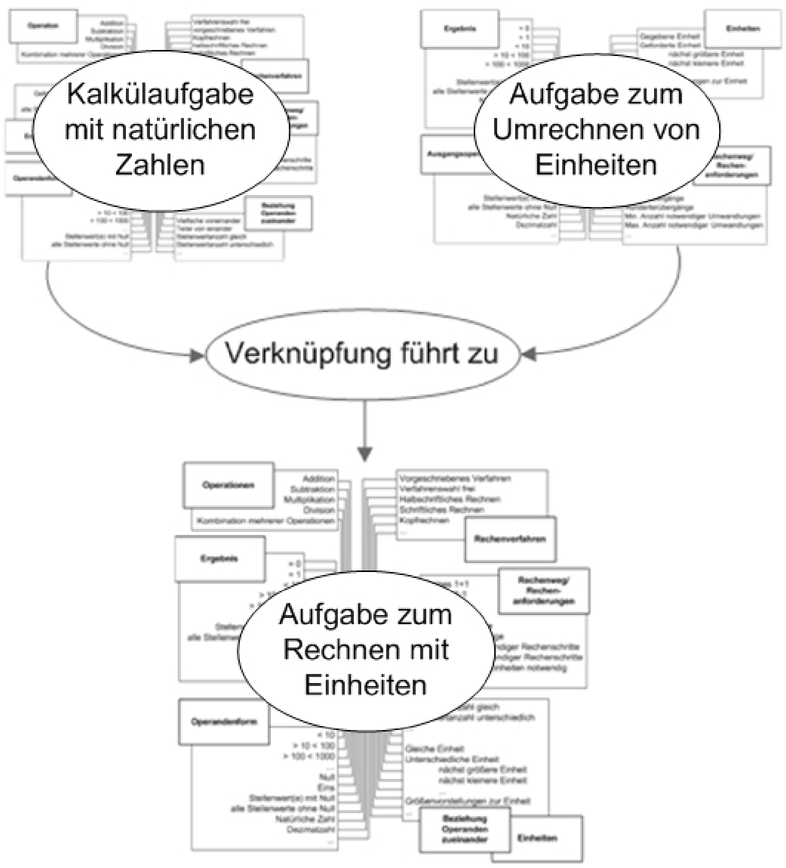


Abbildung 22: Auswirkung der Verknüpfung der Aufgabenaspekte unterschiedlicher Anforderungen.

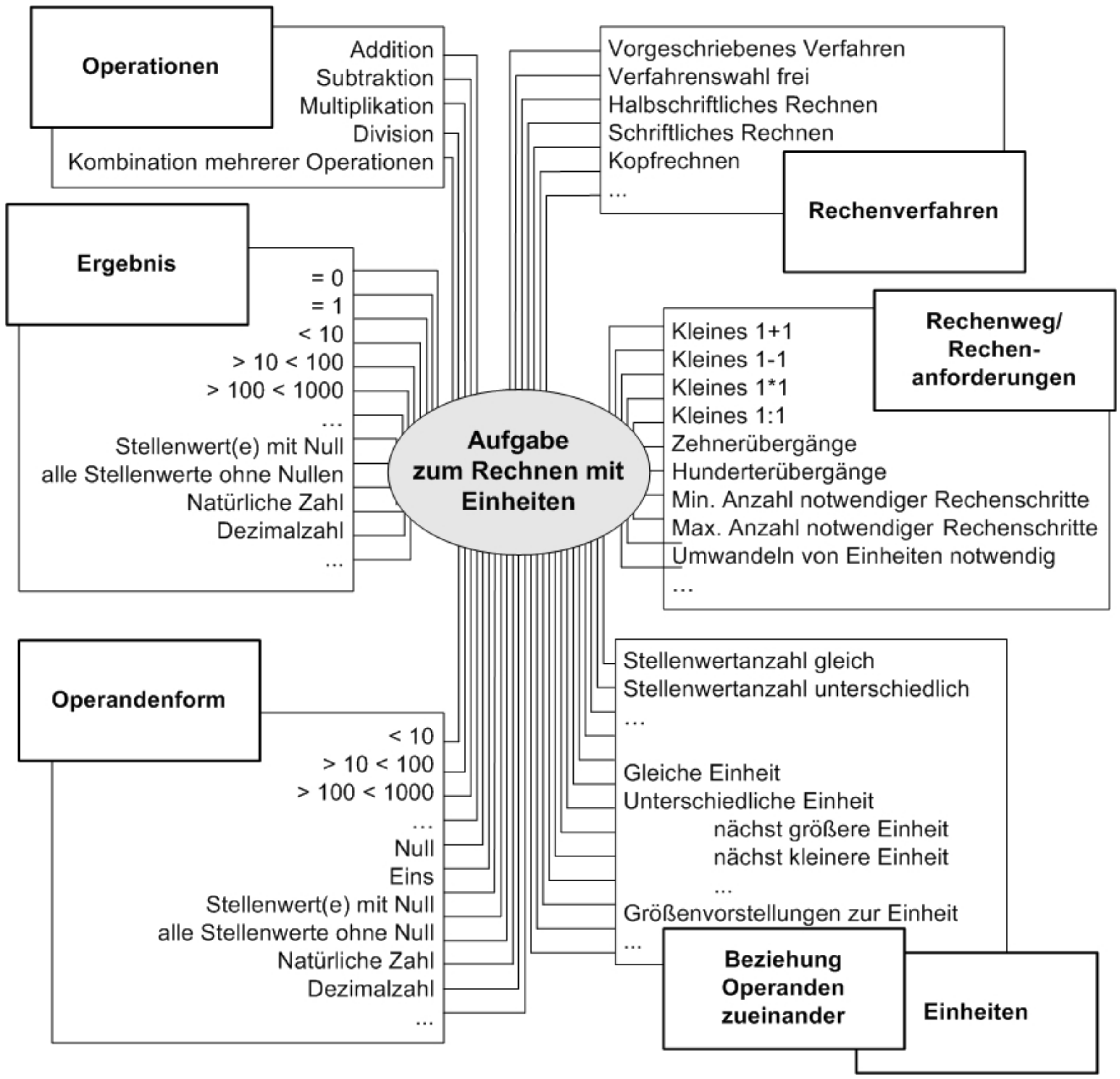


Abbildung 23: Reduzierte Übersicht der Aufgabenaspekte zur Konstruktion von Aufgaben zum Rechnen mit Einheiten. Ergebnis der Konklusion von Aufgabenaspekten aus der Konstruktion von Kalkülaufgaben innerhalb der Menge natürlicher Zahlen mit den Aufgabenaspekten zum Umrechnen von Einheiten.

Die hier an konkreten Beispielen erörterten Aufgabenaspekte verdeutlichen den hohen Anforderungsgrad der TAA2 an die Testkonstruktion. Es ist aufgrund der Komplexität unmöglich, in einem diagnostischen Testverfahren alle Aufgabentypen unterzubringen. Daher habe ich bei der Testkonstruktion durch die Anwendung der Methoden rationaler und empirischer Aufgabenanalysen und die Einbindung fehleranalytischer Erkenntnisse die grundlegenden Aufgabentypen mit hohem diagnostischem Potential extrahiert. Denn trotz der Vielfältigkeit der Aufgaben soll sich die Anzahl insgesamt in einem bestimmten, von den Probanden in einem angemessenen Zeitfenster zu bewältigendem

Rahmen halten. Alle Aufgabenformen hinsichtlich ihrer möglichen Ergebnisse und der Kombination der Aufgabenaspekte in der Aufgabenstellung an sich können daher und aufgrund der Vielfältigkeit möglicher Differenzierungsaspekte nicht abgedeckt werden. Abbildung 24 verdeutlicht diese Komplexität von Aufgabenaspekten an einem weiteren Beispiel für die Konstruktion reiner Kalkülaufgaben im Bereich der Bruchrechnung ohne expliziten Einbezug der arithmetischen Aspekte.

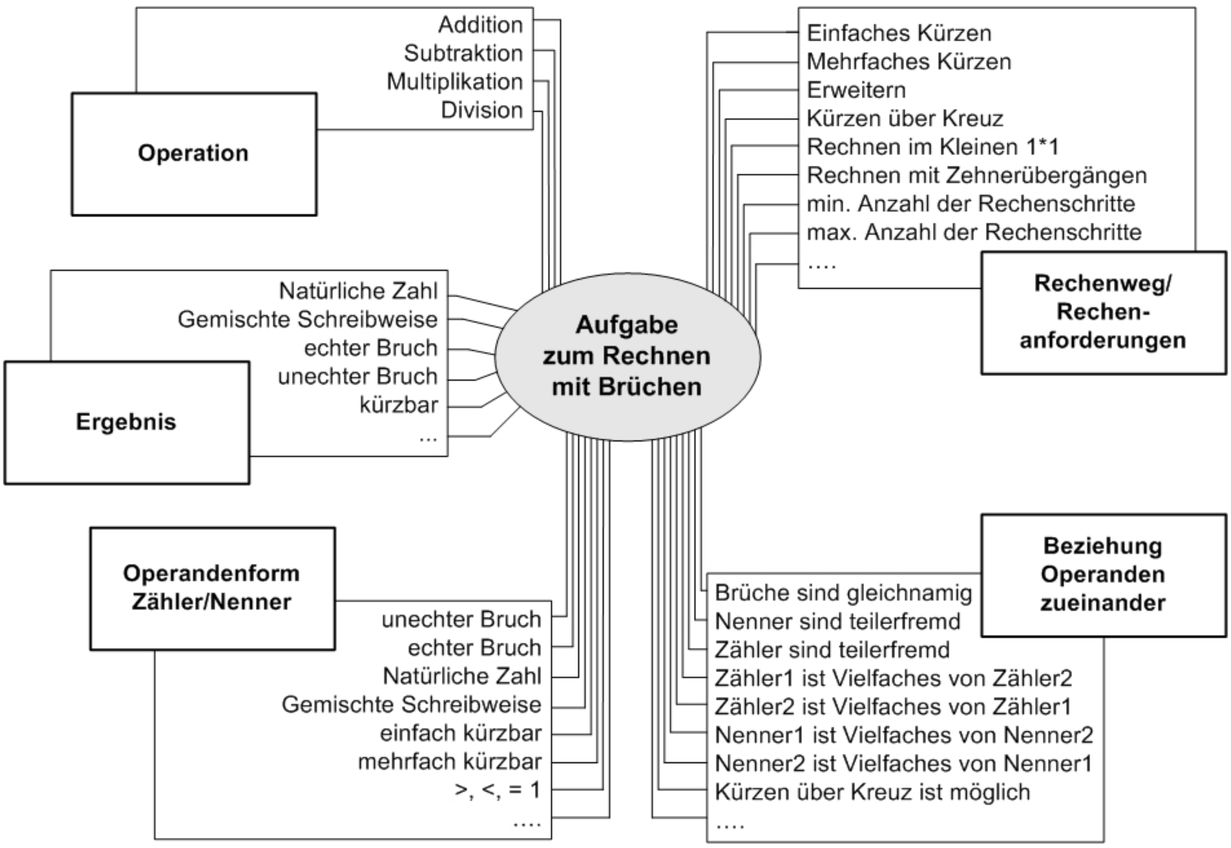


Abbildung 24: Aufgabenaspekte für die Konstruktion grundlegender Aufgaben zum Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Nachfolgend werden exemplarisch einige Themengebiete, die dazu für die Zielgruppe erarbeiteten Anforderungsprofile sowie die speziell entwickelten Aufgabenstellungen fokussiert, wobei die vorab dargestellten Aufgabenaspekte innerhalb jedes einzelnen Themenbereichs ermittelt und berücksichtigt wurden.

7.2.2.2 Testitementwicklung für die Startaufgabensammlung

Die Stoff- und Aufgabenanalyse I (vgl. Kapitel 7.1) haben gezeigt, dass die zu Beginn der Meisterausbildung vorausgesetzten mathematischen Grundlagen i. d. R. in komplexere berufsspezifische Aufgabenstellungen eingebettet sind. Dabei treten zudem diverse mathematische Inhaltsbereiche bzw. Anforderungen in Kombination miteinander auf. Sehr häufig ist dabei die Einbindung von und das Rechnen mit Einheiten berufsbedingt unvermeidlich, welches bspw. in Verbindung steht mit

- dem Rechnen in der Menge der natürlichen Zahlen,
- dem Rechnen in der Menge der reellen Zahlen,
- und dem Anwenden von grundlegenden Rechengesetzen und -verfahren.

Bei der Aufgabenkonstruktion zu diagnostischen Zwecken – im konkreten Fall, um die Testaufgabenanforderungen u. a. zur Ermittlung des diagnostischen Potentials von Aufgaben zu erfüllen – sollten die einzelnen mathematischen Anforderungen aus den Probandenantworten gut separierbar sein. D. h., dass bei der empirischen Aufgabenanalyse aus fehleranalytischer Sicht (möglichst) sicher[41] erkennbar sein sollte, ob ein falsches Ergebnis durch einen Rechenfehler, den Einbezug falscher oder die fehlerhafte Anwendung von Rechengesetzen oder bspw. beim Umrechnen von Einheiten durch eine falsche Umrechnungsvorschrift entstanden ist.

So habe ich bei der Konstruktion der Diagnoseaufgaben für das geplante Erhebungsverfahren u. a. Aufgaben entwickelt oder aus bewährten diagnostischen Tests herangezogen, die nur das Rechnen in der Menge der natürlichen Zahlen in Kombination mit dem Einsatz grundlegender Rechengesetze beinhalten, wie z. B. das Assoziativ- und Kommutativgesetz und die Punkt-vor-Strich-Rechnung.

Exemplarisch bespreche ich im Folgenden für die Inhaltsbereiche Arithmetik und Algebra einige aus der Stoffanalyse resultierende Anforderungsprofile und dazu konstruierte Diagnoseaufgaben für die schriftlichen Erhebungen mit der Startaufgabensammlung. Daran thematisiere ich jeweils hinsichtlich der

---

41 Eine hundertprozentige Analyse der Fehlerquelle(n) ist in der fehleranalytischen Forschung nicht möglich. Man ziehe hierzu auch Kapitel 5 heran.

Aufgabenkonstruktion die Fragestellung nach dem diagnostischen Potential dieser Aufgaben. Die aufgezeigten Anforderungsprofile sind vorerst berufsübergreifend zu betrachten.

Anforderungsprofil *Grundrechenarten und Rechengesetze*

Die Meisterschüler sollen zu Beginn ihres Meisterlehrgangs …

- flüssig (im Kopf) mit natürlichen Zahlen in allen vier Grundrechenarten rechnen können
- und die Rechengesetze wie „Punkt-vor-Strich-Rechnung", das Assoziativ- und das Kommutativgesetz korrekt anwenden können.

Dieses Anforderungsprofil bildet die Basis für alle anderen mathematischen Anforderungsprofile, da alle weiteren mathematischen Zusammenhänge, Gesetze, Algorithmen etc. diese Kompetenzen voraussetzen. Aus diesem Grund stellen die konstruierten Testaufgaben zu diesem Bereich auch innerhalb des so genannten Grundblocks die oberste Ebene dar (vgl. Abbildung 31).

Aufgabenkonstruktion *Grundrechenarten und Rechengesetze*

Wie bereits vorab erörtert sind die Aufgabenaspekte für die Aufgabenkonstruktion der hier geforderten Grundrechenarten und Rechengesetze innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen bereits in diesem „Basissektor" sehr komplex (vgl. Abbildung 20 und die entsprechenden Ausführungen). Bereits die Kombination der vier Grundrechenarten – also der Operationen – allein stehend, mit sich selbst oder miteinander bildet ohne Beachtung weiterer Aufgabenaspekte eine sehr umfangreiche Kombinationsmenge. So gibt es bspw. mit zwei Operanden vier Aufgabentypen:

Typ 1: Addition von zwei Operanden
Typ 2: Subtraktion von zwei Operanden
Typ 3: Multiplikation von zwei Operanden
Typ 4: Division von zwei Operanden

Tabelle 19: Basis-Aufgabentypen zu Grundrechenarten (ohne Berücksichtigung weiterer Aspekte und Verknüpfungen).

Diese vier Typen wiederum können mit sich selbst und mit den anderen Aufgabentypen und Aufgabenaspekten verknüpft werden. So kann allein unter ausschließlicher Betrachtung und Kombination des Aufgabenaspektes „Operation“ eine unüberschaubare Vielfalt von Aufgabentypen entstehen (vgl. Tabelle 20), wodurch zwangsläufig schon an dieser Stelle eine Begrenzung notwendig wird. Denn schließlich sollen auch die anderen Aufgabenaspekte, wie die Ausgangs- und Zieloperanden, die Beziehungen der Operanden zueinander etc. Beachtung bei der Aufgabenkonstruktion finden.

○	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	…	…
Typ 1	Typ 5	Typ 6	Typ 7	Typ 8		
Typ 2	Typ 9	Typ 10	Typ 11	Typ 12		
Typ 3	Typ 13	Typ 14	Typ 15	Typ 16		
Typ 4	Typ 17	Typ 18	Typ 19	Typ 20		
Addition	Typ 21	Typ 22	Typ 23	Typ 24	…	…
Subtraktion	Typ 25	Typ 26	Typ 27	Typ 28	…	…
Multiplikation	Typ 29	Typ 30	…	…	…	…
Division	Typ 33	…	…	…	…	…
Typ 5	…	…			…	…
…	…	…			…	…

Bsp.:
a – b + c + d =

Bsp.:
a – b + c =

Bsp.:
a : (b + c) =

Tabelle 20: Mögliche Aufgabentypen unter ausschließlicher Betrachtung und Kombination des Aufgabenaspektes „Operation“.

Verschiedene Untersuchungen zur Fehleranalyse (vgl. Kapitel 5.3) sind zu dem Ergebnis gelangt, dass u. a. die Beachtung der Regelung „Punkt-vor-Strich-Rechnung“ vielen Schülern Schwierigkeiten bereitet. Sie arbeiten den Aufgabenterm von links nach rechts – also in Leserichtung – ab und beachten dabei diese Rechenvorschrift nicht. Dieses Problem tritt in ähnlicher Form auch beim Rechnen mit Klammern auf. Diese Hauptfehlertypen stehen bei der Aufgabenkonstruktion im Vordergrund (vgl. z. B. Tabelle 21). Zu jedem Item wurden für analoge Testvariationen so genannte Parallelaufgaben[42] konstruiert. Parallelaufgaben stellen dabei Aufgaben desselben Typus dar und sollen bei der empirischen Aufgabenanalyse die Möglichkeit bieten, eventuelle zusätzliche Differenzierungsaspekte aufzuzeigen. Diese könnten bspw. durch Beziehungen zwischen den Operanden entstehen oder auf die Operandenform und ihre Eigenschaften an sich zurückzuführen sein. Ebenso würden sich bei der rationalen Aufgabenanalyse nicht direkt ersichtliche Perseverationseffekte bspw. einer sich häufig in der Aufgabenstellung wiederholenden Ziffer zeigen.

ID	Aufgabe	ID	Parallelaufgabe I	ID	Parallelaufgabe II
Aae	$3\cdot(700+12)=$	Abe	$4\cdot(200+8)=$	Ace	$5\cdot(100+25)=$
Aad	$(17+123)-(-20\cdot 2)=$	Abd	$(43+17)-(15\cdot 2)=$	Acd	$(12+28)-(-10\cdot 2)=$
Aaa	$127-35\cdot 2=$	Aba	$213-20\cdot 2=$	Aca	$326-30\cdot 2=$

Tabelle 21: Auswahl einiger Diagnoseaufgaben zum Anforderungsprofil „Grundrechenarten und Rechengesetze“ mit Parallelaufgaben.

Die Aufgabentypen mit den IDs Aaa, Aba und Aca (vgl. Tabelle 21) vereinen die Aufgabenaspekte

- Operation: mit einer Kombination aus Multiplikation und Subtraktion, wobei bedingt durch die Anordnung der Operationssymbole die Rechenregel „Punkt-vor-Strich-Rechnung“ erzwungen wird.
- Operanden- und Ergebnisform: alle Zahlen sind Elemente der Menge der natürlichen Zahlen
- Rechenverfahren: frei wählbar, durch Kopfrechnen lösbar
- Rechenanforderungen: Verdoppeln und Subtraktion eines Vielfachen von 10 mit Hunderterübergang

Trotz der vielen Aufgabenaspekte ermöglichen die Aufgaben in der empirischen Aufgabenanalyse eine sehr gute Differenzierung von Fehlern. Um dieses diagnostische Potential der Aufgaben zu bewerten, wurde bei der Aufgabenent-

---

42 Synonym zum Begriff Parallelaufgaben wird auch die Bezeichnung Analogaufgaben verwendet.

wicklung zudem eine rationale Aufgabenanalyse angewendet. Zu jedem Testitem wurden mögliche typische fehlerhafte Bearbeitungsvarianten antizipiert. Diese wurden jeweils daraufhin analysiert, ob Fehler möglichst eindeutig isoliert werden können. Hierbei greife ich auf die Erkenntnisse bestehender Untersuchungen (vgl. Kapitel 5) zurück und transferiere sie bei Bedarf. Die nachfolgend aufgezeigten theoretischen Fehleranalysen (vgl. Abbildung 25, Abbildung 26) greifen bspw. die Erkenntnis auf, dass Fehler häufig dadurch entstehen, dass nicht alle Aufgabenmerkmale erfasst werden. Ebenso finden sich hier wie auch bei allen folgenden Testaufgabenkonstruktionen mögliche Perseverationsfehler. Hierzu seien einige im Rahmen der rationalen Aufgabenanalyse antizipierte Bearbeitungsvarianten aufgezeigt. Daran stelle ich dar, welche Fehler sich darin isolieren lassen:

Antizipierte Bearbeitungsvariante I:	$3\cdot(700-12)=2088$	
Mögliche Fehleranalyse zu I:	$\underbrace{3\cdot(700}_{3\cdot 700=2100}\ -12)$ $\rightarrow \underbrace{2100-12}_{2088}$ $\rightarrow 2088$	Rechnen von links nach rechts ohne Beachtung der Klammern → Mißachtung des Distributivgesetzes, Korrektes Rechnen in $\mathbb{N}$
Antizipierte Bearbeitungsvariante II:	$3\cdot(700-12)=2094$	
Mögliche Fehleranalyse zu II:	$3\cdot\underbrace{(700-12)}_{698}$ $\rightarrow 3\cdot 698$ $\rightarrow 2094$	Beachtung der Klammersetzung, Rechenfehler in $\mathbb{N}$ bei Subtraktion mit Hunderter- und Zehnerübergang, Korrekte Multiplikation in $\mathbb{N}$
Antizipierte Bearbeitungsvariante III:	$3\cdot(700-12)=2034$	
Mögliche Fehleranalyse zu III:	$3\cdot\underbrace{(700-12)}_{678}$ $\rightarrow 3\cdot 678$ $\rightarrow 2034$	Beachtung der Klammersetzung, Rechenfehler in $\mathbb{N}$ bei Subtraktion mit Hunderter- und Zehnerübergang, Korrekte Multiplikation in $\mathbb{N}$
Antizipierte Bearbeitungsvariante IV:	$3\cdot(700-12)=2136$	
Mögliche Fehleranalyse zu IV:	$3\cdot(700-12)$ $\rightarrow \underbrace{3\cdot 700}_{2100}+\underbrace{3\cdot 12}_{36}$ $\rightarrow 2136$	Beachtung der Klammersetzung, Fehler bei Anwendung des Distributivgesetzes durch Umkehrung des Vorzeichens, Korrekte Multiplikation und Addition in $\mathbb{N}$

Abbildung 25: Exemplarische Fehleranalysen bei antizipierten Bearbeitungsvarianten zu entwickelten Testaufgaben.

Die aufgeführten Fehleranalysen in Abbildung 25 lassen die nahezu eindeutige Isolation eines Fehlers zu. Ebenso sind aber auch mehrere Fehler innerhalb der Bearbeitung durch einen Probanden möglich. Auch dieser Aspekt wurde berücksichtigt und die Aufgaben so konstruiert, dass durch eine genaue Analyse möglichst klar erkennbar wird, welche Fehler und Bearbeitungsschritte zu dem Ergebnis des Probanden geführt haben müssten. Abbildung 26 zeigt zwei einfache Varianten von Fehlerkombinationen innerhalb einer Rechnung. Es sind durchaus weit kompliziertere Verknüpfungen antizipiert und bei der Konstruktion aller Aufgaben stets mit bedacht worden. Inwiefern diese in der Realität von Probanden tatsächlich genutzt werden, werden die anschließenden empirischen Erhebungen und deren Datenanalyse zeigen.

Antizipierte Bearbeitungsvariante V: $3\cdot(700-12)=2112$

Mögliche Fehleranalyse zu V:	$\underbrace{3\cdot(700}_{3\cdot 700=2100}\;-12)$ $\rightarrow \underbrace{2100-12}_{2100+12=2112}$ $\rightarrow 2112$	Rechnen von links nach rechts ohne Beachtung der Klammern → Missachtung des Distributivgesetzes, Fehlerhafte Umkehrung des Vorzeichens

Antizipierte Bearbeitungsvariante VI: $3\cdot(700-12)=2094$

Mögliche Fehleranalyse zu VI:	$3\cdot\underbrace{(700-12)}_{698}$ $\rightarrow 3\cdot 698$ $\rightarrow 2098$	Beachtung der Klammersetzung, Rechenfehler in N bei Subtraktion mit Hunderter- und Zehnerübergang, Rechenfehler in N bei Multiplikation, eventuell Perseveration der „98"

Abbildung 26: Exemplarische Fehleranalysen antizipierter Bearbeitungsvarianten entwickelter Testaufgaben – Mögliche, einfache Kombinationen mehrerer Fehler innerhalb einer Rechnung.

Da sich bei der Aufgabenkonstruktion herausstellte, dass in den bisher vorgestellten Aufgabentypen auch die Isolation grundlegender Rechenfehler in der Menge der natürlichen Zahlen gut funktioniert, habe ich entschieden, nur ganz bestimmte „reine“ Kopfrechenaufgaben mit zwei Operanden in die Tests mit aufzunehmen und auf andere vom Typ 1 bis Typ 3 zu verzichten (vgl. Tabelle 20). In der Auswahl enthalten sind Divisionsaufgaben, die sich auch in den in Kapitel 5.3.1 zusammengefassten Untersuchungen als die schwierigsten herausstellten. So wurden Aufgaben generiert, die außerhalb des kleinen Eins-durch-Eins liegen, aber dennoch im Kopf prinzipiell gut zu lösen sind, wie z. B. 456:8=__ und 335:5=__.

Ebenso entstanden einfache Aufgaben – die Rechenanforderungen betreffend – zum Bereich „Rechnen mit und Umrechnen von Einheiten“. Hierbei wird zwangsläufig auch das Rechnen in der Menge der reellen Zahlen mit integriert, da ein Umrechnen einer Zahl von einer Einheit in eine andere i. d. R. irgendwann immer eine Dezimalzahl zur Folge hat: So gilt zwar $20.000mm = 2.000cm = 20m$ und es kann im Bereich der natürlichen Zahlen agiert werden, doch eine Umrechnung in Kilometer bedingt die Erweiterung des Zahlenraums ($20m = 0{,}02km$).

<u>Anforderungsprofil *Rechnen mit und Umrechnen von Einheiten*</u>

Die Meisterschüler sollen zu Beginn ihres Meisterlehrgangs

- berufsspezifische Einheiten kennen und
- Werte von einer Einheit in eine andere umrechnen können.

D. h., sie müssen auch die Umrechnungsverhältnisse zwischen verschiedenen Einheiten kennen und über die notwendigen Rechenfähigkeiten in der Menge der reellen Zahlen verfügen.

<u>Aufgabenkonstruktion *Rechnen mit und Umrechnen von Einheiten*:</u>

Das Rechnen mit Einheiten ist ein typischer Bestandteil der mathematischen Anforderungen aller Berufsrichtungen – letztlich unterscheiden sich die mathematischen Anforderungen vorrangig darin, mit welchem Faktor oder welcher Vorschrift konkret umgerechnet werden muss. So gilt für Kilometer bspw. die Umrechnungskette:

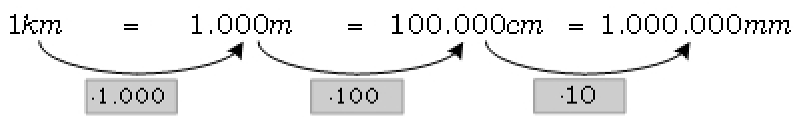


Abbildung 27: Umrechnungskette/-vorschrift mit Zehnerpotenzen.

Ähnliche oder analoge Umrechnungsvorschriften – im konkreten Fall die Multiplikation mit Zehnerpotenzen – gelten für viele weitere, auch berufsspezifische Einheiten. Aus diesem Grund habe ich für die Erhebung typischer Fehler für dieses Anforderungsprofil auf Einheiten zurückgegriffen, die zum einen für alle Probanden einen Realitätsbezug darstellen und die zum anderen Umrechnungsvorschriften beinhalten, die auch für andere, berufsspezifische Einheiten gelten. So ist es vorgesehen, dass nach der empirischen Aufgabenanalyse der Probandendaten und der Bestimmung von Indikatoraufgaben, diese Aufgaben zum Rechnen mit und Umrechnen von Einheiten ggf. je nach Bedarf in den gegebenen Aufgaben in berufsspezifische Einheiten geändert werden. Diese müssen den gleichen Umrechnungsvorschriften entsprechen und ermöglichen so später im Online-Test die gewünschte berufliche Spezifikation.

Bei der Formulierung der Aufgabenstellungen ist es in diesem Bereich sinnvoll, die Bemerkung hinzuzufügen, dass es sich im Folgenden um Einheitenbezeichnungen handelt und nicht um Variablen. So können Missverständnisse und dadurch bedingte Fehler weitestgehend vermieden werden. Denn eine Aufgabe hinsichtlich dieser Differenzierung mit demselben Ergebnis kann einmal als falsch und einmal als korrekt ausgewertet werden (vgl. Abbildung 28):

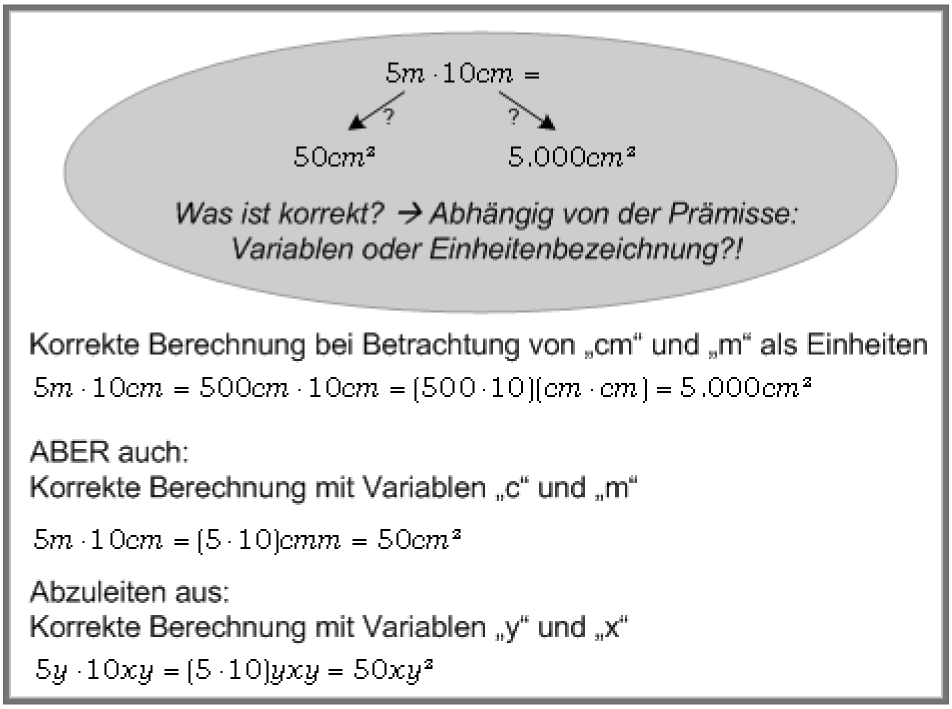


Abbildung 28: Relevanz des Hinweises auf Variablen oder Einheiten bei der Formulierung der Aufgabenstellung von Testaufgaben zum Rechnen mit Einheiten.

Bei Entwicklung der Testaufgaben für diesen Bereich wurde des Weiteren darauf geachtet, fehlerhafte Ergebnisse so differenziert betrachten zu können, dass zwischen

- grundlegenden Rechenfehlern (abgegrenzt von Rechenfehlern aufgrund falscher Kommasetzung),
- einer fehlerhaften Einheitenangabe sowie

- einem falschen Zahlwert im Ergebnis, der auf einen falschen Umrechnungsoperanden zurückzuführen sein könnte[43],

unterschieden wird. Diese seien an einigen Beispielen exemplarisch aufgezeigt (vgl. Abbildung 29):

$0{,}8m \cdot 6m$ $\rightarrow 4{,}8m$	Korrekte Rechnung, Fehler in der Ergebniseinheit
$0{,}8m \cdot 6m$ $\rightarrow 0{,}48m^2$	Rechenfehler, vermutlich durch falsche Kommasetzung, Einheit korrekt
$0{,}8m \cdot 6m$ $\rightarrow 5{,}6m^2$	Rechenfehler, vermutlich Fehler im kleinen Einmaleins, Einheit korrekt
$0{,}8m \cdot 6m$ $\rightarrow 4{,}6m$	Rechenfehler, vermutlich Fehler im kleinen Einmaleins, Fehler in der Ergebniseinheit

Abbildung 29: Mögliche Fehlerdifferenzierung bei Aufgaben zum Rechnen mit Einheiten.

Da es bei allen Testaufgaben um die Frage geht, ob bzw. inwieweit die angehenden Meisterschüler diese Aufgaben bewältigen, habe ich so weit wie möglich versucht, die verschiedenen Anforderungsprofile in kleinstmögliche Teilaspekte zu zerlegen. So gibt es bewusst keine Berechnungen mit Einheiten *und* rationalen Zahlen, da dies eine Fehlerdifferenzierung unnötig komplex werden lässt. Im Übrigen ist festzustellen, dass es beim Rechnen mit Einheiten stets um mindestens zwei Fragestellungen geht:

- Sind die korrekte Umrechnungsvorschrift und die daraus resultierende Einheit bekannt?
- Ist die Berechnung – im Sinne der Rechenanforderungen an sich – korrekt?

Diese Fragestellungen nehmen entsprechend der Komplexität der Aufgabenaspekte zu, sobald weitere Aspekte verknüpft werden. Beim Umstellen von Formeln bspw. kommen zu den Einheitsaspekten auch Anforderungen im Bereich der Bruchrechnung, dem Umgang mit Potenzen und Wurzeln und prinzipiell das Verständnis der Bedeutung des Gleichheitszeichens hinzu.

---

[43] Dementsprechend wurden auch die Korrekturvorschriften für diese Aufgaben so vorgegeben, dass eine differenzierte Betrachtung von Rechenergebnis und Einheit erfolgt.

Aufgrund dessen habe ich die Aufgaben mit Formeln u. a. gegliedert in das *Umstellen von Formeln* nach bestimmten Variablen und das *Rechnen mit Formeln* (siehe Anforderungsprofil *Formelumstellung*).

Anforderungsprofil *Formelumstellung*

Die Meisterschüler sollen zu Beginn ihres Meisterlehrgangs ...

- Formeln nach gesuchten Variablen umstellen können.

Aufgabenkonstruktion *Formelumstellung*:

Für alle Testaufgaben zur Formelumstellung, aber auch die anschließend konstruierten Aufgaben zum Rechnen mit Formeln, wurde als Ausgangspunkt die Formel nach grundlegenden Aspekten, wie dem Vorkommen eines Bruches, einer Wurzel etc. differenziert. So entstanden folgende Kategorien:

Formeln mit Summen	$x = y + z$
Formeln mit Produkten	$x = y \cdot z$
Formeln mit Brüchen	$x = \frac{y}{z}$
... und Produkten	$x = \frac{y \cdot w}{z}$
... und Summen (Zähler)	$x = \frac{y + w}{z}$
... und Summen (Nenner)	$x = \frac{y}{z + w}$
... Summen, Produkten etc.	$x = \frac{y \cdot (v - q)}{z + w}$
Formeln mit Potenzen	$x = y^2 + z$
... und Brüchen	$x = \frac{y^2}{z}$
Formeln mit mehrfachem Auftreten der gesuchten Variablen:	$x = \frac{y \cdot z}{y + w}$

Tabelle 22: Kategorisierung von Formelaspekten zur Aufgabenkonstruktion. Unter Einbezug der Veröffentlichungen von Bastian et al. [2005], Gescheidle [2008].

Hinsichtlich der Einbindung berufsspezifischer Formeln können in den letztlich ausgewählten Indikatoraufgaben die Formeln nach diesen Kategorien für jeden Beruf entsprechend ausgewählt werden.

Ich habe die Anforderungsprofile und die dafür konstruierten Testaufgaben so differenziert, dass schon an dieser Stelle die Einsatzform dieser Testaufgaben für die Defizit- und Fehleranalyse bedacht wurde. So geht es zum einen darum, aus der auf der Erhebung mit diesen Testaufgaben aufbauenden empirischen Aufgabenanalyse die entsprechenden Antwortalternativen für jede Aufgabe zu konstruieren. Zum anderen sollen zu diesen Antwortalternativen ausformulierte Hinweistexte entstehen, die eine möglichst konkrete Fehlerdiagnose liefern. D. h., dass diese Fehlerhinweise zumindest differenzieren sollten, ob bspw. ein Rechenfehler vorliegt oder nur die falsche Einheit angegeben wurde. Sofern möglich – und darauf ziele ich in Kapitel 7.2.5.3 ab – sollen diese Fehlerhinweise auf Basis konkreter Fehlermusterbeschreibungen erfolgen.

7.2.3 Aufgabenabhängigkeiten

Der entwickelte Startaufgabenpool ist trotz aller bereits vorgenommenen Reduktionen so umfangreich, dass nicht alle Testitems in *einem* Test abgefragt werden können. Daher ist eine Aufteilung auf mehrere Testbögen unumgänglich. Die rationalen Aufgabenanalysen hinsichtlich der Aufgabenanforderungen haben bereits gezeigt, dass es Basisgebiete bzw. -kompetenzen wie das Rechnen mit natürlichen Zahlen oder die Anwendung von Rechenregeln gibt. Diese haben insbesondere fehleranalytisch betrachtet Einfluss auf alle weiteren Themengebiete und Kompetenzen.

Meine Idee für die Verteilung der Testitems auf mehrere Tests ist, voneinander abhängige Itemkomplexe zu bilden. In jedem Test soll mindestens ein Komplex mit allen dazu grundlegenden Komplexen abgebildet werden. So ist bspw. in jedem Test die Arithmetik als Grundlage für alle anderen Komplexe beinhaltet im Grundblock. Bei der fehleranalytischen Auswertung der Tests kann so u. a.

eine intrapersonelle Auswertung erfolgen, die Zusammenhänge auch auf diagnostischer Ebene themenübergreifend aufzeigen könnte[44].

Die Stoffanalyse lieferte die in Kapitel 7.1 angegebenen mathematischen Grundlagen. Die dazu im Rahmen dieser Arbeit anschließend durchgeführte rationale Aufgabenanalyse führte zu einer Clusterung dieser Grundlagen im Sinne eines Abhängigkeitsschemas. So findet man bspw. in der Gleichung „$x^2+2x-8=0$“ einer Aufgabe zum Lösen quadratischer Gleichungen u. a. Anforderungen aus dem Rechnen mit natürlichen Zahlen, der Bruchrechnung, dem Rechnen mit Potenzen etc. (vgl. Abbildung 30). In Kapitel 7.1.1 wird ausführlich erörtert, wie die unterschiedlichen Aufgabenanforderungen aus einer Aufgabe extrahiert werden.

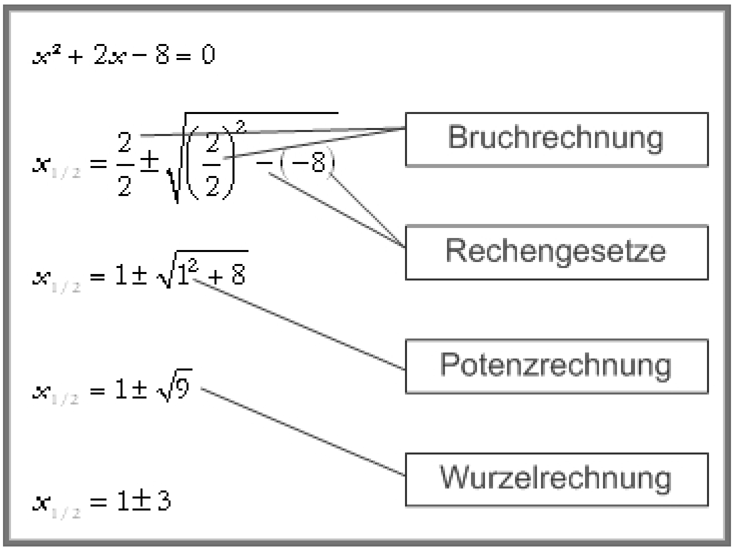


Abbildung 30: Direkt extrahierbare Anforderungen aus verschiedenen mathematischen Bereichen beim Lösen einer quadratischen Gleichung.

Abbildung 31 zeigt das Ergebnis der Grobclusterung im Überblick. Die groben Cluster sind wiederum in sich weiter differenziert, wobei inhaltliche Zusammenhänge durch die Grobclusterung und inhaltliche Abhängigkeiten durch die Bezugspfeile aufgezeigt werden. Diese Zusammenhänge und Abhängigkeiten ergeben sich auf Basis von Hypothesen, die aus den Ergebnissen der Stoff- und Aufgabenanalyse gebildet wurden.

---

[44] Diese Auswertung ist im Anschluss an diese Arbeit vorgesehen. Im Rahmen der nachfolgenden Analysen wird dieser Aspekt aber bereits auszugsweise mit einbezogen.

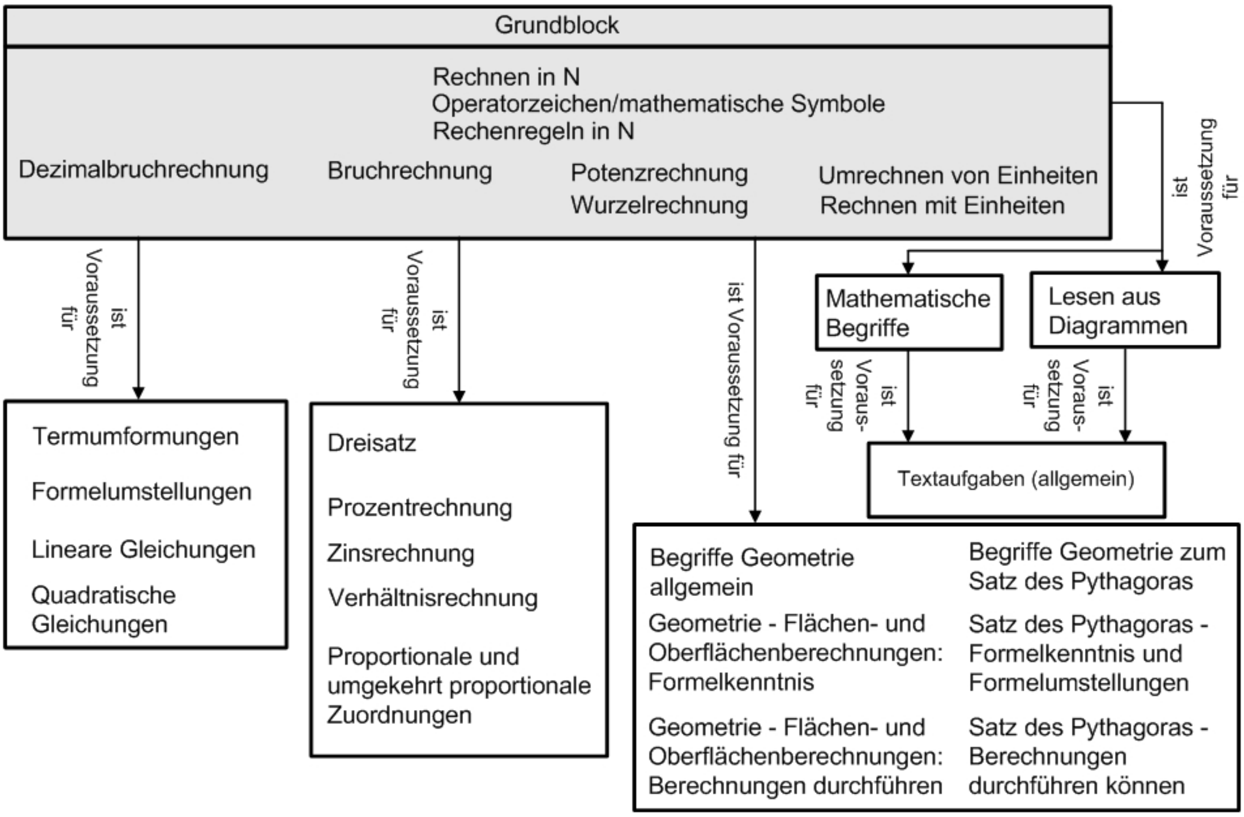


Abbildung 31: Inhaltliche Strukturierung der Tests – Aufgabengebiete und Abhängigkeiten (Grobclusterung).

7.2.4 Rahmenbedingungen der Erhebungen

Die Startaufgabensammlungen wurden von 454 Schülern zu Beginn ihres Meisterkurses direkt in einer der ersten Veranstaltungen bearbeitet. Dabei kamen drei Testvarianten A, B, C zum Einsatz. Bei der Auswahl der Probanden wurden Lehrende unterschiedlicher Kammern und Berufsrichtungen angefragt, von denen sich einige bereit erklärten, die Tests in ihren Kursen durchzuführen. Die Ziehung der Stichprobe ist dementsprechend mehr oder weniger zufällig, erfüllt aber das Kriterium der Repräsentativität nur in begrenztem Rahmen. Um die Datenbasis zu erweitern und zu einigen Itemblöcken umfangreichere Daten zu erhalten, wurde die Erhebung in einem weiteren Schritt ausgedehnt. Es wurden weitere, in den Items analoge Tests E und F an 1490 Schüler aus allgemeinbildenden und Berufsschulen verschiedener Klassenstufen und Schulformen ausgegeben. Diese Erhebungen fanden im Rahmen von Staatsexamens- oder Masterarbeiten zu unterschiedlichen Zeitpunkten und zu unterschiedlichen Schwerpunktthemen statt. So sollten bspw. Fehleranalysen im Bereich der linearen Gleichungen, der Arithmetik oder der Bruchrechnung zum Vergleich mit bestehenden Untersuchungsergebnissen (vgl. Kapitel 5.3) angefertigt werden. Aufgrund einer Schwerpunktsetzung auf andere Themengebiete fiel in dieser zweiten Testrunde das Themengebiet Geometrie vorerst raus.

Die vorliegende heterogene Stichprobenstruktur wurde und wird bei den Analysen stets berücksichtigt. So wurden für die Anfertigung der Typenlisten in einer ersten Phase ausschließlich die Probanden aus der späteren Zielgruppe, Meisterschüler, hinzugezogen. Diese Reduktion auf die Zielgruppe in einem ersten Analyseschritt liegt darin begründet, dass aufgrund bekannter Ergebnisse fehleranalytischer Untersuchungen durchaus andere Fehler- und Rechentypen bei unterschiedlichen Probandengruppen dominieren können [vgl. Winter 2007, 2009]. Um dies und die Vollständigkeit der Typenlisten anschließend zu überprüfen, wurde eine Stichprobe von zufällig gezogenen Tests dem gegenübergestellt.

Die Stichproben sind prinzipiell mindestens in zwei Untergruppen zu differenzieren: Schüler allgemeinbildender Schulen und Berufsschulen, nachfolgend als „Andere Schüler“ bezeichnet ($n_{gesamtS}$ = 1.490) und Teilnehmer von Meisterlehrgängen, nachfolgend „Meisterschüler“ genannt ($n_{gesamtM}$ = 454). Nachfolgend werden diese beiden Gruppen als „Hauptprobandengruppen“ bezeichnet. In der Gruppe der Meisterschüler wurden drei Testvarianten A, B, C, bearbeitet, in der anderen Gruppe die Testvarianten E und F. So werden die beiden Hauptprobandengruppen je nach Bedarf nochmals differenziert in kleinere Stichproben.

Es handelt sich hier dementsprechend auch um mindestens zwei Erhebungen, die zu differenzieren sind: die erste Erhebung bei den Meisterschülern und die zweite bei anderen Schülern. Die nachfolgende Tabelle 23 gibt einen Überblick über die Probandenverteilung auf die Tests.

	A	B	C	E	F	∑
Meisterschüler	163	135	156	-	-	*454*
Andere Schüler	-	-	-	749	741	*1.490*

Tabelle 23: Probandenverteilung der Erhebungen auf die Testvarianten und Gruppenunterteilung.

7.2.5 Zur Datenerfassung und ersten Beurteilung

Im Vordergrund der Erfassung und Auswertung der Testerhebung (Startaufgabensammlung) steht in Rahmen dieser Arbeit die diagnostische Analyse. Sie liefert die Basis für das Hauptentwicklungsziel dieser Arbeit: Distraktoren mit diagnostischem Potential. Dennoch müssen für das Gesamtprojekt Mathe-Meister alle vier Zielsetzungen dieser empirischen Erhebung (vgl. Kapitel 6.3.4, S. 84) bereits auch bei der Datenerfassung berücksichtigt werden. So soll u. a. vermieden werden, dass Rohdaten unnötig mehrfach bearbeitet bzw. erfasst werden müssen. Es gibt zwei Erfassungsschritte:

1. Erfassung quantitativer Daten in SPSS (nach Auswertungsschema)
2. Erfassung qualitativer (und quantitativer) Daten in Typenlisten (nach Phänomenen)

7.2.5.1 Datenerfassung in SPSS nach Korrekturschema

Die vorliegenden Testbögen wurden im ersten Schritt nach einem festgelegten Korrekturschema korrigiert und in SPSS erfasst. Dieses wird nachfolgend kurz erörtert. Alle Erfassenden („Urteiler“ oder „Rater“) wurden ausführlich in Übungen in die Arbeit mit SPSS und die Erfassung anhand dieser konkreten Korrekturvorgaben eingeführt.

Das Korrekturschema umfasst neun Bewertungsstufen mit nominalem Skalenniveau. Um zu beurteilen, welche der neun Wertungsstufen bei einer Aufgabenbearbeitung vorliegt, wird der Korrekturbaum stets von oben nach unten mit der vorliegenden Probandennotation abgeglichen. Beispiel A verdeutlicht dies an einer konkreten Bearbeitungsvariante.

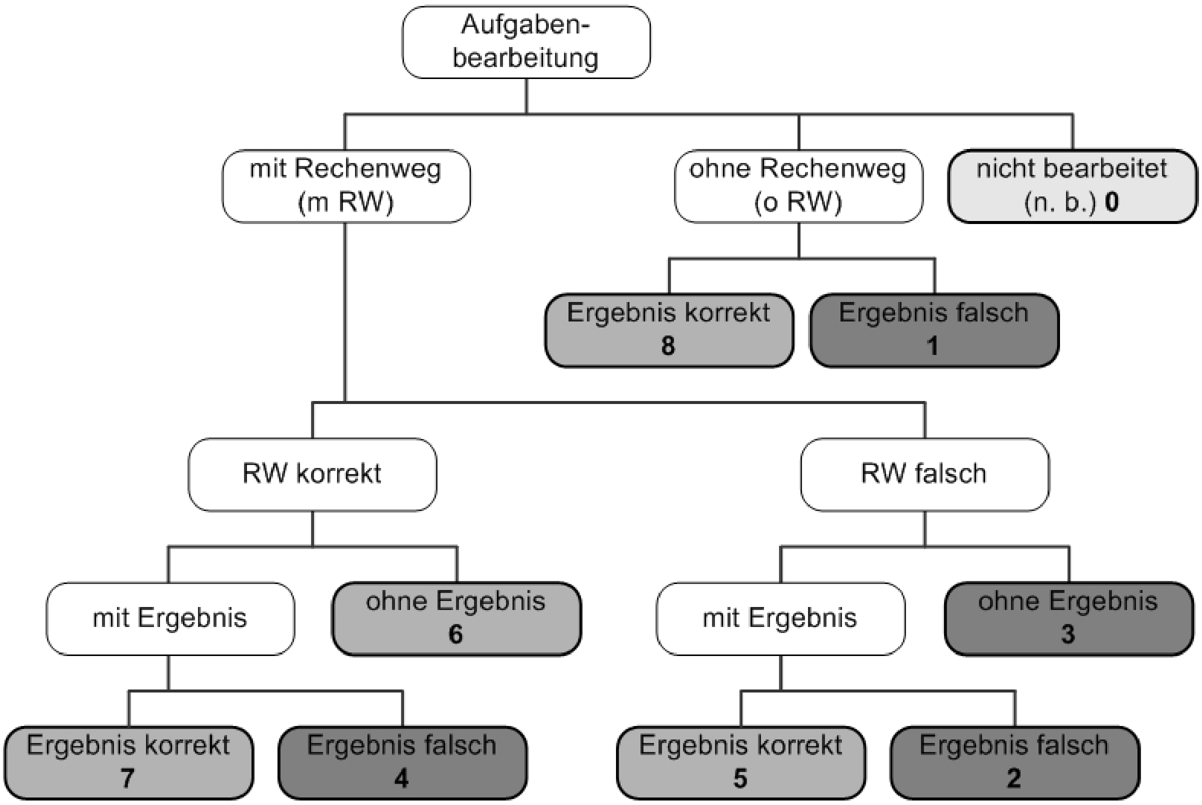


Abbildung 32: Korrekturschema „Rechnungen" für Datenerfassung in SPSS.

In SPSS ist es möglich, die hier vorab vorgenommene sehr kleinschrittige Differenzierung bei Bedarf zu größeren Gruppen zusammenzufassen und so bspw. klassische Lösungs- und Fehlerquoten zu ermitteln. Dazu könnten in diesem Fall die Bewertungen 1 bis 4 zusammengefasst zu „falsch", 5 bis 7 zu „richtig" und 0 bliebe „nicht bearbeitet". Genauso kann aber auch die 6 (korrekter Rechenweg ohne Ergebnisnotation) bei „nicht bearbeitet" oder bei „falsch" mit eingruppiert werden – je nach Definition einer „korrekten Lösung".

Eine besondere Rolle stellen die Aufgaben zur Bruchrechnung dar. Da insbesondere bei diesen Aufgaben stets mehrere Ergebnisse korrekt sein können, musste klar definiert werden, wann die jeweilige Bearbeitungsform wie zu bewerten ist. Für die Korrektur und Erfassung gilt: Eine Aufgabe zur Bruchrechnung gilt als vollständig bearbeitet (mit oder ohne Rechenweg), wenn als letztes Glied einer Gleichungskette (oder auch ohne Gleichungskette) eine Zahl ohne weitere Operatorsymbole steht – als unechter oder echter Bruch, als gemischte Zahl oder als natürlich Zahl. Brüche müssen nicht vollständig gekürzt oder umgewandelt sein und auch vollständig korrekte umgewandelte Dezimalzahlen sind gültig.

Beispiel A:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5+3}{8}}_{\substack{mit\,RW-ohne\,Ergebnis\\ 6}}\;\underbrace{=\frac{8}{8}}_{\substack{ohne RW-mit\,Ergebnis\\ 8}}\;\ldots}_{\substack{mit\,RW-mit\,Ergebnis\\ 7}}\;=\frac{1}{1}}_{\substack{mit\,RW-mit\,Ergebnis\\ 7}}\;\ldots\;\underbrace{=}_{\substack{ohne RW-mit\,Ergebnis\\ 8}}\,1}_{\substack{mit\,RW-mit\,Ergebnis\\ 7}}$$

Bei Aufgaben, in denen mit Einheitenangabe (z. B. Zentimeter, Kilometer etc.) gerechnet werden soll, wurden die Aufgaben zweifach korrigiert – einmal nur die Rechnung betrachtend und einmal nur die Angabe der Einheiten durch den Probanden betrachtend:

Beispiel B: $2\;m\cdot 5\;m\;=10\,m^2$

a) Korrektur der Rechnung → $2\;\cdot 5\;\;=10$ (ohne Berücksichtigung der Einheiten)

b) Korrektur der Einheit → $m\cdot m\;=\;m^2$ (ohne Berücksichtigung der Rechnung mit den Zahlwerten)

Korrektur a) erfolgt nach dem bereits angegebenen Korrekturschema „Rechnungen". Korrektur b) erfolgt anschließend nach folgendem Prinzip:

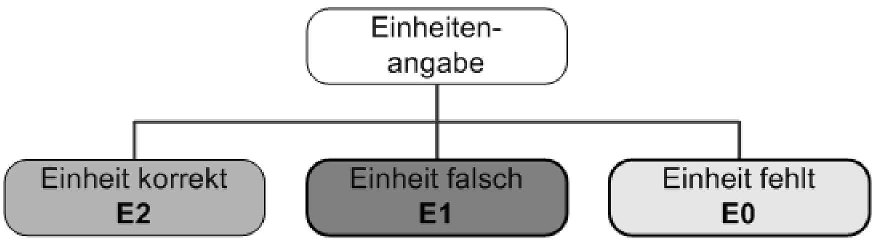


Abbildung 33: Korrekturschema „Einheiten" für Datenerfassung in SPSS.

Die differenzierte Betrachtung des gesamten Lösungsweges zu jeder Aufgabe ist zeitlich deutlich umfangreicher als eine dichotome Ergebniserfassung. Es kann detaillierter ausgewertet werden als nur in Lösungs- und Fehlerquoten. Es werden im Nachhinein eine Vielzahl weiterer Auswertungsmöglichkeiten eröffnet – eventuell auch für solche Fragestellungen, die erst im Laufe der

Untersuchung entstehen. So könnte bspw. auch quantitativ untersucht werden, wie häufig und bei welchen Aufgabentypen Probanden einen Lösungsweg mit Zwischenschritten notieren, ob es häufig auftritt, dass ein falscher Lösungsweg zu einem korrekten Ergebnis führt usw..

7.2.5.2 Datenerfassung in Typenlisten

Eine Ermittlung von Fehlermustern – und ebenso Rechenmustern – kann zum einen über rationale Aufgabenanalysen erfolgen. Um diese aber zu evaluieren, zu vervollständigen und ggf. zu verändern bedarf es zum anderen einer empirischen Aufgabenanalyse. Hierzu wurde zu jeder Aufgabe die komplette Probandennotation in so genannten *Fehler- und Rechentypenlisten* mit allen Rechenschritten und in der jeweiligen, individuellen Reihenfolge und Schreibweise erfasst. Es fand entsprechend der Definitionen in Kapitel 5.2 eine Erfassung von Phänomenen statt, die in diesem Fall über die alleinige Ergebnisbetrachtung hinausging.

7.2.5.3 Reliabilität und Validität der Typenlisten

Die Anfertigung der Typenlisten erfolgte durch drei unterschiedliche Personen. Um ein gemeinsames Vorgehen und analoge Entscheidungen zu ermöglichen, wurden die ersten Tests gemeinsam typisiert. Alle anschließenden Typenlisten wurden stets bei kleineren Ungereimtheiten abgesprochen und zusätzlich stichprobenartig jeweils von zwei Urteilern gegengeprüft. Die Stichprobenbegrenzung für die Typenlisten auf die Zielgruppe bedingt auch die Validierung der inhaltlichen Vollständigkeit der Listen. Hierzu wurde eine Stichprobe von zufällig gezogenen Tests dem gegenübergestellt. Inhaltlich betrachtet zeigen sich aber bei dem Abgleich in der Auftretenshäufigkeit einzelner Fehlerphänomene kaum Unterschiede. Den Ergebnissen anderer fehleranalytischer Untersuchungen, wonach bei unterschiedlichen Probandengruppen durchaus verschiedene Fehlermuster dominieren [vgl. u. a. Winter 2006], wird dadurch aber nicht widersprochen. Dies liegt vermutlich in der Zusammensetzung der Vergleichsstichprobe begründet, die Schüler verschiedener Klassenstufen und Schulformen umfasste. Auffällig war jedoch, dass die Probanden der Prüfgruppe vom Umfang her insgesamt mehr Bearbeitungsvarianten (Phänomene) in einer Aufgabe notierten. Letztlich ließen sich diese Phänomene jedoch wiederum zu gleichen Mustern und Kategorien in beiden Stichproben zusammenfassen. Außerdem unterscheiden sich die Probandengruppen bei einzelnen Testitems oder Itemblöcken hinsichtlich der Ausprägung von Fehler- oder Lösungsquoten im Gesamtumfang (vgl. Kapitel Teil I).

Da für den Bereich Geometrie in den ersten beiden Erhebungsphasen nur Typenlisten auf der Datenbasis der Meisterschüler erstellt werden konnten, wurde hierbei eine Evaluation der Phänomene und Muster durch eine Expertenbefragung erweitert und evaluiert. Zusätzlich wurden die Itemblöcke aus dem Bereich der Geometrie an kleine, zufällig gezogene Stichproben von Schülern, Studierenden und anderen Erwachsenen mit der Bitte um Bearbeitung ausgegeben. Der Abgleich dieser Testresultate mit den bestehenden Typenlisten der Meisterschüler lieferte eine Bestätigung und keine weiteren Phänomene.

7.2.5.4 Reliabilität der Datenerfassung

Die Datenerfassung in SPSS erfolgte ebenfalls durch unterschiedliche Personen, so z. B. die Studierenden, die ihre Abschlussarbeiten anfertigten, Hilfskräfte und Mitarbeiter. Alle wurden in Gruppen und später ggf. auch einzeln eingearbeitet und mit dem Korrekturschema vertraut gemacht. Bei der Beurteilung und Erfassung von Daten können dennoch so genannte Urteilsfehler auftreten [vgl. Bortz, Döring 2006, S. 183ff). Diese Fehler können sowohl zwischen mehreren als auch bei einem Urteiler auftreten – also sowohl intra- als auch interpersonell. So könnten mehrere Urteiler dieselbe Itemausprägung auch beim Einsatz von Ratingskalen, wie sie hier in Form der Korrekturschemata vorliegt, unterschiedlich bewerten. Man unterscheidet hier zwischen der Konkordanz und der Konsistenz bei der Beurteilung [vgl. Bortz, Döring 2006, S. 162]:

- *Konsistenz* gibt die Widerspruchsfreiheit einer Person an.
- *Konkordanz* liefert die Übereinstimmung von zwei und mehr Urteilern. Sie gibt die so genannte Interraterreliabilität an.

Aufgrund der hohen Relevanz der quantitativen Daten insbesondere für die Auswahl der Indikatoraufgaben wurden die Beurteiler selbst evaluiert. An dieser Evaluation der Testauswertung nahmen insgesamt acht der Rater teil.

Für diese Validierung wurden nicht nur die Realdaten stichprobenartig kontrolliert, sondern den Urteilern zusätzliche, modifizierte Testbögen ausgehändigt, die sie in ihrem ganz normalen Korrekturmodus mit korrigiert und erfasst haben. Dabei handelte es sich um zwölf durch mich ausgefüllte Testbögen der Varianten E und F, die jeweils alle an die Urteiler ausgegeben wurden. Diese waren so gestaltet, dass die Notationen typischen Mustern folgten, aber auch völlig untypische Notationen beinhalteten. So wurden bspw. zu einer Aufgabe mehrere Ergebnisse notiert, Lösungswege unvollständig aufgeschrieben und insbesondere falsche Lösungswege mit aufgenommen, die zu einem korrekten Ergebnis führten. Letzteres sollte zeigen, ob die Urteiler auch der inhaltlichen Korrektur des Bearbeitungsweges nachkommen. Insgesamt wurden alle Bewertungsstufen mehrfach in den einzelnen Themenblöcken abgedeckt. Außerdem enthielten die Testvarianten identische Aufgaben mit identischen antizipierten Bearbeitungswegen, wodurch die Konsistenz jedes Urteilers überprüft werden konnte.

Mit Hilfe der erhobenen Daten dieser modifizierten 12 Tests konnte nun mittels einer Konkordanzanalyse die Urteilerüberstimmung bzw. die Urteilskonkordanz anhand der Berechnung des Konkordanzkoeffizienten überprüft werden [vgl. Bortz, Döring et al. 2008, S. 451ff]. Bei allen Tests wurden sehr gute Ergebnisse erlangt und so konnte eine sehr hohe Urteilerübereinstimmung sowohl hinsichtlich der Konsistenz als auch der Konkordanz ermittelt werden.[45]

7.2.6 Zur Generierung von Aufgaben- und Antwortmustern

Nach Fertigstellung dieser Typenlisten habe ich alle Phänomene kategorisiert und allgemeine Muster gebildet. Für die Auswahl typischer Rechen- und Fehlermuster für das zu entwickelnde internetbasierte Selbsttestportal wurden diese Muster anschließend für jede Aufgabe zu inhaltlich bzw. diagnostisch gleichwertigen Clustern zusammengefasst. Für jedes Cluster wird soweit möglich ein Antwortmuster im Sinne einer Berechnungsvorschrift bzw. Konstruktionsvorschrift generiert. In Fällen, wo dieses nicht durch einen

[45] Für eine ausführliche Darstellung der statistischen Grundlagen dieses Validierungsverfahrens wird auf den Anhang und Podlogar et al. [2011] verwiesen.

algebraischen Ausdruck möglich ist, werden verbale Kategorisierungsbeschreibungen genutzt. Hierbei werden sowohl die Bearbeitungs- und Antwortmuster zu dieser einen Aufgabe als auch aller anderen Aufgaben dieses Anforderungsbereiches berücksichtigt. So wird besonders darauf geachtet, inwiefern bestimmte Aufgabenaspekte zu analogen Antwortmustern führen und die Aufgabentypen dementsprechend in Clustern zusammengefasst. Diese Berechnungs- bzw. Konstruktionsvorschriften müssen möglichst kurz, aber ebenso präzise sein, denn sie dienen der Konstruktion analoger typischer Antworten für jeden Aufgabentyp. Die Konstruktion solcher Analogaufgaben mit entsprechenden Antworten ist vorgesehen, um nicht nur *einen* diagnostischen Aufgabensatz zu erhalten, sondern verschiedene anbieten zu können. So könnten bspw. die eigenen Kompetenzen an analogen Aufgaben wiederholt getestet werden. Es müsste also nicht jedes Mal derselbe Test wiederholt werden.

Abbildung 34 verdeutlicht das Vorgehen zur Antwortmustergenerierung und Auswahl der Distraktoren an einem konkreten Beispiel. In Kapitel 7.2.5.3 werden die einzelnen Aspekte dieses Analyse- und Entwicklungsprozesses an mehreren Beispielen noch ausführlicher konkretisiert.

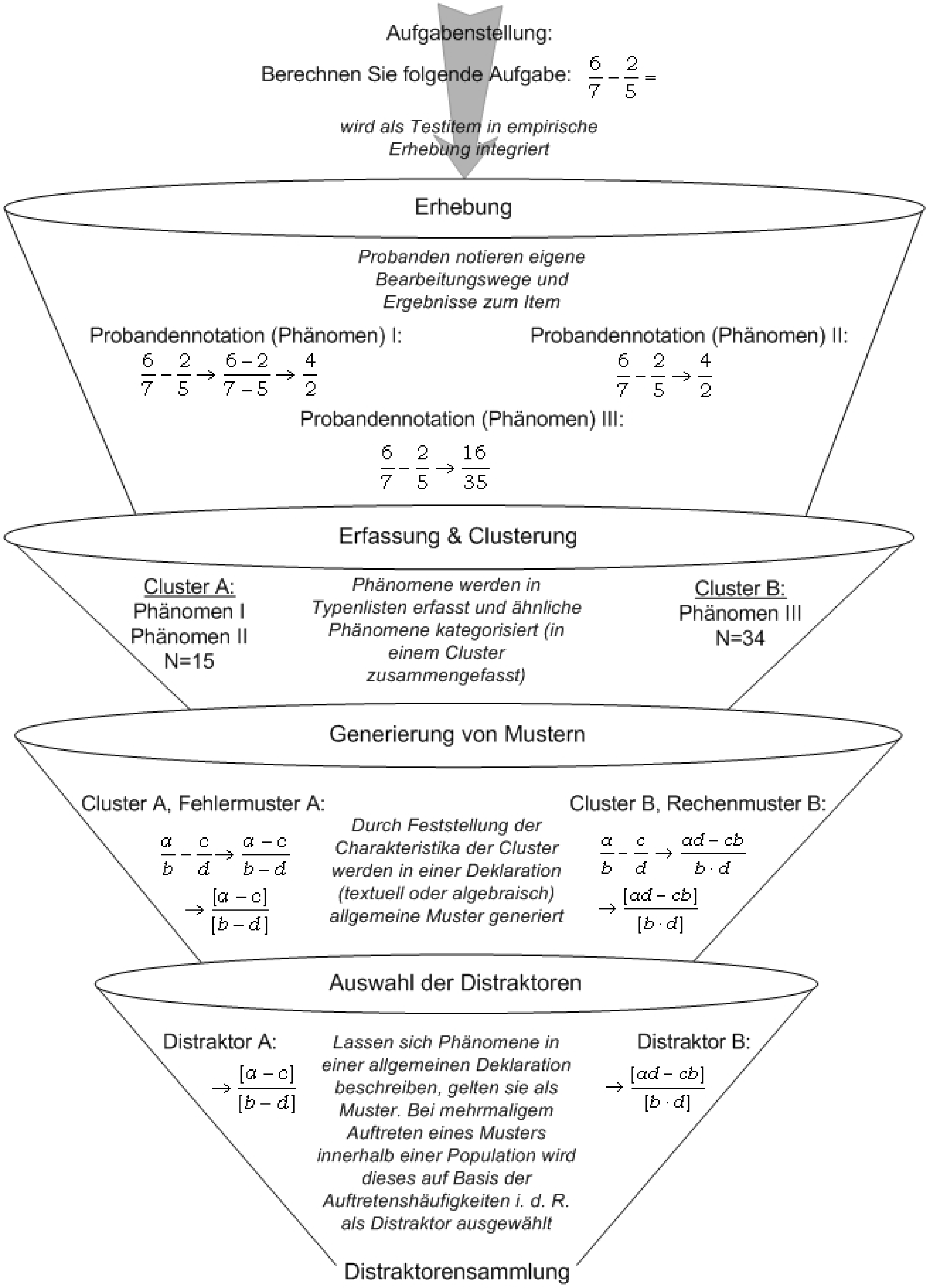


Abbildung 34: Vorgehen zur Generierung von Antwortmustern und Auswahl der Distraktoren.

TEIL V ERGEBNISSE

8 Ergebnisse der empirischen Untersuchung

Wie bereits in Kapitel 7.2.6 erörtert werden die vorab dargestellten Rechen- und Fehlerphänomene zu Clustern zusammengefasst und anschließend in einer Musterbeschreibung definiert. Abbildung 34 (siehe vorhergehende Seite) beschreibt dieses Vorgehen an einem konkreten Aufgabenbeispiel. Bei der Mustergenerierung werden nachfolgend Aufgaben- und Antwortmuster unterschieden:

- *Aufgabenmuster* werden erzeugt durch die Kategorisierung und Verallgemeinerung von Aufgabentypen und stellen eine verallgemeinerte textuelle oder algebraische Beschreibung dieses Typus dar.
- *Antwortmuster* werden erzeugt durch die Kategorisierung und Verallgemeinerung von Antworttypen auf Basis so genannter Typenlisten und stellen eine verallgemeinerte textuelle oder algebraische Beschreibung korrekter und fehlerhafter Lösungsschemata dar.

Die Erfassung von Rechen- und Fehlerphänomenen wird im nachfolgenden Kapitel 8.2 abgeschlossen. Anschließend folgt eine Zusammenfassung dieser Phänomene in Kategorien. Auf Basis dieser Kategorien und Muster werden dann Aufgaben- und Antwortmuster für die Indikatoraufgaben des Online-Portals generiert.

8.1 Lösungs- und Fehlerquoten

Für die bessere Einordnung der nachfolgenden vor allem qualitativen Darstellungen werden an dieser Stelle kurz im Überblick die quantitativen Rahmendaten der Auswertung der Papiertests[46] dargestellt. Die drei nachfolgenden

---

[46] Mit der Bezeichnung „Papiertests“ sind die Tests bzw. ist die Ausgangserhebung mit den Fragebögen A, B, C, E, F mit offenem Antwortformat gemeint. Teilweise werden die Bezeichnungen „Papiertests“ und „Multiple-Choice-Test“ zur Verbesserung der Lesbarkeit der Arbeit als Synonyme für die Ausgangserhebung bzw. die in Kapitel 8.5 erörterte Evaluation genutzt.

Tabellen geben einen Überblick über die Probandenverteilung sowie die Lösungs-, Fehlerquoten und nicht bearbeiteten Anteile der Tests (vgl. Tabelle 24 bis Tabelle 26).

	A	B	C	E	F	∑
Meisterschüler	163	135	156	-	-	*454*
Andere Schüler	-	-	-	749	741	*1.490*

Tabelle 24: Probandenverteilung der Erhebungen auf die Testvarianten und Gruppenunterteilung.

	Test A	Test B	Test C	Test E	Test F
Lösungsquoten	56,2%	57,2%	55,8%	63,4%	57,6%
Fehlerquoten	24,9%	22,2%	19,8%	21,5%	26,8%
Nichtbearbeitungsanteil	18,9%	20,6%	24,4%	15,1%	15,6%

Tabelle 25: Quotenverteilung auf die einzelnen Testvarianten.

	Meisterschüler (A, B, C)	Andere Schüler (E, F)
Lösungsquoten	56,4%	60,5%
Fehlerquoten	22,3%	24,2%
Nichtbearbeitungsanteil	21,3%	15,3%

Tabelle 26: Kumulierte Quoten für die zwei Hauptprobandengruppen.

Die Testentwicklung der Startaufgabensammlung (vgl. Kapitel 7.2.2.2) zielte *nicht* darauf ab, die Gesamttests vollständig gegenüberstellen zu können, sondern die einzelnen Itemblöcke bzw. einzelne Items. So wird ein Itemblock jeweils in identischer Form in mindestens einem Test der beiden Gruppen {A, B, C} bzw. {E, F} eingebunden. Die Quotenverteilung innerhalb der Probandengruppen zeigt allerdings, dass es hinsichtlich der Lösungsquoten *insgesamt* keine signifikanten Unterschiede gibt. Die Tests scheinen demnach vom Schwierigkeitsgrad her, trotz der teilweise sehr unterschiedlichen Themengebiete, vergleichbar konstruiert zu sein. Dies bestätigt die Ergebnisse der Pretests während der Testentwicklung.

Unterschiede in der Ausprägung der Quoten zeigen sich im Bereich der Fehlerquoten und Nichtbearbeitungsanteile insbesondere einzelner Itemblöcke. Um diesem Phänomen näher auf den Grund zu gehen, wurden inhaltlich vergleichbare Itemblöcke aus den unterschiedlichen Testbögen gegenübergestellt. Auf eine vollständige Erörterung dieser quantitativen Ergebnisse wird an dieser Stelle verzichtet, denn im Rahmen der Zielsetzungen dieser Arbeit stellt sich hier die *qualitativ* begründete Frage, wie sich die Rechen- und Fehlerphänomene der Probanden zu diesen Aufgaben darstellen. Nachfolgend wird daher dieser Fragestellung nachgegangen und die Grundlage für die Mustergenerierung und -auswahl erörtert. Für eine exemplarische Darstellung einiger Quotengegenüberstellungen sei auf den Anhang 14.5 verwiesen.

8.2 Rechen- und Fehlerphänomene

Die Erfassung aller Probandennotationen führte für jede Aufgabe zu umfangreichen Rechen- und Fehlertypenlisten. Dabei ist zum einen festzustellen, dass es bei den meisten Aufgaben unabhängig vom Anforderungsbereich eine Vielzahl unterschiedlicher korrekter Bearbeitungsschemata gibt. Zum anderen ist diese Mannigfaltigkeit hinsichtlich fehlerhafter Bearbeitungsnotationen zu jeder Aufgabe noch deutlich ausgeprägter. Exemplarisch seien hier einige Ergebnisse zu korrekten und fehlerhaften Bearbeitungsphänomenen aufgezeigt.

Bei Aufgaben zur Bruchrechnung zeigte sich die Mannigfaltigkeit der Bearbeitungsphänomene sowohl bei korrekten als auch fehlerhaften Antworten besonders deutlich. Insbesondere bei diesem Anforderungsbereich kann durchaus über mehrere, teilweise sehr unterschiedliche Bearbeitungswege zu gleichen Ergebnissen gelangt werden. Die Typenlisten[47] zeigen, dass diese in der Realität auch von Probanden genutzt werden. Sie bleiben also nicht nur eine theoretische Konstruktion als Ergebnis rationaler Aufgabenanalysen, sondern lassen sich auch empirisch bestätigen.

---

47 Einige Typenlisten sind im Anhang 14.6 dargestellt.

Die Aufgabenstellung „Berechnen Sie folgende Aufgabe: $\frac{4}{7}+2=$" ist ein besonders prägnantes Beispiel, um diese Mannigfaltigkeit korrekter Lösungswege zu verdeutlichen. Sie führte allein bei der Erfassung der Rechentypen der Meisterschüler zu neun unterschiedlichen korrekten (und vollständigen) Bearbeitungsphänomenen (vgl. Tabelle 27; unvollständige Bearbeitungen mit durchweg korrektem Ansatz werden nicht berücksichtigt):

Rechentypen (Phänomene) nach Häufigkeit (absteigend)	**Rechentypen (Phänomene) kategorisiert**	**Kategorie/ Typ**
$=2\frac{4}{7}$	$=2\frac{4}{7}$	1
$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	2
$=\frac{18}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	
$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	$=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	
$=2\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$	$=\frac{18}{7}$	3
$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	4
$=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	
$=\frac{8}{14}+\frac{28}{14}=\frac{36}{14}$	$=2\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$	5
$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	$=\frac{8}{14}+\frac{28}{14}=\frac{36}{14}$	6

Tabelle 27: Vielfalt korrekter Bearbeitungsphänomene als Ergebnis empirischer Erhebungen, aufgezeigt am Beispiel der Aufgabe: $\frac{4}{7}+2=$. (Auszug aus der entsprechenden Rechentypenliste mit anschließender Kategorisierung nach ähnlichen Rechenwegen.)

Die Kategorisierung der Bearbeitungsphänomene in die Typen 1 bis 6, wie sie in Tabelle 27 dargestellt ist, basiert auf den bestehenden Erkenntnissen der fehleranalytischen Forschung (vgl. Kapitel 5.3.2). Bei alternativen Herangehensweisen kann eine solche Kategorisierung auch anders ausfallen, wenn bspw. gleiche Ergebnisse zu einer Kategorie zusammengefasst werden. Ich habe in dieser Phase der Analyse nach Betrachtung der Ergebnisse bei der Typenkategorisierung auch die Rechenwege, die zum jeweiligen Ergebnis führen, berücksichtigt. So erzeuge ich u. a. auch eine Basis für die im Anschluss an

diese Arbeit zu entwickelnden Fehleranalysehinweise, in denen mögliche Fehlerquellen erörtert werden.
Im konkreten Fall entsteht durch dieses Vorgehen die Unterscheidung der Typen 1 und 2 bzw. der Typen 3 und 4 voneinander, obwohl sie das gleiche Endergebnis aufweisen. Die Zuordnung zu Typ 2 erfolgt hier unter der Voraussetzung, dass

1. das Endergebnis $2\frac{4}{7}$ lautet UND
2. im Rechenweg eine Umwandlung der natürlichen Zahl in einen Bruch stattgefunden hat.

Formal in einem Muster – um der Mustergenerierung an dieser Stelle kurz vorzugreifen – bedeutet dies für Typ 2: $\frac{a}{b}+n \rightarrow \frac{a}{b}+\frac{bn}{b} \rightarrow n\frac{a}{b}$ (zur Mustergenerierung vgl. Kapitel 8.3 und 8.4). Im Gegensatz dazu steht Typ 1 mit demselben Endergebnis, aber nicht nachvollziehbaren Zwischenschritten. Deutlicher wird der Unterschied bei einem Vergleich der Typen 3 und 4. Die Zuordnung zu Typ 4 erfolgt hier unter der Voraussetzung, dass

3. das Endergebnis $\frac{18}{7}$ lautet UND
4. im Rechenweg eine Umwandlung der natürlichen Zahl in einen Bruch stattgefunden hat.

Formal gilt also für Typ 4: $\frac{a}{b}+n \rightarrow \frac{a}{b}+\frac{bn}{b} \rightarrow \frac{c}{b} \;\middle|\; c=bn+a$. Hiervon unterscheiden sich die Typen 3 und 5 zwar nicht im Endergebnis, aber bei beiden kann nicht eindeutig nachvollzogen werden, über welchen Rechenweg genau das Ergebnis erlangt wurde; d. h. ob die natürliche Zahl in einen Bruch umgewandelt wurde oder direkt addiert und die gemischte Schreibweise verwendet wurde. Dieses lässt sich bei Typ 4 hingegen begründet darlegen.

Würden bei der Clusterbildung für die Rechentypen dieser Aufgabe nur die Endergebnisse betrachtet und die Rechenwege nicht berücksichtigt, könnte eine Typengruppierung auch folgendermaßen ausfallen (vgl. Tabelle 28):

Rechentypen (Phänomene) nach Häufigkeit (absteigend)	Rechentypen (Phänomene) kategorisiert	Kategorie/ Typ
$=2\frac{4}{7}$	$=2\frac{4}{7}$	Erg1
$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	
$=\frac{18}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{18}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	
$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{18}{7}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	$=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	
$=2\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$	$=\frac{18}{7}$	Erg2
$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	
$=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$	$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	
$=\frac{8}{14}+\frac{28}{14}=\frac{36}{14}$	$=2\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$	
$=\frac{4}{7}+\frac{2}{1}=\frac{4}{7}+\frac{14}{7}=\frac{18}{7}$	$=\frac{8}{14}+\frac{28}{14}=\frac{36}{14}$	Erg3

Tabelle 28: Vielfalt korrekter Bearbeitungsphänomene als Ergebnis empirischer Erhebungen, aufgezeigt am Beispiel der Aufgabe: $\frac{4}{7}+2=$. (Auszug aus der entsprechenden Rechentypenliste mit anschließender Kategorisierung → nur Ergebnisbetrachtung.)

Grundsätzlich gibt es also im Falle dieser Bruchrechenaufgabe drei unterschiedliche korrekte Ergebnisvarianten, die von Probanden notiert wurden. Wobei diese drei Ergebnisvarianten über zwei grundlegend unterschiedliche Lösungsverfahren ermittelt werden können:

- Direkte Addition von Bruch und natürlicher Zahl
- Umwandlung der natürlichen Zahl in einen Bruch, dann Addition von Brüchen

Diese unterschiedlichen Ergebnisnotationen und möglichen Lösungsverfahren entsprechen den Aufgabenaspekten wie in Kapitel 7.2.2.1 beschrieben. Hierzu zählt im konkreten Fall bei Betrachtung des Lösungsweges ebenso, ob das Ergebnis z. B. gekürzt, in eine gemischte Schreibweise oder einen Bruch umgewandelt wurde.

Diese Aufgabenaspekte des Lösungsverfahrens zeigen sich auch bei Aufgaben zum Lösen linearer oder quadratischer Gleichungen. Insbesondere lineare Gleichungen können häufig durch reines Ausprobieren – also Einsetzen möglicher Werte – gelöst werden, aber auch über das klassische Auflösen der Gleichung nach der gesuchten Variablen. Für das Lösen quadratischer Gleichungen wurden unterschiedliche Verfahren sowohl von den Schülern allgemeinbildender Schulen als auch den Meisterschülern eingesetzt. So lässt sich die Aufgabenstellung „Lösen Sie folgende Gleichung: $z^2 - 2z - 15 = 0$" aufgrund ihrer recht einfachen Struktur durch Ausprobieren lösen und führte so bei vielen zu der korrekten Ergebnisnotation „$z = 5 \wedge z = -3$". Ebenso gelangten viele Probanden aber auch über diesen, wie die nachfolgend noch aufgezeigten Wege zu nur im Ansatz korrekten oder unvollständigen korrekten Ergebnissen, die nur eine Variablenbesetzung beinhalteten, wie „$z = 5$" oder „$z = -3$" (vgl. Tabelle 29). Neben der Faktorisierung über „$(z+3)(z-5) = 0$" kann auch die p-q-Formel als Bearbeitungsweg genutzt werden. Insbesondere letztere und das Ermitteln des Ergebnisses durch Einsetzen (Ausprobieren) führt jedoch in vielen Ergebnissen zu den o. g. unvollständigen Ergebnisnotationen.

Fehlerphänomen (Ergebnisangabe)	**Bemerkung/Beurteilung**
$z = 15$	fehlerhaft und unvollständig
$z = -15$	fehlerhaft und unvollständig
$z = 5$	teilweise korrekt, aber unvollständig
$z = -3$	teilweise korrekt, aber unvollständig

Tabelle 29: Beispiele unvollständiger Bearbeitungen.

Mit dem Ziel, Gemeinsamkeiten zwischen den einzelnen Phänomenen zu finden und Unterscheidungsmerkmale hervorzuheben, werden diese nach der Erfassung inhaltlich kategorisiert. Tabelle 27 zeigt dies exemplarisch an einem Aufgabenbeispiel der Bruchrechnung auf. Zur weiteren Bearbeitung werden diese Phänomene anschließend verallgemeinert und die Kategorien anhand von Bearbeitungsmustern definiert. Die Typenlisten bilden daher das Fundament für die sich nun anschließende Generierung von Mustern und die daraus folgende Entwicklung konkreter Aufgaben- und Antwortformate für den Online-Test.

8.3 Kategorisierung von Phänomenen und Generierung von Mustern

Die Kategorisierung oder Klassifizierung von Fehlerphänomenen in Fehlermustern ist eine übliche Vorgehensweise der fehleranalytischen Forschung [vgl. u. a. Wittmann 2008]. In Kapitel 5.1 wurden die Voraussetzungen und möglichen Methoden dazu bereits im Allgemeinen skizziert. Die Analyse von Fehlern erweitere ich in dieser Arbeit um die Analyse korrekter Lösungen und Lösungswege, wie bereits in Kapitel 8.2 an einigen Beispielen verdeutlicht. Dabei integriere ich die Analyse von Aufgabenstellungen, die sich bisher nicht in Veröffentlichungen zu klassifizierenden, fehleranalytischen Untersuchungen finden lassen. Dies betrifft z. B. Begriffsabfragen oder Zuordnungen von Formeln oder Variablen zu einer geometrischen Form unter Betrachtung eines bestimmten Zusammenhangs wie dem Satz des Pythagoras (vgl. Kapitel 8.4.5).

Auf Basis der gewonnenen Daten werden neben den Lösungen auch die Aufgabenstellungen in einem Muster deklariert. Dabei wird anhand der Lösungsquoten sowie der Fehler- und Rechenphänomene betrachtet, inwieweit sich konkrete Werte in der Aufgabenstellung auf die Bearbeitungen auswirken. So zeigten sich in einer älteren Untersuchung von mir (mit ca. 8.000 Probanden) bei einem auf den ersten Blick analogen Aufgabenpaar $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=$ und $\frac{7}{8}-\frac{3}{5}=$ deutlich unterschiedliche Ausprägungen von Rechen- und Fehlermustern, obwohl sich die Terme nur in einem Wert – dem Nenner des zweiten Bruches – unterscheiden. Die Lösungsquoten differierten bei den beiden Aufgaben signifikant[48]. Besonders ausgeprägt waren die Unterschiede bei Betrachtung der Lösungsschemata zur Berechnung der korrekten Lösung. In Tabelle 30 sind die bei diesen Aufgabenstellungen in der damaligen Untersuchung auftretenden typischen Rechen- und Fehlermuster im Vergleich dargestellt. [vgl. Winter 2009]

[48] Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$.

Muster/Typen	Phänomen zur Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=$	Angabeanteil bei Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=$	Phänomen zur Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{5}=$	Angabeanteil bei Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{5}=$
Lösungsquote	71 %		63 %	
Direktnotation des korrekten Ergebnisses	$\rightarrow \frac{1}{8}$	17 %	$\rightarrow \frac{11}{40}$	4 %
Zwischenschritt über Hauptnennerbildung notiert	$\rightarrow \frac{7}{8}-\frac{6}{8}$	52 %	$\rightarrow \frac{35}{40}-\frac{42}{40}$	64 %
Zwischenschritt über Gleichnamigmachen ohne Hauptnenner	$\rightarrow \frac{14}{16}-\frac{12}{16}$ oder $\rightarrow \frac{28}{32}-\frac{24}{32}$	6 %	-	-
Typischer Fehler S1: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{c-d}$	$\rightarrow \frac{4}{4}$	13 %	$\rightarrow \frac{3}{4}$	14 %

Tabelle 30: Differierende Ausprägungen typischer Bearbeitungsschemata bei zwei analog erscheinenden Kalkülaufgaben zur Bruchrechnung [vgl. Winter 2009].

Bei dieser Untersuchung zeigte sich, dass bei der Entwicklung von Parallelaufgaben/Analogaufgaben zur Bruchrechnung die bisher vorherrschende Differenzierung nach Operation (hier: Subtraktion), Operandeneigenschaft (hier: echte Brüche) und Operandenbeziehung (hier: ungleichnamig) in diesem geringen Detailgrad nicht ausreichend ist. Auch Padberg [2009] erweiterte u. a. aufgrund dieser Ergebnisse die von ihm bisher benannten beeinflussende Schwierigkeitsfaktoren[49] für die unterschiedlichen Operationen in der Bruchrechnung bspw. um die Beziehung der Nenner zueinander und die Kürzbarkeit des Ergebnisses. Es muss u. a. berücksichtigt werden, *wie* korrekte – aber auch typische falsche Ergebnisse – erlangt werden können. Bei den beiden hier aufgezeigten Aufgaben unterscheidet sich bspw. das Gleichnamigmachen der Brüche. Die Ergebnisse

49 Verwendung des Begriffes „Schwierigkeitsfaktoren“ bei Padberg ähnlich dem in dieser Arbeit definierten Begriff „Aufgabenaspekte“.

der Untersuchung zeigen, dass bei der Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=$ den Probanden eine Berechnung im Kopf wesentlich leichter fällt als bei bei der Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{5}=$. Bei letzterer sind die Rechenanforderungen im kleinen Einmaleins anspruchsvoller. Bereits bestehende Ergebnisse zeigen, dass eine detaillierte, rationale Aufgabenanalyse bis in die Betrachtung konkreter Werte in einer Aufgabe/im Aufgabenterm gerechtfertigt und relevant ist. Diese Erkenntnisse wirken sich in Bezug auf die Zielsetzung dieser Arbeit besonders auf die Deklaration der Aufgabenmuster aus, um die im Anschluss an diese Arbeit geplante Entwicklung von Analogaufgaben zur Erstellung weiterer, vergleichbarer Testversionen zu gewährleisten.

Im ersten Schritt der Kategorisierung der Phänomene und der Generierung von Mustern werden die vollständigen Bearbeitungswege der Probanden analysiert. Auf Basis der notierten Bearbeitungswege können viele Fehler erkannt und die durch rationale Aufgabenanalysen antizipierten Fehlermuster auf empirischer Basis validiert werden. Diese Detailbetrachtung liefert insbesondere auch die Grundlagen für die im Rahmen des Gesamtprojektes zu formulierenden Fehleranalysehinweise, die den Nutzern des Online-Selbsttests eine individuelle Rückmeldung zu ihren fehlerhaften Antwortauswahlen geben sollen (vgl. Projektziele, Kapitel 2.

Die Relevanz der empirischen Aufgabenanalyse mit einer vollständigen Betrachtung der Bearbeitungsnotationen zeigt sich insbesondere auf der Suche nach möglichen *Fehlerquellen.* Als Fehlerquellen seien hier hypothetische Begründungen bezeichnet, die einen fehlerhaften Bearbeitungsschritt aufzeigen. So z. B. einen Rechenfehler in der Menge der natürlichen Zahlen oder das Vertauschen von Variablen.

Die Fehlertypenliste zu einer Kalkülaufgabe aus dem Bereich der Bruchrechnung zeigt an einem konkreten Fall, warum vom Ergebnis nicht zwingend auf *eine* Fehlerquelle geschlossen werden kann. Tabelle 31 zeigt dazu Ausschnitte der Typenlisten zu:

Aufgabenstellung C_C: *Berechnen Sie folgende Aufgabe:* $4\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$.

Fehlertypen	**Anzahl**[50]	**Rechentypen**	**Anzahl**
$4\frac{3}{8}$	8	$\frac{13}{3}+\frac{2}{5}=\frac{65}{15}+\frac{6}{15}=\frac{71}{15}=4\frac{11}{15}$	20
$\frac{20+6}{15}=\frac{26}{15}=1\frac{11}{15}$	3	$4\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=4\frac{11}{15}$	14
$\frac{13}{3}+\frac{2}{5}=\frac{26}{15}=1\frac{11}{15}$	3	$4\frac{11}{15}$	11
$4\frac{8}{15}$	2	$4\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=4\frac{11}{15}=\frac{71}{15}$	3
$\frac{13}{3}+\frac{2}{5}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$	2		
$4{,}73$	1		
$4\frac{1}{5}$	1		
$4\frac{4}{15}+\frac{6}{15}=4\frac{10}{15}=4\frac{2}{3}$	1		
$\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$	1		
$\frac{13}{3}+\frac{2}{5}=\frac{65}{15}+\frac{10}{15}=\frac{75}{15}=5$	1		
$\frac{13}{3}+\frac{2}{5}=\frac{65}{15}+\frac{6}{15}=\frac{61}{15}$	1		
$4{,}33+0{,}4=4{,}43$	1		
$4\frac{9}{15}=4\frac{3}{5}$	1		
$\frac{73}{15}=4\ 13715$	1		
$\frac{5}{3}+\frac{2}{5}=\frac{25}{15}+\frac{6}{15}=\frac{31}{15}=2\frac{1}{15}$	1		

Stichprobe:
Meisterschüler, Test C, n = 156

Quotenverteilung:
Lösungsquote: 30,8 % (48)
Fehlerquote: 17,9 % (28)
Nichtbearbeitungsanteil: 51,3 % (80)

Tabelle 31: Auszug aus den Rechen- und Fehlertypenlisten der Meisterschüler. Phänomene zur Aufgabe C_C (Division Bruchrechnung).

[50] In der Spalte Anzahl wird hier und in den nachfolgenden Tabellen die Anzahl der Probanden angegeben, die ein bestimmtes Phänomen oder Muster notierten. Es wird jeweils die Grundmenge der Stichprobe mit „n = …“ in den Tabellen mit angegeben.

Nicht nur bei richtigen, sondern auch bei falschen Ergebnissen können mehrere Bearbeitungswege und unterschiedliche Fehlerquellen zum selben Ergebnis führen. Diese Erkenntnis ist für die anschließend zu formulierenden Fehleranalysehinweise maßgeblich. Nachfolgend wird diese Problematik mehrerer zum selben Ergebnis führender Lösungswege noch mal an konkreten Beispielen erörtert (vgl. Abbildung 35 und Abbildung 36 auf den Folgeseiten).

Die beiden in Tabelle 31 grau unterlegten Fehlerphänomene zeigen dasselbe Ergebnis. Die Bearbeitungswege unterscheiden sich jedoch nicht nur auf den ersten Blick, sondern es liegen jeweils ganz unterschiedliche Fehlerquellen zugrunde. Abbildung 35 und Abbildung 36 verdeutlichen hierzu antizipierte, nicht notierte Zwischenschritte in den Lösungswegen. Das erste Fehlerphänomen lässt sich auf eine fehlerhafte Umwandlung des Bruches in gemischter Schreibweise zurückführen. Das Phänomen ist bereits als Fehlermuster aus einer anderen Studie zur Bruchrechnung bekannt [vgl. Winter, Wittmann 2009] und tritt bedingt durch die gemischte Schreibweise auf. Der zweite Fehlertyp basiert auf einer Verwechslung von Operationen bzw. Rechenregeln. Hier wird anstatt der Addition von Brüchen eine Multiplikation ausgeführt. Auch dieses Fehlermuster ist bereits bekannt aus anderen Veröffentlichungen wie u. a. Padberg [2002]. Es ist mit ähnlichen operationsvertauschenden Mustern in Kapitel 5.3.2 aufgeführt (vgl. Tabelle 9).

$$4\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{20+6}{15}$$

nicht notierte, antizipierte Zwischenrechnung :

$$\frac{(4\cdot 1)}{3}+\frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{3}+\frac{2}{5} \rightarrow \frac{(4\cdot 5)+(2\cdot 3)}{3\cdot 5} \rightarrow \frac{20+6}{15}$$

$$\rightarrow \frac{26}{15}$$

$$\rightarrow 1\frac{11}{15}$$

Abbildung 35: Zwei Fehlerphänomene – ein Ergebnis?! Erste Fehlerquelle: Fehlermuster G1.

$$4\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{13}{3}+\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{26}{15} \qquad \left| \begin{array}{l} \textit{nicht notierte, antizipierte Zwischenrechnung}: \\ \dfrac{13\cdot 2}{3\cdot 5} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow 1\frac{11}{15}$$

Abbildung 36: Zwei Fehlerphänomene – ein Ergebnis?! Zweite Fehlerquelle: Fehlerhafte Addition durch Multiplikation anstatt Addition.

Im konkreten Fall wurden aus den vorliegenden Daten zwei Fehlermuster generiert:

Typ	**Fehlermuster**	**Fehlerphänomen**
G1	$g\frac{a}{b} \rightarrow \frac{g\cdot a}{b}$	$4\frac{1}{3} \rightarrow \frac{4\cdot 1}{3}$
A3	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{13}{3}+\frac{2}{5} \rightarrow \frac{13\cdot 2}{3\cdot 5} \rightarrow \frac{26}{15}$

Tabelle 32: Beispiele generierter Fehlermuster in der Bruchrechnung.

Wie an beiden Beispielen zu sehen ist, können mehrere Fehlertypen zum selben Ergebnis führen (vgl. Abbildung 35 und Abbildung 36). Aufgrund dessen wird dies bei der Formulierung der Fehleranalysehinweise berücksichtigt. Ggf. werden die vorhandenen Typenvarianten gegenübergestellt. Dies tritt z. B. auf bei der Aufgabenstellung: „Berechnen Sie folgende Aufgabe: $6\cdot 4{,}312m =$.“ Bei zwei Antwortalternativen kann dasselbe Ergebnis jeweils durch zwei unterschiedliche Fehlerquellen hervorgerufen worden sein. Die Fehleranalysetexte differenzieren dementsprechend die Fehlerbeschreibungen (vgl. Tabelle 38).

Bestätigung antizipierter Fehlerphänomene

Die Analyse der Bearbeitungsfehler dient, wie bereits erwähnt, vor allem dem Auffinden des tatsächlichen Phänomens bzw. der Fehlerquelle. So notieren viele Probanden häufig nur ein Ergebnis. Auch Interviews führen oft nicht zur tatsächlichen Fehlerquelle, weil es den Probanden schwer fällt, ihren eigenen Bearbeitungsweg mittels lautem Denken zu erinnern oder zu reflektieren. Beim Lösen quadratischer Gleichungen konnten bei einem fehlerhaften Ergebnis mehrere Fehlerquellen aufgrund der rationalen Aufgabenanalyse aufgestellt werden (vgl. Tabelle 33). Die empirische Erhebung bestätigte beide Muster, im Anhang finden sich die entsprechenden vollständigen Typenlisten der Meisterschüler (vgl. Anhang 14.6.5). Bei einer einmaligen Notation eines Phänomens kann prinzipiell noch nicht von einem typischen Fall gesprochen werden. Aufgrund dessen wurden zu dieser Aufgabe und entsprechend in anderen Fällen ggf. Interviews bzw. Gespräche mit Laien sowie Experten im Sinne einer konsensuellen Validierung durchgeführt.

Antizipierte Fehlerphänomen (rationale Aufgabenanalyse)	**Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163 (Empirie)**
Antizipiertes Fehlerphänomen $z^2 - 2z - 15 = 0$ | *Fehlerquelle nicht erkennbar* $z = 17$	4
Antizipierte Fehlerquelle I $z^2 - 2z - 15 = 0$ $z^2 - 2z = 15$ | *Antizipierte Zwischenrechnungen, antizipierte Fehlerquelle I* $\vert +2 \rightarrow z^2 - z = 15 + 2$ $z^2 - z^1 = 17$ $z^{2-1} = 17$ $z = 17$	2
Antizipierte Fehlerquelle II $z^2 - 2z - 15 = 0 \quad \vert + 2z$ $z^2 = 15 + 2z \quad \vert : z$ $z = (15 + 2z) : z$ $z = 17$	1

Tabelle 33: Bestätigung der durch rationale Aufgabenanalysen antizipierten Fehlerquellen mithilfe der Analyse von Rechenwegen.

Im Bereich der Algebra wurden für die Indikatoraufgaben (vgl. Kapitel 7.1.2ff) diverse Fehlermuster entwickelt. Interessant ist hier aber auch die Vielfalt der korrekten Bearbeitungswege. So dominiert beim Berechnen von Variablen insbesondere in linearen Gleichungen neben den klassischen Berechnungsvarianten die Ermittlung über Ausprobieren und Einsetzen konkreter Werte (vgl. Tabelle 34; markierte Spalten). Bei quadratischen Gleichungen ist dieses Vorgehen nicht dominierend, führt aber häufig zu Fehlermustern derart, dass nur eine korrekte Variablenlösung angegeben wird. Mögliche andere, die die Lösungsmenge komplettieren würden, fehlen.

Rechenphänomen *Lösen durch Ausprobieren*

Bei den in Tabelle 34 (siehe Folgeseite) grau hinterlegten Rechenphänomenen (korrektes Ergebnis) wird aufgrund der Schreibweise darauf geschlossen, dass die Variable durch Ausprobieren ermittelt wurde. Bei der Direktnotation des Ergebnisses kann nicht genau analysiert werden, über welchen Weg die Probanden zur Lösung gelangt sind. Die Häufigkeitsverteilung der anderen Rechentypen lässt aber vermuten, dass auch in dieser Gruppe noch einige Probanden über das direkte Einsetzen zur korrekten Lösung gelangt sind.

Rechentyp	**Anzahl**
$2c + 3 = 9 \quad \vert -3$ $2c = 6 \quad \vert :2$ $c = 3$	78
$2 \cdot 3 + 3 = 9$	24
$c = 3$	23
$2c = 6$ $c = 3$	16
$c = \frac{9-3}{2} = 3$	15
$2c = 9 - 3 \quad \vert :2$ $c = 6 : 2$ $c = 3$	7
$6 + 3 = 9$	2
$3 = 9 - 2c \quad \vert -9$ $-6 = -2c \quad \vert :(-2)$ $3 = c$	1

Tabelle 34: Auswahl von Rechentypen zur Aufgabe „2c + 3 = 9“. Kumulierte Häufigkeiten der Testgruppen B und C (n = 291).

Ähnliche Fehlermuster in unterschiedlichen mathematischen Anforderungsbereichen

Beim Lösen linearer Gleichungen bzw. beim Termumformen lassen sich anhand der Typenlisten diverse Fehlerphänomene erkennen. Nach dem Bilden von Mustern in den einzelnen Listen und einer anschließenden Gegenüberstellung ist zu erkennen, dass sich einige Muster bzw. mögliche Fehlerquellen in den Anforderungsbereichen ähneln. In Tabelle 36 ist eine Auswahl dieser Fehler und möglicher Fehlerquellen aufgeführt. Es entstehen bspw. fehlerhafte Ergebnisse dadurch, dass die Rechnungen nicht auf beiden Seiten der Gleichung angewendet werden. Oder die Anwendung bezieht sich nur auf einen Operanden auf beiden Gleichungsseiten. Des Weiteren werden Multiplikatoren von Variablen oder teilweise sogar deren Exponenten getrennt von der Variablen betrachtet.

Phänomen	Muster/Beschreibung möglicher Fehlerquellen
$(4u-5w)^2$ $\rightarrow 1uw$	$(ax-by)^2 \rightarrow (a-b)^2 \cdot xy$ Separierte Betrachtung von Variablen und deren Multiplikatoren → Zusammenfügen „gleicher“ Komponenten
$(4u-5w)^2$ $\rightarrow -1uw$	$(ax-by)^2 \rightarrow (a-b) \cdot xy$ Separierte Betrachtung von Variablen und deren Multiplikatoren → Zusammenfügen „gleicher“ Komponenten; Fehlende Wahrnehmung einiger Merkmale → Missachtung des Exponenten
$3a+5=26$ $\rightarrow a=26-5-3$ $\rightarrow a=18$	$ax+b=c \quad \vert -a, -b$ $\rightarrow x=c-a-b$ Separierte Betrachtung von Variablen und deren Multiplikatoren → Zusammenfügen „gleicher“ Komponenten

Tabelle 35: Typische, sich ähnelnde Fehlerphänomene und -muster bei linearen Gleichungen, Termumformungen und Rechnen mit Potenzen.

Bestätigung bereits aus der Literatur bekannter Fehlermuster

Eine andere bereits bekannte Problematik besteht in der unvollständigen Wahrnehmung der Merkmale eines Terms, wie sie bereits in den 70ern von Shevarev [1978] oder von Davis et al. [1978] beschrieben wurde (vgl. Kapitel 5.3.3; dort u. a. „binary confusion“). So werden bspw. Potenzen oder Vorzeichen nicht berücksichtigt. Tabelle 35 fasst bereits einige dieser typischen Phänomene zusammen und beschreibt sie in Mustern. In Tabelle 37 ist ein konkretes Phänomen aus dieser Untersuchung aufgeführt, in dem die gerade beschriebene Übertragbarkeit bereits bekannter Fehlermuster auf andere mathematische Bereiche deutlich wird: hier bzgl. der von Shevarev und Davis et al. festgestellten Wahrnehmungsdefizite.

Phänomen	Muster/Beschreibung
$10-2b=4$ $\rightarrow b=-3$	$a-bx=c \rightarrow x=\frac{c-a}{b}$ Unvollständige Wahrnehmung der Aufgabenmerkmale → Übersehen eines negativen Vorzeichens

Tabelle 36: Typische Fehlerphänomene und -muster bei linearen Gleichungen, Termumformungen und Rechnen mit Potenzen.

Neu identifizierte Fehlermuster

Die Fehleranalysen zu den Testaufgaben im Bereich der Arithmetik wie auch der Bruchrechnung lassen bei den getesteten Meisterschülern die gleichen typischen Fehlermuster erkennen wie bei Schülern allgemeinbildender Schulen. Auch bei den Aufgaben zum Anforderungsbereich „Binomische Formeln" zeigen sich die bereits von Becker [1985] und Malle [1993] beschriebenen Fehlermuster Bin1 „$(a-b)^2 \rightarrow a^2 - 2ab - b^2$" und Bin2 „$(a-b)^2 \rightarrow a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$" (vgl. Tabelle 17). Sowohl zur ersten als auch zweiten binomischen Formel konnte ich weitere, sich stark ähnelnde und als typisch zu bezeichnende Fehlermuster identifizieren (vgl. Tabelle 37)[51].

Phänomen	**Fehlermuster**
$(2x+3y)^2 \rightarrow 4x+9y$	$(ax+by)^2 \rightarrow [a^2]x+[b^2]y$
$(2x+3y)^2 \rightarrow 4x^2+9y^2$	$(ax+by)^2 \rightarrow [a^2]x^2+[b^2]y^2$
$(2x+3y)^2 \rightarrow 4x+6y$	$(ax+by)^2 \rightarrow [2a]x+[2b]y$
$(4u-5w)^2 \rightarrow 16u-25w$	$(ax-by)^2 \rightarrow [a^2]x-[b^2]y$
$(4u-5w)^2 \rightarrow 16u^2-25w^2$	$(ax-by)^2 \rightarrow [a^2]x^2-[b^2]y^2$
$(4u-5w)^2 \rightarrow 8u-10w$	$(ax-by)^2 \rightarrow [2a]x-[2b]y$

Tabelle 37: Neue durch die Analyse der empirischen Daten identifizierte typische Fehlermuster zu binomischen Formeln.

8.4 Generierung und Auswahl von Aufgaben- und Antwortmustern

Das internetbasierte Self-Assessment-Angebot Mathe-Meister wird durch ein modifiziertes Multiple-Choice-Design mit diagnostischem Potential charakterisiert. Dieses gebundene Antwortformat bedingt für jedes Item die Auswahl diagnostisch aussagekräftiger Distraktoren. Diese sollen zum einen typische Lösungen abbilden und zum anderen eine diagnostische Auswertung ermöglichen, auf deren Basis konkrete Fehleranalysehinweise an den Nutzer ausgege-

51 Eine ausführliche Veröffentlichung neuer Fehlermuster zu den verschiedenen in dieser Arbeit integrierten mathematischen Themengebieten erfolgt ausführlich an anderer Stelle.

ben werden können. Wie bereits erwähnt läuft der Online-Test so ab, dass ein Item eingeblendet wird und der Nutzer aufgefordert wird, dieses für sich bspw. auf Papier zu lösen. Nach einem definierten Zeitintervall wird die Antwortauswahl eingeblendet, die der Nutzer nun mit seinem eigenen Ergebnis abgleiche und seine Lösung daraus auswählen soll. Auf Basis der zu jedem Item ausgewählten Lösung soll in der Rückmeldung am Ende des Tests zu fehlerhaften Ergebnissen jeweils eine detaillierte Erklärung vermutlicher Fehlerquellen erfolgen (Fehleranalysehinweise). Die Grundlage dafür liefern die Analysen bspw. in den Kapiteln 5.3 und 8.2.

Mit dem Ziel, dem Nutzer einen schnellen, einfachen und damit zuverlässigerem Abgleich des eigenen Ergebnisses mit der gegebenen Multiple-Choice-Auswahl der Antwortalternativen zu ermöglichen, wird die Anzeige der Distraktoren zu den einzelnen Testitems im Online-Test Mathe-Meister auf eine Abbildung von Ergebnissen (ohne Rechenweg) reduziert. Der Übersichtlichkeit halber soll der Umfang der Antworten, aus denen der Nutzer auswählen kann, wird es insgesamt maximal zehn Alternativen geben, wovon eine stets belegt ist durch die Auswahloption „Ich kenne die Antwort nicht“. So ist die nachfolgend erörterte Auswahl von Antwortmustern eingeschränkt auf maximal neun typische Antworten zu einem Item.

Problematik der Zusammenfassung mehrerer Fehlermuster

Nur Ergebnisse als Distraktoren anzuzeigen bedeutet auch, dass bei der Generierung der Antwortformate sich in den Rechenwegen unterscheidende Muster mit demselben Ergebnis zu einem Muster/einer Antwortalternative zusammengefasst werden. Für eine vollständige Fehleranalyse wird in entsprechenden Fällen der anschließend ausgegebene Fehleranalysehinweis die Beschreibungen mehrerer Fehlermuster bzw. möglicher Fehlerquellen enthalten. Da die höchst wahrscheinlich zugrunde liegende Fehlerquelle dort im Detail und umgangssprachlich beschrieben werden, wird es für an der Diagnostik Interessierte kein Hindernis sein, diese Beschreibungen mit ihrem eigenen Bearbeitungsweg abzugleichen und zu erkennen, welches Fehlermuster der eigenen Fehlerquelle entspricht. Der Fall zweier möglicher Fehlerquellen tritt z. B. bei der Aufgabenstellung „Berechnen Sie folgende Aufgabe: $6 \cdot 4{,}312m =$“ auf. In Tabelle 38 werden die dazugehörigen Fehleranalysehinweise aufgeführt.

Antwortalternative	**Fehleranalysetext**
25,86 m	Sie haben vermutlich die Multiplikation mit dem dritten Nachkommawert der zweiten Zahl (hier: 2) vergessen oder das Zwischenergebnis bei der Addition nicht berücksichtigt. […]
26,52 m	Sie haben vermutlich beim schriftlichen Multiplizieren (oder auch im Kopf) das dritte Zwischenergebnis (18) der falschen Stelle zugeordnet und bei der Addition dadurch ein falsches Endergebnis erhalten oder Sie haben die Stellenwerte (Ziffern) der zweiten Zahl von links nach rechts multipliziert und die Zwischenergebnisse falsch untereinander geschrieben. Korrekt wäre gewesen: $\begin{array}{r} 6\cdot 4{,}312 \\ \hline 12 \\ 6 \\ 1\,8 \\ 24 \\ \hline 25{,}872 \end{array}$

Tabelle 38: Ausschnitt aus den Fehleranalysehinweisen: Differenzierung bei mehreren möglichen Fehlerquellen.

Erörterung der Schreibweisen der Musterdeklarationen

Die „klassische“ Form der Formalisierung von Bearbeitungsmustern zeigt sich z. B. bei dem typischen Fehler der Bruchrechnung „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ oder analog in der Subtraktion „Zähler minus Zähler, Nenner minus Nenner“ (vgl. Tabelle 7) – der auch in dieser Untersuchung stets den vorrangigen Fehler zu entsprechenden Aufgabenstellungen bildet. Dieser zeigte sich als Phänomen in einer der Testaufgaben bspw. in dieser Form: „$\frac{6}{7}-\frac{2}{5} \to \frac{6-2}{7-5} \to \frac{4}{2}$“ oder „$\frac{6}{7}-\frac{2}{5} \to \frac{4}{2}$“. Im Rahmen der Mustergenerierung wurden diese Phänomene zu einer Kategorie zusammengefasst, welche mit dem Muster „$\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \to \frac{[a-b]}{[c-d]}$“ beschrieben wird. In den Phänomenen vollständig ausgerechnete Werte werden innerhalb der Musterdeklarationen in eckigen Klammern notiert (vgl. Tabelle 39). Zur Nachvollziehbarkeit sei dies im Sinne einer Anwendungsvorschrift an zwei Beispielen aufgezeigt:

Phänomen A	Muster A		Phänomen B	Muster B
$\frac{6}{7}-\frac{2}{5}\rightarrow\frac{4}{2}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\rightarrow\frac{[a-c]}{[b-d]}$		$\frac{6}{7}-\frac{2}{5}\rightarrow 2$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\rightarrow\left[\frac{a-c}{b-d}\right]$

Tabelle 39: Anwendungsvorschrift zum Auswerten algebraischer Musterformulierungen.

Generierung von Aufgabenmustern – Aspekte und Begründungen

Ein *Aufgabenmuster* wird nicht nur bestimmt durch die bei der Aufgabenkonstruktion berücksichtigten *Aufgabenaspekte* (vgl. Kapitel 7.2.2), sondern ggf. erweitert um Aspektausprägungen, die sich erst durch die empirische Aufgabenanalyse als relevant herausstellten. Einige Beispiele der dadurch entstandenen Antwortauswahlen und Aufgabenmuster werden nun zu unterschiedlichen Anforderungsprofilen aufgezeigt und erörtert.

8.4.1 Aufgaben- und Antwortmuster zum Anforderungsprofil *Umrechnen von Einheiten*

Aufgabenstellung D_A Teil 3:

Berechnen Sie folgende Aufgabe: 16m = __________ dm.

Aufgabenmuster D_A Teil 3:

Umrechnen eines Wertes in eine andere Einheit:

$$a\,E_1 = (ax)E_2 \;\middle|\; a \in \mathbb{N} \;\wedge\; a \le 99 \;\wedge\; x = 10\,.$$

Auf Basis der empirischen Aufgabenanalyse der Probandennotationen zu den Testaufgaben dieses Aufgabentyps wird ein Aufgabenmuster deklariert. Hier lassen sich die Operanden an sich sowie die Rechenanforderungen als relevante Aufgabenaspekte[52] isolieren. Dabei entspricht a dem gegebenen Wert und x dem gesuchten Faktor zur korrekten Umrechnung von a in der gegebenen Einheit 1 (E_1) in den entsprechenden Wert in Einheit 2 (E_2). Ferner sollte $a \in \mathbb{N}$

52 Zur Erörterung der Aufgabenaspekte sei verwiesen auf Kapitel 7.2.2.1.

gelten, da die Probanden bei Multiplikationen mit bspw. reellen Zahlen ein anderes Antwortverhalten bzw. andere Ergebnistypen zeigten. Des Weiteren ist aus dieser und anderen Aufgabenbearbeitungen ersichtlich, dass die Multiplikation einer zweistelligen natürlichen Zahl mit 10 zu weniger fehlerhaften Ergebnissen führte als bspw. mit einer dreistelligen Zahl. Aus diesem Grund wird der Aufgabenaspekt des Ausgangsoperanden mit $a \leq 99$ festgelegt. Ebenso erwies sich der Bezug zwischen Ausgangs- und Zieloperanden – in diesem Fall bedingt durch das Umrechnungsverhältnis der Einheiten zueinander – als weiterer zu beachtender Aufgabenaspekt. Aufgrund der Analyseergebnisse zu Multiplikationen mit 100 oder 1000 wurden hier nicht alle Zehnerpotenzen als mögliche Operanden eingesetzt, sondern der Bereich des Operanden x konkret auf 10 festgelegt. Bei Multiplikationen mit höheren Zehnerpotenzen traten in den Untersuchungen mehr Fehler durch zu wenige oder zu viele Nullen auf als bei der Multiplikation mit 10. Da mit diesem Item die Kenntnis und korrekte Anwendung der Umrechnungsvorschrift überprüft werden soll und nicht das Multiplizieren mit Zehnerpotenzen, ist es hilfreich Fehler beim Multiplizieren an sich soweit es geht zu reduzieren.

Für den Online-Test werden die ermittelten Fehlertypen zu diesem Aufgabentyp wie in Tabelle 40 dargestellt reduziert und zusammengefasst. Die im Anhang 14.6.1 abgebildeten Typenlisten der Meisterschüler verdeutlichen, dass es keine weiteren Phänomene gab. Tabelle 41 zeigt die Verteilung der einzelnen Muster auf verschiedene Probandengruppen und verdeutlicht die Auswahl für die Zielgruppe Meisterschüler.

Antw[53]-Nr.[54]	Antw-Wert[55]	Antw-Alternative	Antw-Muster
D_A 3 / 1	r	160 dm	$[ax]\,E_2 \mid x = 10$
D_A 3 / 2	f	1,6 dm	$[\frac{a}{x}]\,E_2 \mid x = 10$
D_A 3 / 3	f	1600 dm	$[ax]\,E_2 \mid x = 10^2$
D_A 3 / 4	f	16000 dm	$[ax]\,E_2 \mid x = 10^3$
D_A 3 / 5	f	32 dm	$[ax]\,E_2 \mid x = 2$
D_A 3 / 6	f	16 dm	$a\ E_2$
D_A 3 / 7	f	0,16 dm	$[\frac{a}{x}]\,E_2 \mid x = 10^2$
D_A 3 / 8	f	0,0016 dm	$[\frac{a}{x}]\,E_2 \mid x = 10^4$
D_A 3 / 9	f	160000 dm	$[ax]\,E_2 \mid x = 10^4$

Tabelle 40: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe D_A Teil 3 (Umrechnen von Einheiten).

Bei der vorhergehenden rationalen Aufgabenanalyse (vgl. Kapitel 7.2.2.2) zur Aufgabe D_A (Teil 3) wurde auch die korrekte Notation der Berechnungsvorschrift mit im konkreten Fall „$(16 \cdot 10)dm$“ als weitere korrekte Antwortalternative erarbeitet. Die empirische Aufgabenanalyse aber zeigte, dass diese Form oder eine ähnliche Notation einer korrekten Berechnungsvorschrift als Ergebnis von keinem der Probanden genutzt wurde. Daher wurde diese Antwortalternative verworfen.

---

53 „Antw“ steht nachfolgend in Tabellen als Abkürzung für „Antwort“.

54 Die Antwortnummer steht als ID für spätere Verweise auf konkrete Phänomene oder Muster. Die Reihenfolge der Muster richtet sich nach den Häufigkeiten in der Erhebung bei Meisterschülern. Dabei werden zuerst stets die korrekten Alternativen aufgeführt, anschließend daran folgen die fehlerhaften, jeweils absteigend sortiert nach Häufigkeiten.

55 Der Antwortwert gibt die dichotome Auswertungsvorgabe für die Defizitanalyse des Programms nach f (falsch) und r (richtig) an.

Antwortalternative	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163	Anzahl Auftreten Haupt- und Realschüler Klasse 10, n = (22 + 76)
160 dm	117	71
1,6 dm	11	11
1600 dm	8	19
16000 dm	6	3
32 dm	2	0
16 dm	2	0
0,16 dm	1	1
0,0016 dm	1	0
160000 dm	1	0

Tabelle 41: Auftretenshäufigkeiten der Antwortalternativen zur Aufgabe D_A Teil 3 (Umrechnen von Einheiten) bei verschiedenen Probandengruppen.

Schwierigkeiten beim Rechnen mit Zehnerpotenzen werden auch beim nachfolgenden Aufgabentyp D_A Teil 4 sichtbar. Hier ist es allerdings weniger die Multiplikation als die Division, die den Probanden Schwierigkeiten bereitet. Die Aufgabe zeigt ein gutes diagnostisches Potential hinsichtlich der Kenntnis der Umrechnungsregeln. Die Ergebnisse lassen sich also diagnostisch auswerten und Fehlermuster zuordnen.

<u>Aufgabenstellung D_A Teil 4:</u>

Rechnen Sie in die angegebene Einheit um: 5000 mg = ___________ kg.

<u>Aufgabenmuster D_A Teil 4:</u>

Umrechnen eines Wertes in eine andere Einheit:

$$a\,E_1 = [\tfrac{a}{x}]E_2 \;\big|\; a \in \mathbb{N} \;\wedge\; 10000 \geq a \geq 1000 \;\wedge\; 1000 \,|\, a \;\wedge\; x = 10^6 .$$

Antw-Nr.	Antw-Wert	Antwortalternative	Antw-Muster
D_A 4 / 1	r	0,005 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^6$
D_A 4 / 2	f	5 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^3$
D_A 4 / 3	f	0,5 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^4$
D_A 4 / 4	f	0,05 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^5$
D_A 4 / 5	f	50 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^2$
D_A 4 / 6	f	500 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^1$
D_A 4 / 7	f	0,0005 kg	$[\frac{a}{x}]E_2 \mid x = 10^7$

Tabelle 42: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe D_A Teil 4 (Umrechnen von Einheiten).

Antwortalternative	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163	Anzahl Auftreten Haupt- und Realschüler Klasse 10, n = (22 + 76)
0,005 kg	33	16
5 kg	61	31
0,5 kg	43	32
0,05 kg	16	11
50 kg	1	4
500 kg	1	2
0,0005 kg	1	8

Tabelle 43: Auftretenshäufigkeiten der Antwortalternativen zur Aufgabe D_A Teil 4 (Umrechnen von Einheiten).

Tabelle 42 zeigt alle für diese Aufgabe generierten Antwortmuster an. Die Antwortalternativen 5 bis 7 zu dieser Aufgabe traten jeweils nur einmal bei Probanden in der Untersuchung auf. Als logische Folgerung aus klassischen Rechenfehlern beim Multiplizieren und Dividieren mit bzw. durch Zehnerpotenzen lassen sich diese Antwortalternativen jedoch auf Basis der rationalen Aufgabenanalysen unter Einbezug bekannter fehleranalytischer Erkenntnisse als mögliche typische Fehler antizipieren. Empirisch bestätigt wird dies durch die Erhebungen bei Schülern allgemeinbildender Schulformen. Tabelle 54 stellt dazu die Daten einer Erhebung bei Zehntklässlern einer Haupt- und Realschule dar. Da aufgrund der vorgesehenen Anzahl von bis zu neun Antwortalternativen im Falle dieser Aufgabe diese Alternativen mit hinzugenommen werden konnten, ohne dass häufiger auftretende herausfallen mussten, habe ich entschieden, diese hinzuzufügen. Denn weder in den Fehlertypenlisten der Meisterschüler noch der anderen Schulformen traten weitere Phänomene zu dieser Aufgabe auf[56].

8.4.2 Aufgaben- und Antwortmuster zum Anforderungsprofil *Algebra*

Im Anforderungsbereich Algebra wurden bei den empirischen Erhebungen alle bisher aus der Literatur bekannten Fehlermuster bestätigt (vgl. Kapitel 5.3.3). Durch die Analyse auch nicht so häufig auftretender Notationen konnten zu verschiedenen Aufgabentypen weitere typische Muster identifiziert werden (vgl. Tabelle 37). Außerdem wurden weitere algebraische Bereiche und Aufgabenstellungen analysiert und Muster typisiert, die bisher hinsichtlich der Fehleranalyse nicht oder kaum erkundet sind.

<u>Aufgabenstellung I_A d):</u>
Fassen Sie soweit wie möglich zusammen: $c+c+c$.

<u>Aufgabenmuster I_A d)</u>:
<u>Zusammenfassen eines Terms</u>: $av_1+\ldots+av_n \;\; mit \; a=1 \;\; \wedge \;\; n\in\mathbb{N} \;\; \wedge \;\; n\leq 9$.

---

56 Auf eine Abbildung aller Typenlisten zu dieser Aufgabe im Anhang wird daher zur Reduzierung des Umfangs der Arbeit verzichtet. Eine Einsicht aller Listen ist auf Anfrage möglich. Dieses Vorgehen wird in nachfolgenden ähnlichen Fällen ebenso gehandhabt. Im Anhang werden vorrangig Typenlisten abgebildet, die zur besseren Nachvollziehbarkeit der Auswahl der Antwortalternativen hilfreich sind.

Antw-Nr. Antw-Wert		Antw-Alternative	Antw-Muster	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 298
I_A d) 1	r	$3c$	nv	187
I_A d) 2	f	c^3	v^n	30
I_A d) 3	f	c	v	13
I_A d) 4	f	ccc	vvv… n-mal	1
I_A d) 5	f	3^c	n^v	1
I_A d) 6	f	3^1	n^1	1
I_A d) 7	f	c^2	v^{n-1}	1

Tabelle 44: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe IA d) (Termumformungen).

Aufgabenstellung I_A e):

Fassen Sie soweit wie möglich zusammen: $d \cdot d \cdot d$.

Aufgabenmuster I_A e):

Zusammenfassen eines Terms: $av_1 \cdot \ldots \cdot av_n \; mit \; a = 1 \;\wedge\; n \in \mathbb{N} \;\wedge\; n \leq 9$.

Antw-Nr. Antw-Wert		Antw-Alternative	Antw-Muster	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 319
I_A e) 1	r	d^3	v^n	197
I_A e) 2	f	3d	nv	34
I_A e) 3	f	d	v	7
I_A e) 4	f	$d^2 \cdot d$	$v^2 \cdot (v_3 \cdot \ldots \cdot v_n)$	1
I_A e) 5	f	3^d	n^v	1
I_A e) 6	f	3^3	n^n	1
I_A e) 7	f	d^2	v^{n-1}	1

Tabelle 45: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe I_A e) (Termumformungen).

Die Deklarationen der Aufgabenmuster zu I_A d) und e) legen fest, dass bei beiden Aufgabentypen die Variablen nur in einfacher Potenz kombiniert werden sollen (c+c+c und nicht bspw. $c^2+c^2+c^2$). Bei den Analysen hat sich bei ähnlichen Aufgaben mit höheren Potenzen herausgestellt, dass diese zu anderen Fehlermustern führen – also durch diesen Aufgabenaspekt unterschiedliche Aufgabentypen erzeugt werden. Hinsichtlich des diagnostischen Potentials stellten sich Aufgabentypen, in denen höhere Potenzen vorkamen, als weniger geeignet im Sinne der diagnostischen Zielsetzungen dieses Anforderungsprofils heraus. Mit diesen Items soll insbesondere die Regelkenntnis bzgl. der Operatorverknüpfung überprüft werden. Dies wird durch höhere Potenzen in den Aufgaben erschwert.

Aufgabenstellung I_A a):
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen: $(2x+3y)^2$.

Aufgabenmuster I_A a):
Klammern auflösen und Zusammenfassen eines Terms:
$(ax+by)^2 \ mit\ a,b \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1<a,b<10$.

Bei diesem Aufgabentyp sollen die Faktoren der Variablen kleiner als zehn sein, um die Rechenanforderungen im kleinen Einmaleins zu halten. Außerdem zeigten die Analysen ähnlicher Aufgaben, dass das Fehlen eines Faktors vor einer Variablen – also Faktor gleich eins – ein relevanter Aufgabenaspekt ist, der zu anderen Aufgabentypen führt.

Insbesondere bei diesem und ähnlichen Aufgabentypen mit Potenzen größer eins und Klammersetzungen war die Mannigfaltigkeit von Fehlertypen sehr ausgeprägt. Aufgrund der Beschränkung auf maximal neun Antwortalternativen mussten hier im Vergleich zu vielen anderen Aufgaben sehr umfangreiche Reduktionen erfolgen[57]. Gleiches gilt für Aufgabentypen zu linearen oder quadratischen Gleichungen (vgl. z. B. nachfolgende Aufgabe J_A a). Bei der hier vorgestellten Aufgabe I_A a) wurden z. B. die als typisch identifizierten Phäno-

57 Der Vollständigkeit halber sind die Typenlisten zu dieser Aufgabe aus allen drei Testbögen bei Meisterschülern im Anhang 14.6.2.1ff abgebildet.

men „$(2x+3y)(2x+3y)$" und „$4x^2+6xy+6xy+9y^2$" nicht mit aufgenommen, da das definierte Maximum der Anzahl von Antwortalternativen bereits mit aus fehlerdiagnostischer Sicht vorteilhafteren Mustern ausgeschöpft ist. Beide Phänomene traten mehrfach auf und zeigen korrekte Lösungsansätze, die nicht vollständig bis zum Ende weiterverfolgt wurden, und somit keine vollständige Lösung darstellten. Die dazugehörigen Muster wären: „$(ax+by)(ax+by)$" und „$[a^2]x^2+[ab]xy+[ab]xy+[b^2]y^2$".

Antw-Wert	**Antwortalternative**	**Antw-Muster**	**Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 454**
r	$4x^2+12xy+9y^2$	$[a^2]x^2+[2ab]xy+[b^2]y^2$	27
f	$4x+9y$	$[a^2]x+[b^2]y$	38
f	$4x^2+9y^2$	$[a^2]x^2+[b^2]y^2$	26
f	$4x+6y$	$[2a]x+[2b]y$	18
f	$2x^2+3y^2$	ax^2+by^2	30
f	$\sqrt{2x+3y}$	$\sqrt{ax+by}$	8
f	$25xy$	$[(a+b)^2]xy$	7
f	$25xy^2$	$[(a+b)^2]xy^2$	4
f	$4x^2-12xy+9y^2$	$[a^2]x^2-[2ab]xy+[b^2]y^2$	3

Tabelle 46: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe I_A e) (Termumformungen).

Aufgabenstellung J_A a):

Lösen Sie folgende Gleichung: $3a+5=26$.

Aufgabenmuster J_A a):

Lösen einer Gleichung: $ax+b=c \;\big|\; a,b,c,x \in \mathbb{N} \;\wedge\; 1>a,b>10$.

Bei diesem Aufgabentyp zu linearen Gleichungen stellte sich nochmals heraus, dass ein wichtiger Aufgabenaspekt für ein diagnostisches Potential die Werte und Rechenanforderungen an sich darstellen. Einfache Rechnungen in der Menge der natürlichen Zahlen erhöhen das diagnostische Potential, wenn das

Augenmerk der Diagnose nicht auf den Rechenfertigkeiten, sondern auf anderen Anforderungen liegt. Im Anhang werden zum Vergleich der ausgewählten Antwortalternativen die Typenlisten für diese Aufgabe abgebildet (vgl. Anhang 0).

Antw-Nr. Antw-Wert		Antw-Alternative	Antw-Muster	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163
J_A a) 1	r	$a = 7$	$x = [\frac{c-b}{a}]$	91
J_A a) 2	r	$7 = a$	$[\frac{c-b}{a}] = x$	
J_A a) 3	r	$3 \cdot 7 + 5 = 26$	$a \cdot [\frac{c-b}{a}] + b = c$	17
J_A a) 4	f	$3a = 21$	$ax = [c-b]$	6
J_A a) 5	f	$a = 3$	$x = a$	1
J_A a) 6	f	$a = 8,66$	$x = [\frac{c}{a}]$	1
J_A a) 7	f	$a = 24$	$x = [c - b + a]$	1
J_A a) 8	f	$a = 3,25$	$[a+b]x = c$ $\rightarrow \quad x = [\frac{c}{a+b}]$	1
J_A a) 9	f	$a = 18$	$x = [c - a - b]$	1

Tabelle 47: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe J_A a) (lineare Gleichungen).

8.4.3 Aufgaben- und Antwortmuster zum Anforderungsprofil *Bruchrechnung*

Bei Aufgabentypen der Bruchrechnung war die Mannigfaltigkeit der Fehlertypen wie auch der Rechentypen am ausgeprägtesten. Die bereits bekannten Fehlermuster lassen sich bestätigen und weitere, bisher nicht veröffentlichte Typen können identifiziert werden. Durch die Beschränkung der Anzahl der Distraktoren mussten einige der weniger häufig auftretenden, aber dennoch als typisch zu betrachtenden Fehlermuster weggelassen werden.[58]

[58] Eine detaillierte Veröffentlichung und Erörterung der neuen Erkenntnisse zu weiteren noch nicht veröffentlichten typischen Fehlermustern wird an anderer Stelle erfolgen. Im Anhang

Im Bereich der Bruchrechnung nahmen vor allem Rechentypen – also korrekte Lösungsvarianten – viel Raum ein. Auffällig waren hier insbesondere die Ergebnisse zu den Aufgaben „$\frac{3}{11}:2=$“, „$\frac{9}{10}:\frac{3}{5}=$“ und „$\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}=$“. Da die Vorschriften zu Lösungsnotationen in der Bruchrechnung in Schulen nicht einheitlich gehandhabt werden, existieren in der Regel diverse mathematisch korrekte Antworten. Dementsprechend soll den Probanden die Option verschiedener korrekter Lösungen eröffnet werden. Nachfolgend wird dies am Beispiel einer Multiplikationsaufgabe anhand der Auswahl der Antwortalternativen verdeutlicht, falls sie bspw. eine oder mehrere andere Schreibweisen nicht kennen sollten. Das Ziel des Anforderungsprofils *Bruchrechnung* ist letztlich die Überprüfung, dass die Probanden in der Lage sind, die Aufgaben mathematisch korrekt zu lösen, nicht aber eine Bewertung des angewendeten Lösungsverfahrens.

Aufgabenstellung K_A e):

Berechnen Sie folgende Aufgabe: $\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}=$.

Aufgabenmuster K_A e):

Multiplikation zweier ungleichnamiger Brüche:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\ mit\ a,b,c,d\in\mathbb{N}\quad\wedge\quad d|a\quad\wedge\quad c|b\quad\wedge\quad 1<a,b,c,d<20\wedge a\neq b\neq c\neq d$$

---

wird vorab eine Auswahl einiger sehr umfangreicher Typenlisten aufgezeigt. Alle anderen Listen können auf Anfrage eingesehen werden.

Antw-Nr.	Antw-Wert	Antwortalternative	Antw-Muster
K_A e) 1	r	2	$\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right]$ umgewandelt in natürliche Zahl
K_A e) 2	r	$\frac{24}{12}$	$\frac{[a\cdot c]}{[b\cdot d]}$ ohne Kürzen
K_A e) 3	r	$\frac{72}{36}$	$\frac{[a\cdot c]}{[b\cdot d]}$ mit kgV-Bildung, ohne Kürzen
K_A e) 4	r	$\frac{4}{2}$	$\frac{[a\cdot c]}{[b\cdot d]}$ bei vorherigem vollständigen Kürzen über Kreuz
K_A e) 5	f	$\frac{72}{6}$	$\frac{[a\cdot c\cdot b]}{b}$ Gleichnamigmachen der Brüche, Beibehaltung des Nenners
K_A e) 6	f	$\frac{18}{16}$	$\frac{[b\cdot c]}{[a\cdot d]}$ Kehrwertmultiplikation mit erstem Bruch
K_A e) 7	f	$\frac{16}{18}$	$\frac{[a\cdot d]}{[b\cdot c]}$ Kehrwertmultiplikation mit zweitem Bruch
K_A e) 8	f	$\frac{17}{6}$	$\frac{[a\cdot d+c\cdot b]}{[b\cdot d]}$ vollständig gekürzt
K_A e) 9	f	$2\frac{5}{6}$	$\frac{[a\cdot d+c\cdot b]}{[b\cdot d]}$ vollständig gekürzt, umgewandelt in gemischte Schreibweise

Tabelle 48: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe K_A e) (Bruchrechnung).

Im vorliegenden Fall der Aufgabe K_A e) sind die Typenlisten sowohl zu Fehlern als auch zu korrekten Lösungen sehr umfangreich ausgefallen. Eine vollständige Übersicht findet sich daher im Anhang 14.6.3. Es wurden so viele korrekte Antwortalternativen aufgenommen, da diese im Vergleich zu typischen Fehlern häufiger auftraten. Insbesondere bei Aufgaben mit solch umfangreichen Typenlisten wurden Ergebnisse aus Erhebungen bei Schülern anderer Schulformen hinzugezogen, um die Auswahl der Antwortalternativen bereits in der Entwicklungsphase zu validieren. Für die obige Aufgabe werden in Tabelle 49) die Erhebungsdaten für einzelne Phänomene von Hauptschülern Jahrgangsstufe 10, Gymnasiasten Jhgst.[59] 9 und den Meisterschülern gegenübergestellt. Im Anhang 14.6.3 werden die dazugehörigen Typenlisten für alle drei Gruppen dargestellt. Daraus wird deutlich werden, dass es eine Vielzahl weiterer Phänomene gibt, die in der Regel nur in einer der Gruppen jeweils einmal auftreten. Teilweise können für diese Phänomene sogar Muster generiert werden, die mögliche Fehlerquellen vermuten lassen. Dennoch konnten aufgrund der Anzahlbeschränkung der Distraktoren einige als typisch erscheinende Muster nicht mit aufgenommen werden. Die im Anschlusskapitel vorgestellte Evaluation wird daher u. a. der Frage nachgehen, ob die auf Basis der Papiertests erhaltenen Muster den Probanden beim Multiple-Choice-Test fehlen. Dazu werden die Probanden bei der Evaluation einen Eintrag machen, sollte ihre Lösung in den Antwortalternativen nicht enthalten sein (vgl. Kapitel 8.5.3).

---

[59] Jhgst.: Abkürzung für Jahrgangsstufe.

Antwort-Alternative	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163	Anzahl Auftreten Hauptschüler Jhgst. 10, n = 112	Anzahl Auftreten Gymnasiasten Jhgst. 9, n = 119
2	49	33	25
$\frac{24}{12}$	3	7	4
$\frac{72}{36}$	4	0	1
$\frac{4}{2}$	2	3	2
$\frac{72}{6}$	7	0	1
$\frac{18}{16}$	2	0	0
$\frac{16}{18}$	3	1	2
$\frac{17}{6}$	1	0	0
$2\frac{5}{6}$	1	0	0

Tabelle 49: Gegenüberstellung der Auftretenshäufigkeiten der Antwortalternativen zur Aufgabe K_A e) (Bruchrechnung). Im Vergleich: Hauptschüler, Gymnasiasten, Meisterschüler.

8.4.4 Aufgaben- und Antwortmuster zum Anforderungsprofil *Dreisatz, Verhältnisrechnung*

Bei Aufgabentypen, in denen der Dreisatz angewendet werden soll, war die Mannigfaltigkeit der Antworten ähnlich umfangreich wie bei der Bruchrechnung. Im Unterschied aber zur Bruchrechnung zeigten sich hier besonders viele nur einmal auftretende Fehler, die nicht auf eine Fehlerquelle zurückgeführt werden konnten. Auch Interviews halfen hier nur begrenzt weiter. Ich vermute, dass diese Fehler auf Flüchtigkeitsfehler zurückzuführen sind, die keiner typischen Systematik unterliegen.

Aufgabenstellung P_C 5):

„Zwei Lacke A und B werden im Verhältnis 1:4 gemischt. Der Lack A kostet 25,-€/l, der Lack B 20,- €/l. Insgesamt soll 1 Liter angemischt werden. Wie viel kostet die Lackmischung insgesamt?“

Aufgabenmuster P_C 5):

Gegeben: Mischungsverhältnis a:b; Preis pro Einheit; zwei Variablen A und B (hier: Lacke/Farben)

Gesucht: Gesamtpreis für Mischung von 1 Liter

Rechenanforderungen: Multiplikation bzw. Division in der Menge der natürlichen Zahlen; kleines Einmaleins; Multiplikation und Addition von Fünfer- oder Zehnerpotenzen.

Antwort-Alternative	**Antw-Wert**	**Antw-Muster**	**Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 156**
21 €	r	Korrekt	77
105 €	f	Ansatzweise korrekte Multiplikation der jeweiligen Preise mit den Anteilsangaben; kein Teilen durch Gesamtanteil	13
21,25€	f	Fehlerhafter Gesamtanteil (größerer Anteil wird gleichgesetzt mit Gesamtanteil); Verhältnis 1:3, nicht 1:4	11
11,25 €	f	Multiplikation beider Preisvorgaben mit demselben Bruch; Bildung des Bruches aus Anteilsbeschreibung (1:4 → ¼)	4
24 €	f	Vertauschen der Anteilszuordnungen	3

23,75 €	f	Fehlerhafter Gesamtanteil (größerer Anteil wird gleichgesetzt mit Gesamtanteil) Verhältnis 1:3 anstatt 1:4, (anstatt insgesamt 5 Teilen nur 4 Teile) und zusätzliches Vertauschen der Anteilszuordnung	3
25 €	f	Korrekte Berechnung eines Anteilspreises, Addition des Gesamtpreises der zweiten Variablen	2
125 €	f	Korrekte Multiplikation mit Anteilszuordnung, keine Division durch Gesamtteil $(20 \cdot 4 + 25 \cdot 1)$	2
22,50 €	f	Multiplikation beider Preisvorgaben mit demselben Bruch; Bildung des Bruches aus Anteilsbeschreibung (1:4 → ¼), anschließendes Verdoppeln	1

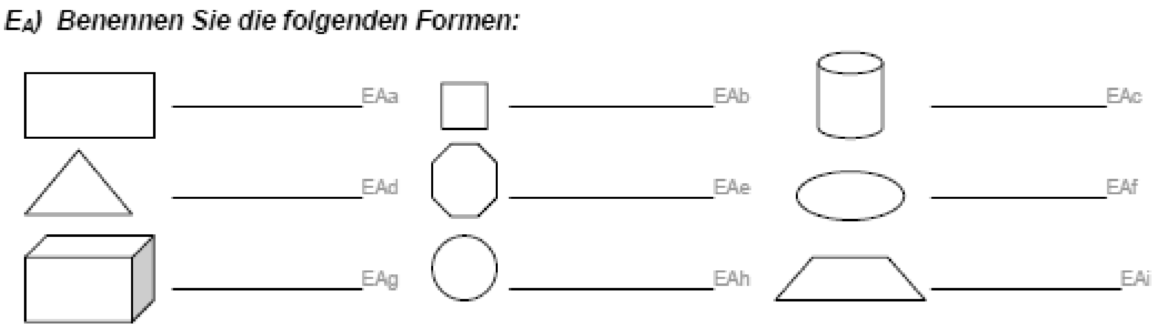
Tabelle 50: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe P_C 5) (Dreisatz). Auftretenshäufigkeiten bei Meisterschülern.

8.4.5 Aufgaben- und Antwortmuster zum Anforderungsprofil *Geometrie*

Insbesondere bei Items zum Anforderungsprofil Geometrie lassen sich die von den Probanden gegebenen Antworten meistens nicht in einem formalen, mathematischen Ausdruck zusammenfassen, wie es bspw. bei den typischen Fehlern zur Arithmetik oder zur Bruchrechnung gehandhabt wird (vgl. u. a. Tabelle 10 oder Tabelle 46). Hier musste ein anderer Weg gefunden werden sowohl die Antwort- als auch die Aufgabenmuster so zu formalisieren, dass durch die Vorgaben analoge Aufgaben konstruiert werden können. Dazu werden die ausschlaggebenden Merkmale in einer verbalisierten Konstruktions- bzw. Anweisungsvorschrift formuliert. Nachfolgend wird dies an einigen Beispielen aus der Geometrie verdeutlicht.

Aufgabenspezifische Mustergenerierung und Genauigkeit der Aufgabenformulierung

Bei den Aufgabenstellungen zur Geometrie musste zudem festgestellt werden, dass sie teilweise so spezifisch sind, dass eine *allgemeingültige* Formulierung von Fehlermustern nur schwer möglich ist. Dies sei demonstriert an der Aufgabenstellung E_A b) zum Benennen geometrischer Formen. Bei Items zu diesem Anforderungsprofil zeigte sich die Relevanz sehr präzise formulierter Aufgabenstellungen, um auf Basis der Antworten eine gute Diagnostik zu ermöglichen. Im Papiertest wurde bspw. folgende Aufgaben formuliert:



Bei dieser Aufgabenstellung wurden sowohl das Rechteck als auch das Quadrat mit dem Begriff „Viereck“ benannt. Bei der Ellipse traten Bezeichnungen wie „Ei“ und „ovaler Kreis“ auf. Ein allgemeines Fehlermuster, welches hier hätte formuliert werden können, wäre: „Beschreibung geometrischer Formen durch umgangssprachliche Wortwahl“. Zusätzlich könnte dieses in einigen Bereichen wiederum ergänzt werden durch die unvollständige Wahrnehmung der Merkmale, wie z. B. bei der Bezeichnung des Quadrates als Rechteck oder Viereck. Bei diesen Aufgaben wurde daher für die Generierung der Antwortformate für den Online-Test Mathe-Meister entschieden, diese sehr spezifisch zu halten, um es auch für die Entwicklung von Parallelaufgaben genau genug konkretisieren zu können. D. h., dass das Generieren von Analogaufgaben zu diesen Aufgabentypen teilweise kaum oder gar nicht möglich ist.

Fehlertypen	Anzahl	Rechentypen	Anzahl
Viereck	25	Quadrat	92
$a \cdot b$	7		
a^2	4		
Würfel	3		
$a \cdot a$	3		
Rechteck	3		
Rechteck Fläche	1		
$a \cdot a \cdot a \cdot a = 4a$	1		
$[g \cdot h] / 2$	1		

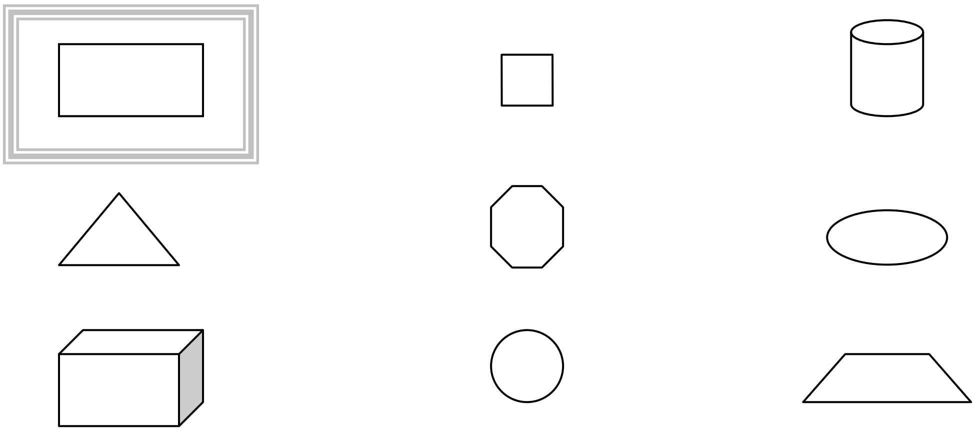
Tabelle 51: Ausschnitt aus den Typenlisten zum Benennen geometrischer Formen, Beispiel Quadrat. (Meisterschüler, n = 163)

Die Aufgabenstellung E_A zur Benennung geometrischer Formen wird aufgrund der Erkenntnisse aus den Papiertesterhebungen genauer formuliert, da bei den Probandennotationen zur Bezeichnung z. B. des Quaders der Begriff „Vierkant“ mehrfach auftrat. Nach Recherchen hierzu im berufsbildenden Bereich stellte sich heraus, dass dieses eine insbesondere in Handwerksberufen gängige und fachlich korrekte Bezeichnung für Materialien dieser Form ist. Eine andere aus diagnostischer Perspektive problematische Antwort durch die Ungenauigkeit der Aufgabenstellung zeigt sich auch bei Abfragen des Quadrates. Hier wurde häufig das „Rechteck“ als Antwort benannt. Mathematisch ist die Antwort hinsichtlich der Fragestellung korrekt, nur nicht genau genug.

Insbesondere beim Quadrat kommt ein zu beachtender technischer Aspekt hinzu, dass es möglich ist, dass ein Quadrat aufgrund unterschiedlicher Auflösungen nicht auf allen Computerbildschirmen auch als Quadrat dargestellt werden könnte. Um diese Problematik zu umgehen und da die anderen Aufgabentypen dieses Anforderungsprofil im Sinne der Indikatoraufgaben hervorragend abdecken, wurde das Quadrat nicht mit in den Online-Test als Abfrageitem aufgenommen. Die Aufgabenstellung wurde nach weiteren Analysen umformuliert und angepasst:

Aufgabenstellung *neu* E_A b):

Betrachten Sie die folgenden geometrischen Formen:



Nennen Sie die genaue Bezeichnung für die Form im grauen Rahmen.

Aufgabenmuster *neu* E_A b):

Gegeben: Abbildungen verschiedener geometrischer Formen.

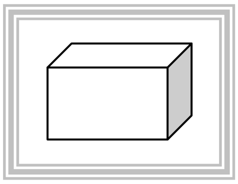
Gesucht: Genaue Benennung einer bestimmten Form aus der Auswahl.

Antw-Alternative	**Antw-Wert**	**Antw-Muster**	**Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163**
Rechteck	r	Richtige Antwort	116
$a \cdot b$	f	Formel zur Flächenberechnung der gesuchten Form	14
Viereck	f	Umgangssprachliche Bezeichnung	4
Quadrat	f	Bezeichnung einer ähnlichen Form	3
$\frac{a \cdot b}{2}$	f	Fehlerhafte Formel mit Variablenbezeichnungen aus Formeln zur gesuchten Form	1
Quadratische Fläche	f	Fehlerhafte Beschreibung einiger Merkmale der gesuchten Form	1

Tabelle 52: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe E_A b) (Geometrie, Benennung geometrischer Formen). Auftretenshäufigkeiten bei Meisterschülern.

Für die Abfrage des Quaders (Aufgabe E_A g)) sind die Antwortalternativen und -muster in Tabelle 53 aufgeführt.

Zu bezeichnendes Objekt:



Antw-Alternative	Antw-Wert	Antw-Muster	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163
Quader	r	Richtige Antwort	53
Kubus	r	Richtige Antwort	3
Würfel	f	Bezeichnung einer ähnlichen Form	22
$a \cdot b \cdot c$	f	Formel zur Flächenberechnung der gesuchten Form	12
Quadrat	f	Benennung eines Merkmals der gesuchten Form	7
Rechteck	f	Benennung eines Merkmals der gesuchten Form	6
Säule	f	Bezeichnung einer Form aus dem Alltag, die Merkmalen der gesuchten Form entspricht.	2

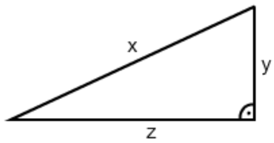
Tabelle 53: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe E_A g) (Geometrie, Benennung geometrischer Formen).

Im Falle der „Säule“ zeigten Interviews, dass dieser Begriff auf Formen aus dem Alltag zurückgeführt wurde. Die Begründung für den Quader als Säule war, dass es nicht nur runde Säulen gäbe.

Verwechseln von Berechnungsvorschriften als Fehlerquelle

Aufgabenstellung F_A b):

Nennen Sie die Gleichung des Satzes von Pythagoras für folgendes rechtwinkliges Dreieck mit den angegebenen Seitenbezeichnungen.



Aufgabenmuster F_A b):

Benennung einer Berechnungsvorschrift in Form einer Gleichung für bestimmte geometrische Sätze; im konkreten Fall: Satz des Pythagoras.

Bei der Abfrage von Berechnungsvorschriften treten besonders häufig Fehlertypen auf, bei denen zwar eine Berechnungsvorschrift genannt wird, diese aber nicht der gesuchten entspricht. Diese „Ausweich-Antworten“ sind sogar häufig für andere Formen korrekt formuliert und stellen keine wahrlose Kombination von Variablen dar. Allerdings tritt auch diese Art der Antworten gehäuft auf: für die gesuchte Berechnungsvorschrift typische Variablenbezeichnungen werden im Sinne einer Berechnungsvorschrift falsch kombiniert. (vgl. Tabelle 54, Folgeseite)

Antw-Alternative	Antw-Wert	Antw-Muster	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163
$z^2 + y^2 = x^2$	r	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung	80
$x^2 = z^2 + y^2$	r	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung	
$x = \sqrt{z^2 + y^2}$	r	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung	6
$\sqrt{x^2} = \sqrt{z^2 + y^2}$	r	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung	1
$z^2 = x^2 + y^2$	f	Falsch Anordnung der Variablen: unterste Kante des Dreiecks wird als Hypotenuse aufgefasst.	5
$x \cdot y \cdot z$	f	Angabe eines falschen Terms als Kombination aus den Variablen; im konkreten Fall: Kubenvolumina	2
$\frac{y}{z} \cdot 2$	f	Angabe eines falschen Terms als Kombination aus den Variablen	2
$z^2 \cdot y^2 = x^2$	f	Korrekte Anordnung der Variablen, ein falscher Operator; konkret: Mal anstatt Plus	2
$z + y = x^2$	f	Ansatzweise korrekte Anordnung der Variablen, Missachtung von Potenzen	2

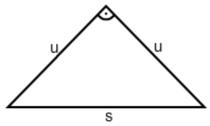
Tabelle 54: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe FA b) (Geometrie, Gleichung Satz des Pythagoras).

Untypische Bezeichnungen im Aufgabemuster als Fehlerverursacher

Eine tiefergreifende Diagnose im Sinne der Überprüfung von Transferleistungen ermöglichen Aufgabentypen zur Übertragung von Regeln und Bezeichnungen auf nicht typische Anordnungen oder Benennungen geometrischer Formen oder Zusammenhänge (vgl. z. B. Aufgabentyp F_A d)). Die Antwortalternativen zeigen, dass die Regel prinzipiell bekannt ist. Die Verwendung nicht typischer Bezeichnungen oder anderer Anordnungen aber führt zu vielen Fehlern und hohen Fehlerquoten (vgl. Tabelle 54 und nachfolgend Tabelle 55).

Aufgabenstellung F_A d):

Nennen Sie die Gleichung des Satzes von Pythagoras für folgendes rechtwinkliges Dreieck mit den angegebenen Seitenbezeichnungen.



Antw-Alternative	Antw-Wert	Antw-Muster	Anzahl Auftreten Meisterschüler n = 163
$u^2 + u^2 = s^2$	r	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung	67
$s^2 = u^2 + u^2$	r	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung	1
$s = \sqrt{u^2 + u^2}$	r	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung	2
$s^2 = 2u^2$	r	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung	11
$s = u^2 + u^2$	f	Teilweise korrekte Gleichung, Missachtung der Quadratur einer Variable	3
$u \cdot u \cdot s$	f	Angabe eines falschen Terms als Kombination aus den Variablen; im konkreten Fall: Kubenvolumina	2
$s^2 = \sqrt{u^2 + u^2}$	f	Formel ansatzweise korrekt - fehlerhafte/unvollständige Notation von Rechenschritten	2
$4u = s^2$	f	Fehlerhafte Zusammenfassung gleicher Variablen	2
$s = u + u$	f	Fehlerhafte Entfernung von Potenzen	2

Tabelle 55: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe F_A b) (Geometrie, Gleichung Satz des Pythagoras). Auftretenshäufigkeiten bei Meisterschülern.

Die Aufgaben F_A b) und F_A d) laufen prinzipiell auf die inhaltlich gleiche Abfrage hinaus: die Kenntnis der Gleichung zum Satz des Pythagoras. Dennoch unterscheiden sie sich zum einen in ihrer Art der Aufgabenstellung und zum anderen in den Ausprägungen von Rechen- und Fehlertypen. Was die Art der Aufgabenstellung angeht, so wird in der ersten Aufgabe nur die Gleichung zur Benennung der Dreieckseiten mit x, y und z abgefragt. Dies könnte als eine „klassische Form" der Benennung bezeichnet werden, denn in den meisten Lehrwerken lauten die Variablenbezeichnungen a, b, c oder x, y, z. Dabei steht x für die Hypotenuse und die Kathetenvariablen unterscheiden sich. Bei der zweiten Aufgabenstellung sind die Kantenbezeichnungen „unüblich", die Katheten sogar identisch bezeichnet. Dennoch erkannten die meisten Probanden die Hypotenuse korrekt und stellten sie allein auf eine Seite der Gleichung. Ähnliche Fehlerphänomene zeigen sich bei beiden Aufgaben in folgender Form:

Phänomen F_A d)	**Phänomen F_A b)**	**Antw-Muster**
$u^2 + u^2 = s^2$	$z^2 + y^2 = x^2$	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung
$s^2 = u^2 + u^2$	$x^2 = z^2 + y^2$	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung
$s = \sqrt{u^2 + u^2}$	$x = \sqrt{z^2 + y^2}$	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung
$u \cdot u \cdot s$	$x \cdot y \cdot z$	Angabe eines falschen Terms als Kombination aus den Variablen; im konkreten Fall: Kubenvolumina

Tabelle 56: Übereinstimmende Phänomene bei den Aufgaben F_A b) und F_A d) (Geometrie, Gleichung Satz des Pythagoras).

Phänomen und Musterbeschreibung	**Anmerkungen**
$s^2 = 2u^2$ Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung	Bedingt durch die identische Bezeichnung der Katheten kann dieses Phänomen bei Aufgabe b) prinzipiell nicht auftreten, was auch empirisch bestätigt wird.
$\sqrt{x^2} = \sqrt{z^2 + y^2}$ Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung	Das Phänomen, alle Variablen unter eine Wurzel zu schreiben, tritt bei Aufgabe d) bei den Meisterschülern auf.
$z^2 = x^2 + y^2$ Falsch Anordnung der Variablen: unterste Kante des Dreiecks wird als Hypotenuse aufgefasst.	Diese falsche Anordnung der Variablen tritt bei Aufgabe F_A d) bei den Meisterschülern ebenfalls auf. Allerdings in unterschiedlichen Formen, die jeweils nur einmal vorkommen. Aufgrund der häufiger auftretenden anderen Phänomene wurden diese nicht mit aufgenommen.
$\frac{y}{z} \cdot 2$ Angabe eines falschen Terms als Kombination aus den Variablen	Dieses Phänomen tritt bei Aufgabe F_A d) nicht in dieser Form auf. Zwar wurden dort auch Brüche als Term notiert, doch sind die darin verwendeten Variablen nicht die Katheten oder Hypotenusenbezeichnungen, sondern andere wie die Höhe („h“) oder „g“ – vermutlich für die Grundseite. Die Fehlerquellen dürften dementsprechend sehr unterschiedlich verortet sein.
$4u = s^2$ Fehlerhafte Zusammenfassung gleicher Variablen	Bei diesem Phänomen werden zwei mögliche Fehlerquellen vermutet: Die Zahl zwei wurde anstatt als Exponent der Katheten als Faktor eingesetzt oder die Addition der Quadrate wurde falsch ausgeführt: $u^2 + u^2 \to 4u$. Dieses Phänomen tritt in keiner Form in der anderen Aufgabe auf, was auf die unterschiedliche Benennung der Variablen zurückgeführt wird.
$z^2 \cdot y^2 = x^2$ Korrekte Anordnung der Variablen, ein falscher Operator; konkret: Mal anstatt Plus	Die Multiplikation anstatt der Addition der Kathetenvariablen tritt bei Aufgabe F_A d) bei den Meisterschülern ebenfalls auf (einmal). Aufgrund der häufiger auftretenden anderen Phänomene wurden diese nicht mit aufgenommen.

Tabelle 57: Abweichende Phänomene bei den Aufgaben F_A b) und F_A d) (Geometrie, Gleichung Satz des Pythagoras).

Die Ausprägungen einiger Fehlerphänomene unterscheiden sich nur hinsichtlich fehlerhafter Potenzen. Die Anordnung der Variablen und Operatoren ist ansonsten korrekt (vgl. Tabelle 58).

Unterschiedliche Fehlerphänomene – ähnliche Fehlerquelle			
$s = u + u$	$z + y = x^2$	$s^2 = \sqrt{u^2 + u^2}$	$s = u^2 + u^2$

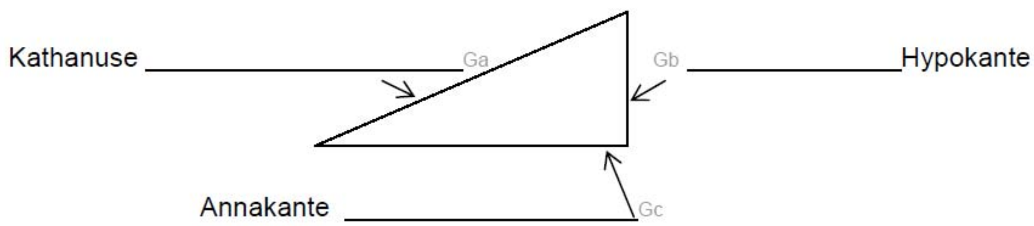
Tabelle 58: Von der Fehlerquelle her ähnliche Fehlerphänomene bei den Aufgaben F_A b) und F_A d) (Geometrie, Gleichung Satz des Pythagoras).

Identifikation bekannter Fehlerquellen und -muster bei neuen Aufgabenstellungen und anderen mathematischen Bereichen

Hinsichtlich des diagnostischen Potentials wurde bei der Aufgabe G_A das Fehlerphänomen besonders deutlich, nicht alle Merkmale einer Aufgabe wahrzunehmen (vgl. Kapitel 5.3.3). Hier lassen sich die Theorien von Shevarev [1978] sowie Davis et al. [1978] auf die Wahrnehmung der Merkmale gebundener Antwortformate übertragen. Bei den generierten Antwortalternativen handelt es sich um Kombinationen korrekter wie falscher Begriffe. Bei den Erhebungen stellte sich heraus, dass zwar die korrekten Begriffe ausgewählt wurden, aber die Zuordnung zur Zeichnung - also die Anordnung der Begriffe - nicht berücksichtigt wurde.

Die nachfolgende Aufgabenstellung G_A war im Papiertest mit einem offenen Antwortformat in dieser Form gestaltet:

G_A) In dem folgenden rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenbezeichnungen falsch angegeben. Schreiben Sie die korrekten Bezeichnungen auf:



Die von den Probanden angegebenen Bezeichnungen wurden in den Typenlisten erfasst und für die Konstruktion der Antwortalternativen übernommen. Dabei wurde auch die jeweilige Zuordnung berücksichtigt. Das sich daraus ergebende Multiple-Choice-Format wird nachfolgend vorgestellt. Eine Zuordnung von Auftretenshäufigkeiten kann entsprechend des Aufgabenformats im Papiertest nur bezüglich der jeweiligen Kante erfolgen. Zur Verdeutlichung der von den Probanden gewählten Begriffe und Zuordnungen wird diese hier für Testbogen A, n = 163, abgebildet:

<u>Kante Ga Korrekte Bezeichnung: Hypotenuse</u>

Fehlertypen	**Anzahl**	**Rechentypen**	**Anzahl**
Kathete	12	Hypotenuse	68
Annakante	9		
Gegenkathete	8		
Hypokante	6		
Ankathete	2		
Kathenuse	2		
Antangente	1		

Tabelle 59: Typenlisten zu Probandenbezeichnungen der Hypotenuse. Aufgabe G_A (Geometrie, Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck).

Kante Gb Korrekte Bezeichnungen: Kathete (An-, Gegenkathete)

Fehlertypen	**Anzahl**	**Rechentypen**	**Anzahl**
Hypothenuse	19	Gegenkathete	40
Kantanuse	8	Ankathete	18
Hypokante	4	Kathete	10
Annakante	3		
Höhe	1		
Tangente	1		

Tabelle 60: Typenlisten zu Probandenbezeichnungen einer Kathete. Aufgabe G_A (Geometrie, Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck).

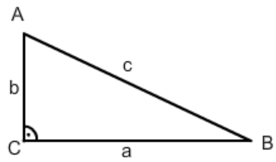
Kante Gc Korrekte Bezeichnungen: Kathete (An-, Gegenkathete)

Fehlertypen	**Anzahl**	**Rechentypen**	**Anzahl**
Kantanuse	8	Ankathete	60
Hypokante	6	Gegenkathete	12
Hypothenuse	5	Kathete	10
Annakante	4		
Ankante	1		
Tangente	1		
Grundlinie	1		
Annaluse	1		

Tabelle 61: Typenlisten zu Probandenbezeichnungen einer Kathete (untere Kante in Abbildung). Aufgabe G_A (Geometrie, Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck).

Aufgabenstellung G_A:

Nennen Sie mit Bezug auf Punkt B des folgenden rechtwinkligen Dreiecks die Bezeichnungen für die Seiten a, b und c. (Fortsetzung siehe Folgeseite)



Antw-Nr.	Antwortalternative	Antw-Wert	Antw-Muster
G_A 1	a: Kathete b: Kathete c: Hypotenuse	r	Korrekte Begriffe, korrekte Zuordnung
G_A 2	a: Gegenkathete b: Ankathete c: Hypotenuse	r	Korrekte Begriffe, korrekte Zuordnung
G_A 3	a: Hypotenuse b: Ankathete c: Gegenkathete	f	Korrekte Begriffe, falsche Zuordnung
G_A 4	a: Katanuse b: Katanuse c: Hypotenuse	f	Ein korrekter Begriff mit korrekter Zuordnung
G_A 5	a: Hypotenuse b: Katante c: Katante	f	Ein korrekter Begriff, falsche Zuordnung
G_A 6	a: Kathenuse b: Hypotenuse c: Kathenuse	f	Ein korrekter Begriff, falsche Zuordnung
G_A 7	a: Gegenkatanuse b: Ankatanuse c: Hypotenuse	f	Ein korrekter Begriff mit korrekter Zuordnung
G_A 8	a: Ankatante b: Gegenkatante c: Hypotenuse	f	Ein korrekter Begriff mit korrekter Zuordnung
G_A 9	a: Kathete b: Hypotenuse c: Kathete	f	Korrekte Begriffe, falsche Zuordnung

Tabelle 62: Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe G_A (Geometrie, Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck).

8.5 Evaluationen

Die gesamte Entwicklung dieses Online-Tests beruht sowohl auf der Datengewinnung durch theoretische Untersuchungsmethoden, wie rationale Aufgabenanalysen, als auch auf eigenen empirischen Untersuchungen. Letztere sind ausschlaggebend für die getroffene Auswahl von Antwortalternativen zu den einzelnen Testitems des Online-Tests.

Die Testentwicklung an sich wurde bereits umfassend evaluiert und die für diese Arbeit relevanten Methoden und Ergebnisse exemplarisch erörtert (vgl. z. B. Kapitel 7.2.5). Nachfolgend werden nun das Evaluationsvorgehen und die Ergebnisse der Evaluationen zur Hauptzielsetzung dieser Arbeit – der Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential erörtert.

Zur Überprüfung der Testitems und zum Erhalt der für diese Arbeit relevanten qualitativen Daten über Antworten und das Antwortverhalten der Zielgruppe zu den Testitems kamen ausschließlich offene oder halboffene Antwortformate zum Einsatz. Ohne diese wäre eine qualitative diagnostische Auswertung der Tests im Rahmen der empirischen Aufgabenanalyse nicht in dieser Tiefe und Ausführlichkeit möglich gewesen. Für den Mathe-Meister Online-Test ist dahingegen ein Multiple-Choice-Test – also ein gebundenes Antwortformat – vorgesehen. Das unterschiedliche Antwortformat der Ausgangserhebung und des angestrebten Online-Tests bedingt für die Evaluation der Entwicklungen von Antwortmustern im Rahmen dieser Arbeit die Frage, ob die unterschiedlichen Antwortformate der Tests vergleichbare Ergebnisse liefern. Außerdem wird die qualitative Datenauswertung zur Generierung und zur Auswahl der Antwortmuster überprüft. Daraus ergeben sich für die Evaluation der hier entwickelten Aufgaben- und Antwortmuster drei grundlegende Fragestellungen:

Eval_1 Sind die generierten Antwortmuster valide?

Eval_2 Wie verhalten sich die Daten der Ausgangstests (Papiertests) zu den Daten des modifizierten Multiple-Choice-Verfahrens des Online-Tests mit den im Rahmen dieser Arbeit generierten Antwortmustern?

Eval_3 Bildet die Auswahl der Distraktoren für den Online-Test die typischen Antworten vollständig ab?

Nachfolgend werden die Anlagen und Ergebnisse zu diesen Evaluationsfragen erörtert. Mit dem Ziel der Nachvollziehbarkeit der Daten und Entwicklungen wurden im Rahmen dieser Arbeit besonders komplexe oder diskussionswürdige Inhalte und Ergebnisse bereits erörtert (vgl. insbesondere Kapitel 8.2 bis 8.4). Die dazugehörigen Typenlisten oder Rohdatensätze finden sich im Anhang. Eine Reduktion auf eine exemplarische Auswahl auch innerhalb der Evaluationen soll den Umfang dieser Arbeit in einem adäquaten Rahmen halten.[60]

8.5.1 Eval_1: Validität der Mustergenerierung

Bei der Frage nach der Validität der entwickelten Muster geht es darum, ob die durch mich als einzelne Person kategorisierten und generierten Aufgaben- und Antwortmuster auch bei anderen Personen auf Zustimmung treffen bzw. diese zu gleichen Ergebnissen gelangen. „Bei der Validierung qualitativer Daten spielen Vergleiche unterschiedlicher Teile desselben Materials […], Vergleiche zwischen Personen […] sowie Hintergrundinformationen aus der Literatur oder von Experten eine Rolle. Das wichtigste Kriterium ist jedoch die interpersonale Konsensbildung (konsensuelle Validierung). Können mehrere Personen sich auf die Glaubwürdigkeit und den Bedeutungsgehalt des Materials einigen, gilt dies als Indiz für seine Validität." [Bortz, Döring 2006, S. 328] Die konsensuelle Validierung kann prozessbegleitend (formativ) aber auch am Ende des Beurteilungsprozesses (summativ) stattfinden. Der Konsens zwischen verschiedenen Urteilern eines Teams gilt als eine Selbstverständlichkeit, die unbedingt zu erlangen ist. Es wird unterschieden in:

- *kommunikative, dialogische Validierung*, in der ein Konsens zwischen Forschern und Beforschten überprüft wird.
- *argumentative Validierung*, bei der ein Konsens mit außenstehenden Laien, Kollegen oder Experten auf diesem Gebiet abgefragt wird.

Eine gescheiterte Konsensbildung bei Interpretationen des Datenmaterials führt zu einer Überarbeitung und ggf. zu einer erneuten Validitätsprüfung. [vgl. Bortz, Döring 2006, S. 326ff)

---

60 Alle Rohdaten wie Testbögen, Typenlisten oder Statistiken und auch Entwicklungs- und Evaluationsergebnisse können auf Anfrage eingesehen werden.

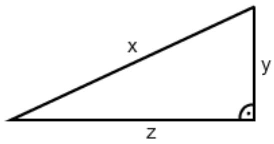
Die Validierung der Mustergenerierung fand sowohl summativ als auch formativ statt. So wurden bereits prozessbegleitend die generierten Muster und Rankings mit bestehenden Erkenntnissen aus der Mathematikdidaktik und Psychologie abgeglichen. Eine dominierende Rolle spielen hierbei die in Kapitel 5.3 zusammengefassten Ergebnisse fehleranalytischer Untersuchungen.

Des Weiteren wurden konsensuelle (argumentative) Validierungen durchgeführt. Bereits während der Entwicklungsphase, aber auch nach Abschluss wurden mehrere in das Projekt eingebundene sowie außenstehende Experten, Kollegen sowie Laien mit eingebunden. Zum einen erhielten sie Ausschnitte aus Typenlisten mit der Bitte um eine Kategorisierung und Generierung von Mustern. Diese habe ich anschließend mit meinen eigenen Ergebnissen abgeglichen. Zum anderen erhielten die Personen Ausschnitte bereits erstellter Aufgaben- und Antwortmuster und den dazugehörigen Typenlisten, um die Übereinstimmung der Kategorisierung und Generierung zu überprüfen. Nur bei wenigen Items gab es keine Übereinstimmung und ein Konsens im Sinne einer Überarbeitung meiner eigenen Ergebnisse wurde aufgrund argumentativer Diskussionen mit den anderen Urteilern hergestellt. Es gab nur zwei konkrete Fälle, in denen ausführliche Diskussionen mit verschiedenen Urteilern geführt werden mussten.

Eine Konsensbildung durch Diskussion erfolgte bspw. bei der bereits erwähnten Aufgabe zur Auswahl der genauen Bezeichnung für die geometrische Form „Quader“ (vgl. Kapitel 8.4.5). Ein Handwerksmeister, der im Sinne der begrifflichen Festlegungen zur konsensuellen Validierung als „Laie“ teilgenommen hat, befürwortete die Aufnahme der Antwortalternative „Vierkant“. Die Begründung seinerseits war die gängige Nutzung dieser Bezeichnung als „Fachbegriff“ in vielen handwerklichen Berufssparten. Die Diskussion mit ihm und anderen Urteilern führte aber letztlich zu dem Konsens, die Antwort „Vierkant“ *nicht* mit aufzunehmen, weil diese Bezeichnung nicht in allen Berufssparten bekannt ist und es sich außerdem beim Mathe-Meister-Test um eine Überprüfung mathematischer Kompetenzen handelt – dementsprechend sollten bei Begriffen auch mathematisch definierte abgefragt werden.

Einen weiteren Anlass zur Diskussion gab die Aufgabenstellung F_A b):

Nennen Sie die Gleichung des Satzes von Pythagoras für folgendes rechtwinkliges Dreieck mit den angegebenen Seitenbezeichnungen.



Bei der Konsensbildung ging es hierbei nicht um die Frage, ob bestimmte Antwortalternativen mit aufgenommen werden, sondern wie diese ausgewertet werden sollten – als falsch oder richtig. Die „klassische“ korrekte Gleichungsnotation auf die gestellte Frage lautet: $x^2 = z^2 + y^2$. Viele Probanden notierten aber ebenso Umformungen dieser Gleichung: $x = \sqrt{z^2 + y^2}$ und $\sqrt{x^2} = \sqrt{z^2 + y^2}$. Diskussionspunkt war nun, ob auch diese mathematisch korrekten Umformungen einer als auf die Fragestellung richtig zu bezeichnenden Antwort entsprechen. Das Argument für eine Bewertung als „falsch“ war die nicht „klassische Form“. Diese Umformungen würden nicht als *die* Gleichung des Pythagoras nach dem Schema „$a^2 = b^2 + c^2$“ gelten. Mit der Begründung aber, dass es sich um mathematisch korrekte Gleichungen zur Fragestellung handelt und sich daher kein mathematisches Defizit ableiten lässt, werden diese Antworten zukünftig als „richtig“ bewertet (vgl. Tabelle 54).

Antw-Nr.	**Antwortalternative**	**Antw-Wert**	**Antw-Muster**
F_A b) 1	$z^2 + y^2 = x^2$	r	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung
F_A b) 2	$x^2 = z^2 + y^2$	r	Korrekt – klassische Formulierung der Gleichung
F_A b) 3	$x = \sqrt{z^2 + y^2}$	r	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung
F_A b) 4	$\sqrt{x^2} = \sqrt{z^2 + y^2}$	r	Korrekt – nicht klassische Formulierung der Gleichung

Tabelle 63: Korrekte Antwortalternativen und -muster zur Aufgabe F_A b) (Geometrie, Berechnungsvorschriften, Satz des Pythagoras).

Im Sinne der konsensuellen Validierung der hier durchgeführten qualitativen Datenauswertung zur Mustergenerierung erfüllt diese alle Anforderungen des im Rahmen der Anlage dieser Arbeit gestellten Validitätsansprüche.

8.5.2 Eval_2: Offene Antwortformate im Vergleich zu gebundenem Antwortformat

Nach Abschluss der Generierung und Auswahl der Antwortmuster wurde eine weitere Evaluation durchgeführt. Diese ist so konzipiert, dass sie u. a. Daten zur Beantwortung der Fragen Eval_2 und Eval_3 liefert. Durch ihre Konzeption werden sowohl qualitative als auch quantitative Daten erhoben und Auswertungen ermöglicht. Die Evaluation zu weiteren Fragestellungen aus dieser Erhebung wird nach Abschluss dieser Arbeit noch fortgesetzt, da sich aus den hier vorgestellten Evaluationsergebnissen teilweise weitere Fragestellungen ergeben. Die nachfolgenden Darstellungen beschränken sich auf die Evaluationen im Sinne der Anlage dieser Arbeit.

Die Datenerhebung zu dieser Evaluation erfolgte im August 2010 in zehn Berufsschulklassen des dritten Lehrjahres – also kurz vor Abschluss ihrer Ausbildung. Damit entsprechen die Probanden der Zielgruppe: potentiellen Interessenten an Meisterlehrgängen. Insgesamt nahmen 155 Personen aus den Berufssparten Metallbauer, Konstruktionsmechaniker, Industriemechaniker, Kfz-Mechatroniker und Feinwerkmechaniker an der Evaluationserhebung teil.

Erhebungsdesign der Evaluation

In den Klassen wurde der Mathe-Meister-Test im angestrebten Zieldesign Multiple-Choice analog auf Folien simuliert. Die Probanden wurden vorab über den Ablauf, Ziele und Funktion der Erhebung informiert. Jede Aufgabe wurde eingeblendet und die Probanden sollten diese Aufgabe (im Kopf oder handschriftlich) in einem vorgegebenen Zeitfenster bearbeiten. Nach Ablauf der Zeit waren die Probanden aufgefordert, in der nun aufgezeigten Auswahlliste ihre Lösung mit den Antwortalternativen abzugleichen, auch hierfür gab es eine zeitliche Beschränkung. Das Ergebnis des Abgleichs hielten sie in einer Tabelle durch Ankreuzen der jeweiligen Antwort-ID fest. Der Ablauf wurde so analog zum geplanten Testablauf vorgenommen, bei dem ebenfalls jedes Item für eine bestimmte Zeit angezeigt wird, und erst nach Ablauf dieser Zeitspanne werden die Antwortalternativen angeboten. Das nachfolgende Schema verdeutlicht den Ablauf der Testdurchführung an einem Beispiel:

1. Item wird angezeigt (vgl. Abbildung 37), Probanden bearbeiten Aufgabenstellung und machen sich ggf. Notizen auf einem anschließend ebenfalls mit in die Datenerhebung integriertem, leeren Blatt Papier. (Beschränktes Zeitfenster)

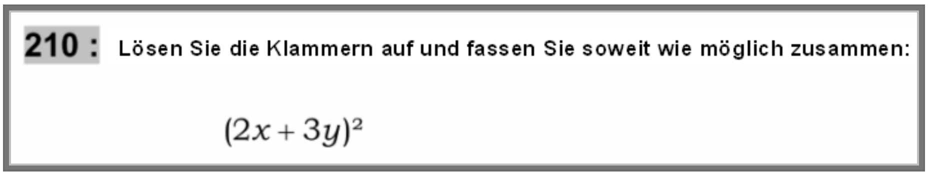


Abbildung 37: Evaluationsfolie zum Item 210, Anzeige der Aufgabe, Ausblendung der Antwortalternativen.

2. Antwortalternativen werden eingeblendet (vgl. Abbildung 38). Probanden vergleichen die Multiple-Choice-Auswahl mit ihrer eigenen Lösung. (Beschränktes Zeitfenster)

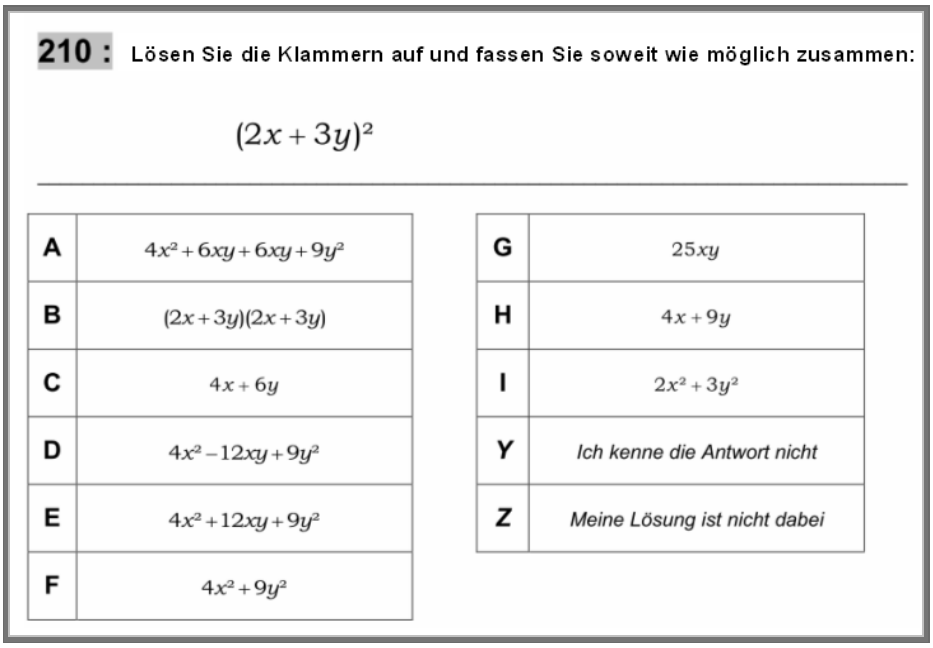


Abbildung 38: Evaluationsfolie zum Item 210, Anzeige der Aufgabe, Einblendung der Antwortalternativen.

3. Probanden kreuzen auf Antwortbogen die jeweilige Antwort zum abgefragten Item 210 an (vgl. Abbildung 39).

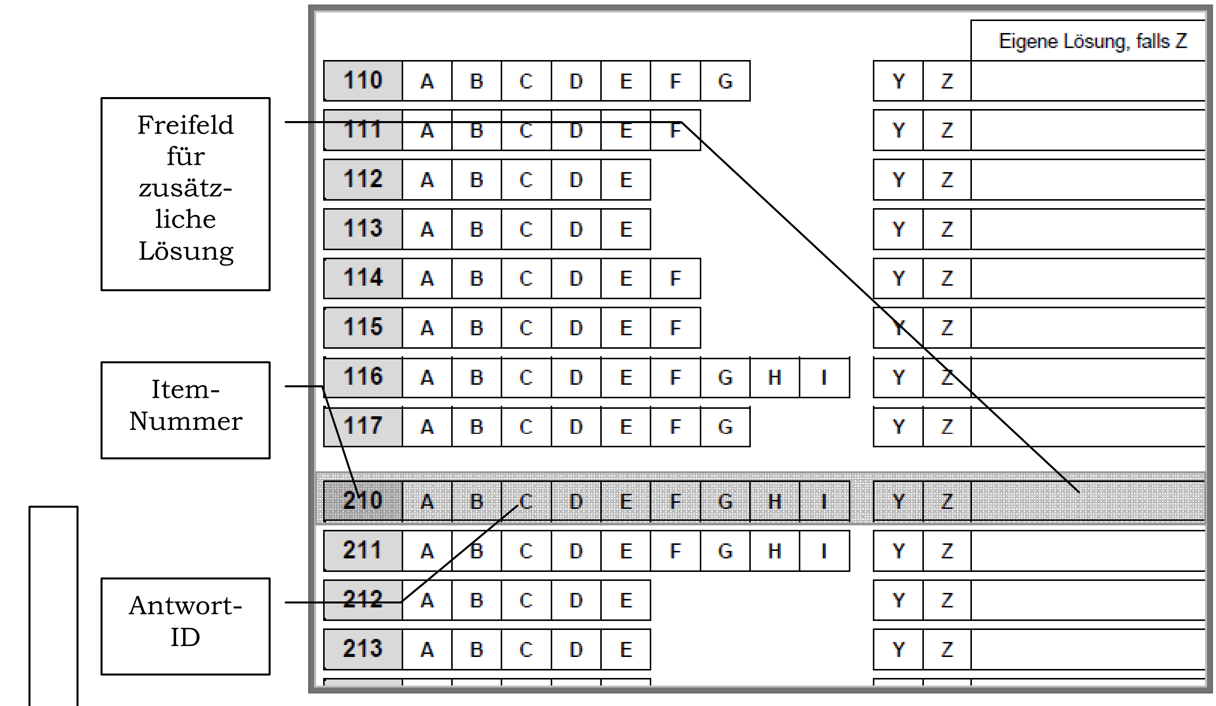


Abbildung 39: Ausschnitt aus dem Evaluationsfragebogen zum Ankreuzen der Multiple-Choice-Antworten für die nummerierten Items. Grau unterlegt: Itemliste für Item 210.

4. Einblendung der Folie und Bearbeitung des nächsten Testitems 211. Damit beginnt das Schema von neuem.

Für die Überprüfung der Fragestellung Eval_2 „Wie verhalten sich die Daten der Ausgangstests (Papiertests) zu den Daten des modifizierten Multiple-Choice-Verfahrens des Online-Tests mit den im Rahmen dieser Arbeit generierten Antwortmustern?“ ist in der Anlage dieser Arbeit unter statistischen Gesichtspunkten eine Beschränkung auf eine Betrachtung der Lösungs- bzw. Fehlerquoten vorgesehen. Im Sinne der Anlage dieser Arbeit werden nachfolgend die Lösungsquoten zu einigen Items exemplarisch gegenübergestellt und anhand dessen aufgezeigt, *ob* und *in welchem Maße* Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Stichproben bestehen.

Prüfverfahren und Rahmenbedingungen

Zur Herstellung einer Vergleichbarkeit werden aus den Papiertests ausschließlich die Ergebnisse zu den Indikatoraufgaben herangezogen, da nur diese im Multiple-Choice-Test *und* im Papiertest eingesetzt wurden. Die Daten der Evaluation habe ich für die Ermittlung der korrekten Lösungsquoten insofern nachbearbeitet, als dass ich die von den Probanden zusätzlich eingetragenen Antwortalternativen einzeln ausgewertet und ggf. die Eingabe in einer neuen Datenbank korrigiert habe, denn die Angabe einer zusätzlichen Lösung wurde generell als falsch gewertet. Bei Betrachtung der einzelnen Probandeneinträge fiel aber auf, dass dabei durchaus einige korrekte Lösungen enthalten waren oder in den Antwortalternativen enthaltene Lösungen als zusätzlich aufgeführt wurden. Dadurch wurden die Quoten, wenn auch minimal, verfälscht.

Zum Vergleich der Lösungsquoten – also einer Überprüfung der Häufigkeitsverteilungen – wird der Chi-Quadrat-Test eingesetzt. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an verschiedenen Veröffentlichungen zum Einsatz und der Anwendung des Chi-Quadrat-Tests [vgl. Bortz 2005; Bortz, Döring 2006; Lienert, Raatz 1998; Siegel 1978; Spiegel, Stephens 1999].

- Nullhypothese H_0[61]: Es gibt keine Unterschiede zwischen den Lösungsquoten.
- Alternativhypothese H_1: Es gibt Unterschiede zwischen den Lösungsquoten der Evaluationsgruppe (Multiple-Choice-Test) und der Probandengruppe der Ausgangsuntersuchung (Papiertest).
- Das Signifikanzniveau wurde vorab für die gesamte Untersuchung mit $\alpha = 0{,}05$ festgelegt.
- Vier Stichproben (Evaluationsgruppe vs. Gruppen der Tests A, B oder C)
- Stichprobenumfang:
    - Evaluationsgruppe: n = 155

[61] An dieser Stelle wird eine erste Stufe dieses Evaluationsverfahrens mittels ungerichteter Hypothesen und dementsprechend einem zweiseitigen Hypothesentest exemplarisch für die hier angewendeten Evaluationen erörtert. Die aus dieser ersten Stufe der Evaluation resultierenden und weiterführenden gerichteten Hypothesen werden an anderer Stelle veröffentlicht.

  - Testgruppe A: n = 163
  - Testgruppe B: n = 135
  - Testgruppe C: n = 154
- 45 Testitems
- dichotome Auswertung der Itemausprägungen nach falsch und richtig

Es wird vermutet, dass die Nullhypothese abgelehnt werden muss, da sich die Stichprobenzusammensetzungen der Ausgangserhebung und der Evaluation in einem Aspekt unterscheiden, der für ein besseres Abschneiden der Evaluationsgruppe sorgen könnte: die Probanden der Evaluationsgruppe befinden sich alle seit drei Jahren in ihrer Ausbildung und haben sich aufgrund dessen zwangsläufig in den letzten Jahren aktiv auch mit mathematischen Aspekten auseinandersetzen müssen. Die Probanden der Ausgangserhebung hingegen – bezogen auf die Meisterschüler – befanden sich zu Beginn ihres Meisterlehrganges. Der Abschluss ihrer Ausbildungen lag bei einigen nur wenige Monate, bei anderen viele Jahre zurück.

Das Vorgehen sei an einem konkreten Beispiel demonstriert

1. Die beobachteten Häufigkeiten zweier Stichproben werden je Item in eine Kreuztabelle übertragen.

   Beispiel: (Item 110) Aufgabenstellung: „Berechnen Sie folgende Aufgabe $6 \cdot 4{,}312\text{m}$“.

	Test Eval	**Test A**	**Summe**
korrekte Lösung	83	118	*201*
falsche Lösung	72	45	*117*
Summe	*155*	*163*	*318*

Tabelle 64: Beobachtete Häufigkeiten der Stichproben „Eval“ und „Test A“ zu Item 110.

2. Anschließend werden die erwarteten Häufigkeiten bestimmt. Dazu wird die Summe der korrekten Lösungen durch die Summe aller Probanden dividiert und mit dem jeweiligen Stichprobenumfang multipliziert. Im konkreten Fall also bspw. für „Test Eval“, korrekte Lösung:

$$\frac{83+118}{155+163}\cdot 155=97{,}97$$

Formal bedeutet das für die entsprechenden Tabellenzellen der Vierfeldertafel (vgl. Tabelle 65):

$$x_{erwEval}=\frac{x_{Eval}+x_A}{n_{Eval}+n_A}\cdot n_{Eval} \qquad x_{erwA}=\frac{x_{Eval}+x_A}{n_{Eval}+n_A}\cdot n_A$$

$$y_{erwEval}=\frac{y_{Eval}+y_A}{n_{Eval}+n_A}\cdot n_{Eval} \qquad y_{erwA}=\frac{y_{Eval}+y_A}{n_{Eval}+n_A}\cdot n_A$$

Variablenzuordnung

n_{Eval}: Stichprobenumfang der Evaluationsgruppe
n_A: Stichprobenumfang der Testgruppe A
x_{Eval}: Beobachtete Häufigkeit korrekter Lösungen der Evaluationsgruppe
x_A: Beobachtete Häufigkeit korrekter Lösungen der Testgruppe A
y_{Eval}: Beobachtete Häufigkeit falscher Lösungen der Evaluationsgruppe
y_A: Beobachtete Häufigkeit falscher Lösungen der Testgruppe A
$x_{erwEval}$: Erwartete Häufigkeit korrekter Lösungen der Evaluationsgruppe
x_{erwA}: Erwartete Häufigkeit korrekter Lösungen der Testgruppe A
$y_{erwEval}$: Erwartete Häufigkeit falscher Lösungen der Evaluationsgruppe
y_{erwA}: Erwartete Häufigkeit falscher Lösungen der Testgruppe A
χ^2: Chi-Quadrat-Wert

	Test Eval	**Test A**
korrekte Lösung	$x_{erwEval}$	x_{erwA}
falsche Lösung	$y_{erwEval}$	y_{erwA}
Summe	n_{Eval}	n_A

Tabelle 65: Zuordnungen in der Vierfeldertafel zur Berechnung der erwarteten Häufigkeiten.

	Test Eval	**Test A**	**Summe**
korrekte Lösung	98	103	*201*
falsche Lösung	57	60	*117*
Summe	*155*	*163*	*318*

Tabelle 66: Erwartete Häufigkeiten der Stichproben „Eval“ und „Test A“ zu Item 110.

3. Dann wird für jedes der vier Felder die Differenz aus beobachteten und erwarteten Häufigkeiten gebildet, quadriert und durch die erwartete Häufigkeit dividiert. Der Chi-Quadrat-Wert wird dann durch die Summe der entsprechenden Werte für alle vier Zellen gebildet. Für das Beispiel ergibt sich ein Chi-Quadrat von 12,132. Bei dem festgelegten Signifikanzniveau von 0.05 ist der Unterschied zwischen Lösungsquoten der beiden Stichproben zu Item 110 signifikant, im konkreten Fall aufgrund des sehr hohen Chi-Quadrat-Wertes sogar „sehr signifikant" oder auch „hoch signifikant" [vgl. Bortz, Döring 2006, S 25f; Lienert 1973, S.57f].

   Formal bedeutet das:

$$X^2 = \frac{(x_{Eval} - x_{erwEval})^2}{x_{erwEval}} + \frac{(x_A - x_{erwA})^2}{x_{erwA}} + \frac{(y_{Eval} - y_{erwEval})^2}{y_{erwEval}} + \frac{(y_A - y_{erwA})^2}{y_{erwA}}$$

Zweiseitige Signifikanz:	<0.001
Chi-Quadrat-Wert:	12,132
Freiheitsgrade:	1
Ergebnis:	hoch signifikant

Tabelle 67: Ergebnisse des Chi-Quadrat-Tests für Item 110 (Stichproben „Eval" und „Test A").

Der Chi-Quadrat-Test wird so für jedes einzelne Item angewendet. Nachfolgenden Tabelle 68 zeigt, für wie viele Items ein signifikanter Unterschied zwischen den Lösungsquoten der Stichprobe(n) der Ausgangserhebung und der Evaluation besteht. Bei der Mehrzahl der Items (24 von 45) ist die Differenz hoch signifikant.

Unterschied der Lösungsquoten ist	**Anzahl der Items**
nicht signifikant	17
signifikant	4
hoch signifikant	24

Tabelle 68: Ergebnis der Evaluation, Unterschiede zwischen Stichproben zusammengefasst nach Grad der Signifikanz.

Nicht signifikante Unterschiede liegen bei folgenden Items vor:

Item-Nr.	Anforderungsprofil bzw. Aufgabenaspekte	Anteil korrekter Distraktoren	Lösungs-quoten-differenz[62]
111 112 113	Grundrechenarten (zwei Operanden) und Rechengesetze	1/6 1/5 1/5	0,51 5,53 3,50
116 117	Umrechnen von Einheiten	1/9 1/7	2,12 8,98
210 211 214	Termumformungen: Binomische Formeln, Zusammenfassen gleicher Variablen	1+2/9 1+1/9 (zwei bzw. ein weiterer Distraktor(en) mathematisch korrekt, aber Term nicht vollständig gemäß Aufgabenstellung bis zum Ende zusammengefasst.) 1/5	2,87 4,74 5,67
217	Quadratische Gleichung in Normalform	1/7	1,23
218	Lineare Gleichung mit einer Variablen	1/7	0,91
220	Formelumwandlung	1/7	6,02
314	Gleichung Satz des Pythagoras mit „klassischer“ Bezeichnung x, y, z	4/9	10,07
317	Volumenberechnung Würfel	1/6	6,88
412	Subtraktion gleichnamiger Brüche	1/6	0,79
513	Verhältnisrechnung	1/6	0,38
516	Dreisatz	1/3	4,64
517	Prozentrechnung	1/3	8,47

Tabelle 69: Ergebnisse des Lösungsquotenvergleichs (Ausgangserhebung – Evaluation), nicht signifikante Unterschiede, Kurzbeschreibung der Items, Anteil korrekter Distraktoren, Lösungsquotendifferenz.

[62] Angabe der Lösungsquotendifferenz in Prozentpunkten.

Meines Erachtens fördert eine Erörterung dieser Ergebnisse durch eine direkte Gegenüberstellung der Lösungsquoten die Verdeutlichung der Ergebnisse mehr als eine Abbildung der jeweiligen Ergebnisse des Signifikanztests. Aus diesem Grund wird zusätzlich zum Chi-Quadrat-Test zur besseren Veranschaulichung der Ergebnisse einen minimalen Trennwert ermittelt. D. h., ich berechne, wie groß die prozentuale Differenz zwischen den Lösungsquoten zu einem Item sein muss, um von einem signifikanten Unterschied zu sprechen. Diese Berechnung erfolgt dementsprechend auf Basis der minimalen Stichproben, also der Evaluationsgruppe mit n = 155 und der Testgruppe B mit n = 135 auch mittels des Chi-Quadrat-Tests durchgeführt. So ist eine Übertragung der Ergebnisse auf die größeren Stichproben möglich. Die Ergebnisse dieser Trennwertermittlung sind:

Unterschied der Lösungsquoten ist	**Minimale Differenz der Lösungsquoten**
signifikant	>= 11 Prozentpunkte
hoch signifikant	>= 15 Prozentpunkte

Tabelle 70: Ergebnisse der Trennwertberechnung für minimale Differenzen zwischen Lösungsquoten auf Basis der minimalen Stichproben mit $n_1 = 135$ und $n_2 = 155$.

Die Lösungsquoten zur Aufgabenstellung K_A f) „Berechnen Sie: $\frac{9}{10} : \frac{3}{5} = \_\_$“ (Item 414) differieren um 34,5 Prozentpunkte, sind also hoch signifikant. Wohingegen die Lösungsquoten zur Aufgabe K_A c) „Berechnen Sie: $\frac{6}{7} - \frac{2}{5} = \_\_$“ (Item 412) nahezu identisch bei rund 47 % in beiden Erhebungen liegen und damit nicht signifikant sind.

Item-Term	Lösungsquote Ausgangserhebung n = 163	Lösungsquote Evaluation n = 155	Differenz der Lösungsquoten in Prozent-punkten	Anteil korrekter Antwortalternativen
$\frac{4}{7}+2$	60,7%	83,9 %	23,2	3/9
$2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$	41,1%	53,6 %	12,5	2/6
$\frac{6}{7}-\frac{2}{5}$	47,2%	46,5 %	0,7	1/6
$\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}$	46,0%	72,3 %	26,3	4/9
$\frac{9}{10}:\frac{3}{5}$	42,3%	76,8 %	34,5	5/9
$\frac{3}{11}:2$	31,3%	54,2 %	22,9	3/8

Tabelle 71: Lösungsquotendifferenzen im Bereich der Items zur Bruchrechnung (Vergleich Ausgangserhebung, Evaluation).

Die Analyse dieses Itemblocks zur Bruchrechnung verdeutlicht durch eine Gegenüberstellung der Anteile korrekter Lösungen bei den Antwortalternativen, dass die Lösungsquotendifferenzen mit dem Anteil der korrekten Antwortalternativen zusammenhängen könnten. Die Unterschiede fallen signifikant oder hoch signifikant aus, je höher der Anteil korrekter Antwortalternativen ist. Diese Hypothese wird auch durch die Ergebnisse zu anderen Items bekräftigt. Es gibt nur eins von 17 Items, bei dem die Lösungsquoten der Evaluationsgruppe signifikant niedriger ausfallen, obwohl es mehr als eine korrekte Antwortalternative gibt. Dies trifft auf Item 219 mit zwei von neun korrekten Antwortalternativen zu (vgl. Abbildung 40; korrekte Lösungen: B und G). Hier differieren die Lösungsquoten hoch signifikant um 17,68 Prozentpunkte.

219 : **Stellen Sie die folgende Gleichung nach d_1 um:**

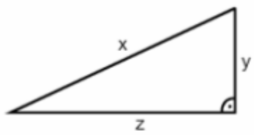
$$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

A	$d_1 = 2d_m - d_2$		**F**	$d_1 = \frac{d_m \cdot 2}{d_2}$
B	$d_1 = \frac{d_2 - d_m}{2}$		**G**	$d_1 = \frac{d_2}{d_m \cdot 2}$
C	$2d_m + d_2 = d_1$		**Y**	*Ich kenne die Antwort nicht*
D	$2d_m - d_2 = d_1$		**Z**	*Meine Lösung ist nicht dabei*
E	$d_1 = d_m \cdot d_2 \cdot 2$			

Abbildung 40: Darstellung des Items 219 mit Auflistung der Antwortalternativen.

Ein weiteres Item, was bezüglich des hohen Anteils korrekter Distraktoren auffällig ist, ist Item 314 (vgl. Tabelle 69). Hier liegt allerdings *kein* signifikanter Unterschied zwischen den Lösungsquoten vor (zweiseitige Signifikanz: 0,064, Chi-Quadrat-Wert: 3,443). Doch beinhalten die insgesamt neun Distraktoren vier korrekte Antworten (vgl. Abbildung 41, korrekte Antworten: B, D, F, H). Die Lösungsquoten der Evaluationsgruppe fallen bei diesem Item jedoch um rund zehn Prozentpunkte höher aus, als die der Ausgangsuntersuchung, was die Hypothese, dass ein höherer Anteil korrekter Distraktoren eine Ursache für ein besseres Abschneiden der Probanden sein könnte, stützt.

314 : Nennen Sie die Gleichung des Satzes von Pythagoras für folgendes rechtwinkliges Dreieck mit den angegebenen Seitenbezeichnungen:



A	$x \cdot y \cdot z$	**G**	$z + y = x^2$
B	$\sqrt{x^2} = \sqrt{z^2 + y^2}$	**H**	$z^2 + y^2 = x^2$
C	$\frac{y}{z} \cdot 2$	**I**	$x = \frac{z^2 + y^2}{2}$
D	$x = \sqrt{z^2 + y^2}$	**Y**	*Ich kenne die Antwort nicht*
E	$z^2 \cdot y^2 = x^2$	**Z**	*Meine Lösung ist nicht dabei*
F	$x^2 = z^2 + y^2$		

Abbildung 41: Item 314: Aufgabenstellung mit Auflistung der Distraktoren.

Ebenso gibt es aber auch 13 Items mit nur einem korrekten Distraktor, bei denen die Lösungsquotendifferenzen signifikant in den meisten Fällen sogar hoch signifikant sind[63]. Dieses Faktum wiederum wirft die Hypothese auf, dass es weitere Gründe für die hinsichtlich der Lösungsquoten besser abschneidende Probandengruppe aus der Evaluation auf.

Insgesamt liegt die durchschnittliche Lösungsquote des gesamten Multiple-Choice-Tests um knapp zehn Prozentpunkte höher als die Lösungsquote der Indikatoraufgaben bei der Papiertesterhebung. Wie die Auswertung des Chi-Quadrat-Tests zeigt, ist diese Gesamtdifferenz nicht signifikant (vgl. Tabelle 72, siehe Folgeseite):

[63] Dies trifft zu auf die Items mit den Nummern: 110, 114, 115, 212, 213, 310, 510, 511, 512, 514, 515, 518, 519.

Zweiseitige Signifikanz:	0,062
Chi-Quadrat-Wert:	3,482
Freiheitsgrade:	1
Ergebnis:	nicht signifikant

Tabelle 72: Ergebnisse des Chi-Quadrat-Tests für alle Items (Stichproben „Eval", „Test A", „Test B", „Test C").

Für die Unterschiede zwischen den Lösungsquoten gibt es meines Erachtens vier mögliche Gründe (Hypothesen):

1. Motivationsfaktor: Bei der Evaluationserhebung wurden die Probanden durchgehend angehalten, alle Aufgaben zu bearbeiten. In der Ausgangserhebung war dies nicht der Fall.

2. Abschreiben beim Nachbarn: Durch dieselben Aufgabenstellungen an alle Probanden wird in der Evaluationserhebung eine höhere Wahrscheinlichkeit zugrunde gelegt, dass die Probanden vom Nachbarn abschauen. Die Wahrscheinlichkeit des Abschreibens wurde in der Ausgangserhebung durch drei verschiedene Testvarianten deutlich verringert. Die Probanden wurden außerdem ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Tests der Nachbarn andere Aufgabenstellungen oder Zahlen enthalten.

3. Die Probandenstichprobe bildet die Zielgruppe nicht repräsentativ ab. Alle Teilnehmer der Evaluation sind am Ende ihrer Berufsausbildung und setzen sich dadurch seit mindestens zweieinhalb Jahren aktiv mit Mathematik bzw. mathematischen Aspekten auseinander.

4. Zu hoher Anteil korrekter Distraktoren: Bei einigen Items wurden mehrere korrekte Ergebnisse als Distraktoren aufgeführt. Sollten Probanden im Rahmen der Bearbeitungszeit nicht zu einer Lösung der Aufgabe gelangt sein, könnten sie geraten haben. Die Wahrscheinlichkeit, beim Raten oder bei einer willkürlichen Wahl der Lösung eine richtige Antwort auszuwählen, ist höher je mehr korrekte Distraktoren aufgeführt sind.

Trotz des einen „Ausreißers" (Item 219) vermute ich, dass der Anteil korrekter Antwortalternativen Auswirkungen auf die Testergebnisse hat. Aufgrund dessen sind weitere Untersuchungen hierzu geplant, die nicht mehr Teil dieser Arbeit sind. In den nachfolgenden Ausführungen zur dritten Evaluationsfrage werde ich auf diese Hypothese allerdings nochmals detaillierter aus qualitativer Sicht eingehen und mögliche Untersuchungsaspekte und -konzepte für weitere Evaluationen diesbezüglich aufzeigen. Die vorliegenden Evaluationsdaten bedienen diesbezüglich nur die Hypothesenbildung.

8.5.3 Eval_3: Repräsentative Auswahl typischer Antworten

Die ausgewählten Antwortalternativen je Testitem wurden zusätzlich im Detail überprüft. Hierzu hatte ich bei der Evaluation zwei zusätzliche Antwortangaben vorgesehen. Erstens konnte die Antwortoption „Meine Lösung ist nicht dabei“ angekreuzt werden. Zweitens waren die Probanden in diesem Fall aufgefordert, die von ihnen ermittelte Lösung in einem dafür vorgesehenen Freifeld zu notieren.

Nachfolgend werden drei Teilfragen dieses Evaluationsaspektes Eval_3 diskutiert:

- **Eval_3_1**: Werden bei jedem Item alle vorgegebenen Antwortalternativen mindestens einmal ausgewählt?
- **Eval_3_2**: Wie oft (und bei welchen Items) wird angegeben, dass die eigene Antwort nicht dabei ist?
- **Eval_3_3**: Sind bei Angabe weiterer Antwortalternativen typische Muster zu erkennen?

Zu Eval_3_1: Auswahlhäufigkeiten der Itemausprägungen

Nicht bei allen Items werden auch alle Antwortalternativen mindestens einmal gewählt. Allerdings fallen hierbei ausschließlich solche Antwortalternativen heraus, die auch in den Ausgangsuntersuchungen[64] nur wenige Male – in der Regel ein- bis zweimal – auftraten. Aufgrund der im Vergleich signifikant höheren Lösungsquoten bei der Evaluation, vor allem bei Items mit mehreren korrekten Antwortalternativen, habe ich diese noch genauer analysiert.

Bei allen Items mit mehr als einer korrekten Antwortalternative wurden stets alle korrekten Antwortalternativen mindestens von zwei Probanden ausgewählt. Damit wird die Hypothese, dass es sich dabei um typische Antwortmuster handelt, bestärkt. Es steht weiterhin zur Diskussion, ob die Anzahl korrekter Antwortalternativen bei solchen Items reduziert und die Gesamtanzahl von maximal neun Alternativen beibehalten wird, oder ob die korrekten Antwortalternativen beibehalten werden, aber die Anzahl fehlerhafter, und somit die Gesamtzahl der Antwortalternativen erhöht wird. Dadurch würden in allen betroffenen Items mehr als neun Antwortalternativen entstehen. Aufgrund der Ergebnisse der Ausgangsuntersuchungen, wie auch dieser Evaluation, befürworte ich die zweite Lösung mit einer Erhöhung der Gesamtanzahl der Antwortalternativen. Dies sei an den Ergebnissen zu einigen Items verdeutlicht.

Bei der Aufgabenstellung zum Lösen einer linearen Gleichung: „Lösen Sie folgende Gleichung: 3a + 5 = 26“ waren 3 von 9 Antwortalternativen korrekt. Hiervon wurden alle drei Antwortalternativen von mindestens 20 Probanden (bei n = 155) ausgewählt (vgl. Tabelle 73, grau unterlegte Zeilen). Daher wird die Hypothese, dass es sich hierbei um typische Lösungsmuster handelt, als bestätigt betrachtet. Trotz der in der Evaluation signifikant höheren Lösungsquoten bei diesem Item sollten alle korrekten Antwortalternativen beibehalten werden (Lösungsquote in Ausgangserhebung, Meisterschüler, n = 163: 61,35 %, Lösungsquote in Evaluation, Berufsschüler (potentielle Meisterschüler), n = 155: 79,35%).

64 Mit Ausgangsuntersuchung/-erhebung sind die Erhebungen auf Basis der Papiertests mit offenem Antwortformat (vgl. Kapitel 7.2) gemeint.

Antw-Alternative	Antw-Wert	Anzahl Auftreten Evaluation n = 155
$3a = 21$	f	14
$3 \cdot 7 + 5 = 26$	r	20
$a = 3$	f	1
$7 = a$	r	21
$a = 24$	f	0
$a = 8{,}66$	f	0
$a = 7$	r	82
$a = 12$	f	2
$a = 3{,}25$	f	1

Tabelle 73: Auftreten einzelner Antwortalternativen zu einer linearen Gleichung, Ergebnisse der Evaluation.

Die Ergebnisse zu diesem Item stehen stellvertretend für alle anderen Items mit mehreren korrekten Antwortalternativen. Nur bei zwei Items trat jeweils eine korrekte Antwortalternative zweimal auf und damit im Verhältnis zu den anderen korrekten Lösungen anteilig sehr gering. So z. B. bei der Bruchrechenaufgabe:

„Berechnen Sie folgende Aufgabe: $\frac{4}{7}+2=$“ (3 von 9 Antwortalternativen korrekt).

Antw-Alternative	Antw-Wert	Anzahl Auftreten Evaluation n = 155
$\frac{36}{14}$	r	2
$\frac{18}{7}$	r	25
$2\frac{4}{7}$	r	104

Tabelle 74: Auftreten korrekter Antwortalternativen bei einer Bruchrechenaufgabe, Ergebnisse der Evaluation.

Bei dieser Aufgabe zur Bruchrechnung könnte die Antwortalternative e (vgl. Abbildung 40) aufgrund ihres geringen Auftretens entfernt werden. Es werden im Anschluss an diese Arbeit weitere Untersuchungen zu der Fragestellung folgen, *ob* oder *wie* der Anteil korrekter Antwortalternativen reduziert wird. Dazu soll untersucht werden, *in welchem Ausmaß* die erhöhte Anzahl korrekter Antworten zu einem Item die Lösungsquote beeinflusst. Hierzu plane ich, die betreffenden Items nochmals in unterschiedlichem Format gegenüber zu stellen: mit offenem Antwortformat und mit gebundenem. Das gebundene Format soll dabei in unterschiedlichen Ausprägungen dargestellt werden:

- mit dem Umfang und den identischen Antwortalternativen aus dieser Arbeit,
- mit identischen Antwortalternativen, aber einem deutlich höheren Anteil fehlerhafter Antworten und
- mit gleicher Anzahl der Antwortalternativen wie in dieser Arbeit, aber einer Reduktion der korrekten Antwortalternativen.

Dabei und bspw. durch ergänzende Interviews soll außerdem untersucht werden, *wodurch* dieses Phänomen der höheren Lösungsquoten entsteht. So ist eine Vermutung, dass Probanden, die zu keinem Ergebnis gelangen, aus der Auswahl eines raten. Je höher der Anteil korrekter Alternativen, desto höher auch die Wahrscheinlichkeit beim Raten, eine davon auszuwählen. Eine weitere Hypothese ist, dass die Probanden korrekte Antworten als näher liegend erkennen und ihr eigenes Ergebnis aufgrund dessen verwerfen. Eine für diese geplanten Untersuchungen gut geeignete Aufgabe ist auch Aufgabenstellung K_A e):

Berechnen Sie folgende Aufgabe: $\frac{8}{6} \cdot \frac{3}{2} =$.

Bei dieser Aufgabenstellung sind vier von neun Distraktoren korrekt (vgl. Tabelle 75). Die Daten der Ausgangserhebungen wiesen diese vier Muster als typisch sowohl bei Meisterschülern als auch den Vergleichsgruppen mit Schülern anderer Schulformen aus (vgl. Tabelle 48). Die Evaluation im Multiple-Choice-Design zeigt nun sogar noch größere Anteile hinsichtlich des Auftretens bei dreien dieser Muster (vgl. Tabelle 49). Eines der Phänomene tritt allerdings auch hier nur zweimal auf. Hinsichtlich der anstehenden Entscheidung, ob die Anzahl der Alternativen erhöht oder die Anzahl der korrekten

Alternativen durch Streichen einiger Lösungen reduziert wird, könnte diese Aufgabe eine Grundlage für verschiedene Untersuchungsdesigns bieten. Die Auswahl der Antwortalternativen könnte folgendermaßen variiert werden:

- Beibehaltung der jetzigen Auswahl
- Beibehaltung von neun Antwortalternativen, aber Löschen von 1 (2, 3) korrekten Alternativen
- Erweiterung der Anzahl der Alternativen um weitere fehlerhafte Muster

Dabei kann z. B. diesen Fragestellungen nachgegangen werden: Erkennen die Probanden gleichwertige Antworten, wenn es sich bspw. nur um eine gekürzte oder umgewandelte Schreibweise handelt? Bei welchen Lösungsalternativen erkennen sie dieses und bei welchen nicht?

Antwort-Alternative	**Anzahl Auftreten Ausgangserhebung Meisterschüler n = 163**	**Anzahl Auftreten Evaluation Berufsschüler n = 155**
2	49	68
$\frac{24}{12}$	3	11
$\frac{72}{36}$	4	31
$\frac{4}{2}$	2	2

Tabelle 75: Gegenüberstellung der Auftretenshäufigkeiten der korrekter Distraktoren zur Aufgabe K_A e) (Bruchrechnung). Im Vergleich: Hauptschüler, Gymnasiasten, Meisterschüler.

Zu Eval_3_2: Zusätzlich von Probanden notierte Antwortalternativen

Bei eine m Stichprobenumfang von 155 Probanden und insgesamt 45 Items traten im Durchschnitt pro Item rund 0,9 zusätzliche Antworten auf (vgl. Tabelle 76).

Anzahl zusätzliche Antwort pro Item	Häufigkeit
0	23
1	13
2	3
3	2
4	3
5	1
Durchschnitt zusätzliche Antworten pro Item	~0,93

Tabelle 76: Übersicht Häufigkeiten zusätzliche Antwortalternativen (Ergebnisse der Evaluation der Antwortalternativen 3. Quartal 2010).

Nach Auswertung der Erhebungsdaten bzgl. der Anzahl zusätzlicher Antworten steht hinsichtlich der Validität der vorgenommenen Auswahl von Antwortalternativen die Frage nach der Qualität der genannten Antworten im Vordergrund. Denn es ist in erster Linie nicht ausschlaggebend, wie viele zusätzliche Antworten für ein Item angegeben wurden, sondern ob es sich dabei um *typische* Muster handelt. Dieser Frage wird im Sinne der Evaluationsfrage Eval_3_3 nun nachgegangen. Sollte dieser Fall zutreffen und ein weiteres typisches Antwortmuster auftreten, wird die Zusammenstellung der Antwortalternativen für das jeweilige Item vollständig überprüft. Ist die maximale Anzahl von Antwortalternativen noch nicht erreicht, so kann eine zusätzliche Alternative bei Bedarf hinzugefügt werden. Sind allerdings bereits neun Antwortalternativen entwickelt und ausgewählt, werden zum einen die auftretenden Muster hinsichtlich ihres quantitativen Auftretens verglichen – auch unter Einbezug der Daten aus den Papiertests. Ebenso werden sie qualitativ analysiert. Auf Basis der daraus resultierenden Ergebnisse und nach einer zusätzlichen konsensuellen Validierung wird anschließend eine neue Zusammenstellung der Antwortalternativen entwickelt.

Zu Eval_3_3: Generierung weiterer typischer Muster aus zusätzlichen Probandenantworten

Nur bei wenigen der Items lässt die Analyse der zusätzlich notierten Lösungen die Generierung typischer Muster zu. Über die Summe aller Aufgaben werden von insgesamt 42 zusätzlich notierten Itemausprägungen nur neun als typische Muster identifiziert. Je nachdem wie viele Antwortalternativen bei den jeweiligen Items bereits vorhanden sind, muss ggf. entschieden werden, ob alte Alternativen ersetzt werden. Eventuell wird in einigen Fällen eine Erweiterung der Gesamtanzahl der Antwortalternativen in Betracht gezogen. Nachfolgend werden exemplarisch einige zusätzlich identifizierte typische Muster erörtert.

<u>Zusätzliche typische Antworten zum Aufgabenterm $6 \cdot 4{,}312$m</u>

Zusätzliche Phänomene	**Ergebnis der Analyse**
25,896	*Kein typisches Muster*; Auftreten bei Evaluation nur einmal, bei Ausgangserhebung gar nicht
36,496	*Kein typisches Muster*; Auftreten bei Evaluation nur einmal, bei Ausgangserhebung gar nicht
36,422	<u>Typisches Muster</u>; Auftreten in Evaluation und Papiertest je einmal; Fehlermuster: Übertragung der Übertragsziffern in den Multiplikanden, am Beispiel: $\underline{6 \cdot 4_{+2},3_{+1}1_{+1}2} \rightarrow (6 \cdot 6{,}422)$ $36\ ,4\ \ 2\ \ 2$
26,472	*Kein typisches Muster*; Auftreten bei Evaluation nur einmal, bei Ausgangserhebung gar nicht
17,872	<u>Typisches Muster</u>; Auftreten bei Evaluation und Ausgangserhebung je einmal; Fehlermuster: Fehler im kleinen Einmaleins der Vier, am Beispiel: $\underline{6 \cdot 4{,}312}$ $17{,}872$ $\rightarrow \mathit{Fehler}: 6 \cdot 4 = 16$ *korrekte Addition des Übertrags aus Nachkommastelle*

Tabelle 77: Zusätzliche Antwortphänomene zum Aufgabenterm $6 \cdot 4{,}312$m.

Besonders auffällig bei den zusätzlich zu diesem Item notierten Lösungen der Probanden war, dass in allen fünf Fällen nur ein Wert, aber keine Einheit aufgeschrieben wurde. Die analogen Phänomene in den Papiertests allerdings waren alle mit Angabe der korrekten Einheit notiert.

<u>Zusätzliche typische Antworten zum Aufgabenterm (4u-5w)²</u>

Zusätzliche Phänomene	**Ergebnis der Analyse**
$(4u\text{-}5w)(4u\text{-}5w)$	<u>Typisches Muster</u>; Auftreten bei Evaluation einmal, bei Ausgangserhebung zweimal Rechenmuster: Korrekte Auflösung der Quadratur der Klammer, korrekter Ansatz, Lösungsverfahren vorzeitig abgebrochen
uw	<u>Typisches Muster</u>; Auftreten bei Evaluation nur einmal, bei Ausgangserhebung viermal in der Form: „1uw“ Fehlermuster: Subtraktion der Variablenfaktoren innerhalb der Klammer, anschließende Anwendung des Exponenten nur auf die Differenz der Variablenfaktoren, am Beispiel: $(4u-5w)^2 \rightarrow (4-5)^2 uw \rightarrow -1^2 uw \rightarrow 1uw \rightarrow uw$
-9	*Kein typisches Muster*; Auftreten bei Evaluation einmal, bei Ausgangserhebung gar nicht

Tabelle 78: Zusätzliche Antwortphänomene zum Aufgabenterm (4u-5w)².

Zusätzliche typische Antworten zum Aufgabenterm 25· (u+15)=150

Zusätzliche Phänomene	Ergebnis der Analyse
$u = 25$	Typisches Muster; Auftreten bei Evaluation und in Ausgangserhebung jeweils einmal Fehlermuster: Rechenfehler im Einmaleins der 25 und zusätzlich falsche Rechenoperation, am Beispiel: $25\cdot(u+15)=150$ $\vert\; 25\cdot 15 = 350$ *erster Fehler* $25u+350=150 \quad \vert +350$ $\vert +350$ *zweiter Fehler* $25u=500 \quad \vert :25$ $u=25$
$9 = u$	Typisches Muster; Auftreten in Evaluation einmal, ABER Muster prinzipiell schon vorhanden als „u = 9“ Fehlermuster: Missachtung des negativen Vorzeichens im letzten Rechenschritt, am Beispiel: $25\cdot(u+15)=150$ $25u+375=150 \quad \vert -375$ $25u=-225 \quad \vert :25$ $u=9$

Tabelle 79: Zusätzliche Antwortphänomene zum Aufgabenterm 25· (u+15)=150.

Weitere interessante zusätzliche Lösungsangaben

Zum Aufgabenterm 3a + 5 = 26 wurde als zusätzliche Antwort „7“ angegeben. Interessant an diesem Phänomen ist, dass sowohl die Alternative „a = 7“ als auch „7 = a“ in den Antwortalternativen enthalten waren. Dennoch wurde „7“ unter der Rubrik „Meine Lösung ist nicht dabei.“ angegeben. Auch die Typenlisten der Ausgangserhebung zeigen, dass 13 von 32 korrekten Antworten diesem Phänomen entsprechen. Ein analoges Phänomen zeigt sich in Tabelle 79 mit der zusätzlichen Angabe der Lösung „9 = u“, obwohl „u = 9“ in der Auswahl vorhanden ist.

Bereits bei der Analyse der Ausgangserhebung habe ich die Vermutung aufgestellt, dass die unterschiedliche Notation von Lösungen für einige Probanden relevant in dem Sinne sein könnte, als dass sie eine andere Schreibweise nicht als gleichwertig zu ihrer eigenen Lösungsnotation erkennen. Aus diesem Grund wurden insbesondere auch bei korrekten Antworten im Bereich der

Termumstellungen, Formelumstellungen und Gleichungen korrekte Antwortalternativen in unterschiedlicher Schreibweise aufgenommen. Die Ergebnisse der Evaluation zu einem weiteren Item verdeutlichen, dass dieser Aspekt nicht ohne Belang ist. So wurden als zusätzliche Lösungen zum Umstellen einer Formel von mehreren Probanden Gleichungen angegeben, die in anderer Schreibweise bereits in den Antwortalternativen enthalten waren (vgl. Tabelle 80). Diese Phänomene bekräftigen meine Vermutung, dass einige Probanden zwar in der Lage sind, die Aufgaben korrekt zu lösen, aber unterschiedliche Schreibweisen ihrer Lösung nicht zuordnen können.

Vorhandene Antwortalternative	**Zusätzliche Lösung unter „Meine Lösung ist nicht dabei.“**	**Anzahl Auftreten in Evaluation (n = 155)**
$\frac{3V}{A} = h$	$h = \frac{3V}{A}$ Muster im Vergleich zur gegebenen Antwortalternative: Gleichungsseiten umgekehrt (links nach rechts und rechts nach links), Gleichung inhaltlich identisch	2
$\frac{3V}{A} = h$	$3V : A = h$ Muster im Vergleich zur gegebenen Antwortalternative: Gleichung inhaltlich identisch; Doppelpunkt als Divisionsoperator anstatt Bruchstrich	1

Tabelle 80: Inhaltlich gleiche Phänomene, andere Schreibweisen.

Bestätigung des Herauslassens typischer Muster (korrekte, aber unvollständige Lösungsansätze)

In Kapitel 8.4 zur Generierung und Auswahl der Antwortmuster für den Online-Test wurde bereits an einigen Beispielen aufgezeigt, dass als typisch identifizierte Muster aufgrund der Beschränkung der Anzahl der Distraktoren nicht mit aufgenommen werden konnten. Darunter fielen z. B. die korrekten, aber unvollständigen Lösungsansätze „(2x+3y)(2x+3y)“ und „$4x^2+6xy+6xy+9y^2$“ zur

Aufgabenstellung: Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen: $(2x+3y)^2$. (vgl. Kapitel 8.4.2, Tabelle 46) Die Evaluation zeigt nun, dass weder das eine noch das andere als typisch identifizierte Muster von den Probanden als zusätzliche Lösung angegeben wurden.

8.5.4 Fazit und Konsequenzen der Evaluation

Aufgrund der Ergebnisse dieser Evaluation wird die Auswahl der Antwortalternativen nochmals überprüft. Ich betrachte es weiterhin als relevant, die typischen korrekten Antwortmuster (nahezu[65]) vollständig aufzuführen. Hierdurch sollen fehlerhafte Defizitauswertungen vermieden werden, falls die Probanden zwar ein korrektes Ergebnis erlangt, aber eine andere Notationsform genutzt haben und diese nicht in die gegebenen transferieren konnten. Denn dann bestünde kein Defizit im abgefragten mathematischen Bereich, da die Probanden zu einer korrekten Lösung der Aufgabe fähig wären und lediglich Schwierigkeiten beim Vergleich ihrer eigenen Lösung mit den angebotenen Distraktoren hätten. Diese Problematik lässt allerdings nicht zwingend auf ein Defizit hinsichtlich der diagnostischen Zielsetzungen des jeweiligen Anforderungsprofils schließen.

Es wird aufgrund der Evaluationsergebnisse überlegt, ob die Antwortalternativen um weitere, typische fehlerhafte Muster erweitert werden und die Beschränkung auf insgesamt neun (bzw. elf) Distraktoren für diese Items aufgehoben wird. Hierzu sind allerdings weitere, umfangreiche Untersuchungen nötig. Eine Idee dazu ist, zu überprüfen wie viele Distraktoren maximal auftreten können, bevor Probanden die Lust verlieren, alle, konsequent über den gesamten Test, durchzuschauen – oder ab wie vielen Distraktoren der Abgleich mit der eigenen Lösung aufgrund von Konzentrationsschwierigkeiten nicht mehr sinnvoll durchgeführt wird. Ebenso kann die zuvor als weiterer Grund für die Beschränkung der Anzahl der Distraktoren zugrund gelegte Übersichtlichkeit verloren gehen. Diesbezüglich sollten Evaluationen meines

---

[65] In der Bruchrechnung ist eine vollständige Auflistung aller möglichen korrekten Lösungen nicht möglich, da theoretisch eine unendliche Anzahl von Erweiterungen des Ergebnisses möglich ist.

Erachtens direkt am Computermonitor und nicht analog auf Papier oder Folie durchgeführt werden, weil die Belastungen der Augen und die gesamte Ansicht sich hier unterschiedlich darstellen.

Der vermuteten erhöhten Ratewahrscheinlichkeit eines korrekten Ergebnisses bei einem hohen Anteil richtiger Antwortalternativen soll in einer weiteren Untersuchung nachgegangen werden. Dabei soll verglichen werden, inwieweit Probanden, die ein Item sonst nicht gelöst hätten, eine Lösung raten oder willkürlich ankreuzen. Hierbei soll die Trefferwahrscheinlichkeit für die einzelnen Items ermittelt werden.

Weitere detaillierte Auswertungen dieser ersten Evaluationsphase des Testdesigns mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten gebundenen Antwortformat sind zum Zeitpunkt des Abschlusses dieser Arbeit noch im Prozess. Außerdem soll nach Fertigstellung des Online-Tests eine Evaluation zur Konsolidierung der Laborbedingungen erfolgen. Hier soll bspw. der Fragestellung nachgegangen werden, ob oder inwieweit sich Testdurchführungen am Computer in ihren Ergebnissen von handschriftlichen Papiertests unterscheiden. Hierbei kann u. a. auf die Ergebnisse dieser ersten Evaluationsphase mit Folienpräsentation der Testitems zurückgegriffen werden.

9 Zusammenfassung und Perspektiven

Diese Arbeit ist im Rahmen des Projektes Mathe-Meister entstanden, dessen Ziel die Entwicklung eines internetbasierten Mathematik-Self-Assessments für den beruflichen Weiterbildungssektor in Industrie und Handwerk ist. Der Test beinhaltet die mathematischen Grundlagen, die für die jeweiligen Weiterbildungsangebote seitens der Lehrenden und der Rahmenvorgaben vorausgesetzt werden. An solchen Weiterbildungsangeboten interessierte Personen sollen dadurch die Möglichkeit erhalten, ihre eigenen mathematischen Kompetenzen diesbezüglich selbst zu überprüfen und auf Basis ihrer Ergebnisse eine diagnostische Rückmeldung als Grundlage für eventuell nötige Fördermaßnahmen erhalten. Angeboten wird dieser Online-Selbsttest in einem Multiple-Choice-Design.

Meine Aufgabe hinsichtlich dieser Dissertation bestand darin, Distraktoren – also die im Multiple-Choice-Test angebotene Antwortauswahl zu jedem Item – zu entwickeln, die über ein diagnostisches Potential verfügen. Dieses diagnostische Potential soll es ermöglichen, dass das Mathe-Meister-System automatisch fehleranalytische Feedbacks zu den vom Probanden gewählten Distraktoren liefert. Den Kern dieser Dissertation bilden die Entwicklung einer konzeptionellen Idee und die Darstellung der aufgrund dieser Idee durchgeführten Forschungs- und Entwicklungsarbeit zur Realisierung dieser Fehleranalyse in einer internetbasierten Selbsttestumgebung (vgl. insbesondere Kapitel 6 und Kapitel 7).

Zur Ermittlung der Ausgangssituation hinsichtlich bestehender internetbasierte Mathematik-Self-Assessments habe ich deutschsprachige und über das Internet frei zugängliche Mathematik-Self-Assessments analysiert, deren Tests online durchgeführt werden konnten und auch direkt online ausgewertet wurden. Dabei ging es mir vorrangig darum, inwieweit diese Portale fehlerdiagnostische Rückmeldungen an den Nutzer geben (vgl. Kapitel 4). Aus den Analysen der Distraktoren der verschiedenen Online-Tests ließ sich abschließend schlussfolgern, dass diese sich nicht an fehleranalytischen Untersuchungen und Erkenntnissen (vgl. Kapitel 5.3ff) orientieren. Die Rückmeldung zu den erlangten Testergebnissen geben auch nur in wenigen Fällen Auskunft über die mathematischen Themengebiete, in denen Defizite vorliegen, so dass die Probanden auf Basis der Testaufgaben über andere Wege herausfinden müssen, zu welchen Themengebieten die einzelnen Aufgaben zählen. Tests mit offenen Antwortformaten wiesen Auswertungsdefizite in so fern auf, dass korrekte Antworten nicht erkannt wurden, wenn diese nicht exakt der vorgegebenen Eingabeform entsprachen. So führte selbst ein in der Antwort zwischen Wert und Einheit gesetztes Leerzeichen zu einer Auswertung als falsch, weil die Eingabe ohne Leerzeichen vorgesehen war. (vgl. Kapitel 4)

Ich konnte anhand konkreter Beispiele aus den analysierten Online-Self-Assessments (vgl. Kapitel 4) aufzeigen, dass schon eine rationale Aufgabenanalyse unter Einbezug bestehender Erkenntnisse fehleranalytischer Forschung eine Konstruktion typischer Antwortmuster oder zumindest -phänomene ermöglicht hätte. Obwohl dies also möglich ist, lässt sich eine Fehleranalyse in internetbasierten Testumgebungen[66] zur Mathematik zum Zeitpunkt des Projektstarts aber auch bei den Recherchen während des laufenden Projekts nicht finden. Anhand weiterer rationaler Aufgabenanalysen und der anschließenden Evaluationen der daraus resultierenden antizipierten Lösungsschemata kann ich mit dieser Arbeit zeigen, dass diese Methode in der von mir angewendeten Form einer Kombination rationaler und empirischer Aufgabenanalysen (vgl. u. a. Kapitel 7.1 und Kapitel 7.2.2) zur Entwicklung typischer Antwortmuster geeignet ist.

Eine Analyse bestehender Veröffentlichungen zu fehleranalytischen Untersuchungen zeigte, dass die Schwerpunkte in diesem Bereich auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt auf den schriftlichen Rechenverfahren und dem Rechnen mit gemeinen und Dezimalbrüchen liegen (vgl. Kapitel 5). Vereinzelt lassen sich Veröffentlichungen mit dem Augenmerk auf anderen mathematischen Bereichen, wie z. B. der Algebra finden. So fehlte es hinsichtlich der für den Online-Test Mathe-Meister angestrebten mathematischen Inhalte an fehlerkategorisierenden Untersuchungsergebnissen bspw. im Bereich der Geometrie und in vielen Teilbereichen der Algebra. Diese Lücken wurden für die in das Projekt

[66] Im Sinne der Zielsetzung des Projektes Mathe-Meister sind hier solche internetbasierten Tests gemeint, die sowohl online bearbeitet als auch ausgewertet werden.

Mathe-Meister integrierten Bereiche und Aufgabentypen mit dieser Dissertation geschlossen (vgl. Kapitel 8.2 bis Kapitel 8.4).

Die besondere Herausforderung dieser Arbeit bestand darin, berufsspezifische Tests in einem Multiple-Choice-Design für angehende Meisterschüler so zu konstruieren, dass auf Basis der Distraktoren möglichst inhaltsvolle diagnostische Aussagen über die einzelnen Probandenergebnisse automatisch durch das Mathe-Meister-System getätigt werden können. In der mathematikdidaktischen Literatur wird dieser Aspekt bisher nicht behandelt. In dieser Arbeit wird diese Lücke nun sowohl inhaltlich als auch methodisch geschlossen.

Zur Umsetzung der Zielsetzung habe ich insbesondere auf bestehende Erkenntnisse der Testtheorie sowie fehleranalytischer Untersuchungen der Mathematikdidaktik und der Psychologie zurückgegriffen und zusätzlich umfangreiche empirische Untersuchungen durchgeführt. So stellt diese Arbeit ein vollständiges Forschungs- und Entwicklungskonzept vor (vgl. Kapitel 6 und Kapitel 7).

Meiner Untersuchung und Entwicklung habe ich verschiedene leitende Hypothesen zugrunde gelegt:

I. In den verschiedenen mathematischen Themengebieten treten jeweils Fehler auf, die sich in bestimmter Form charakterisieren, clustern und teilweise sogar in algebraischen, ausschließlich computergestützt auswertbaren Ausdrücken als „Fehlermuster" darstellen lassen.

II. Solche Fehlermuster treten in den verschiedenen mathematischen Bereichen wiederholt auf. Aufgrund der Erkenntnisse aus bestehenden mathematikdidaktischen und psychologischen Untersuchungen zur Fehleranalyse können für fehleranalytisch noch unerforschte Themengebiete und konkrete Aufgabenkonstruktionen charakteristische Fehlermuster antizipiert werden.

III. Mit Hilfe solcher Fehlermuster (und antizipierter korrekter Lösungsmuster) können Multiple-Choice-Testverfahren generiert werden, die tiefergehende diagnostische Aussagen ermöglichen.

IV. Multiple-Choice-Formate bergen prinzipiell eine hohe Ratewahrscheinlichkeit hinsichtlich der Antwortauswahl. Diese wird im konkreten Fall zum einen der Einbindung in Self-Assessments gesenkt, weil davon ausgegangen werden kann, dass Personen, die sich auf freiwilliger Basis eigenständig dazu entscheiden, ihre eigenen Kompetenzen zu testen, nicht daran interessiert sind, sich selbst zu täuschen. Zum anderen wird eine Modifizierung des klassischen Multiple-Choice-Test hinsichtlich der Anzeige der Antwortalternativen die Ratewahrscheinlichkeit nochmals mindern. Außerdem führt die Analyse des diagnostischen Potentials bei der Auswahl der Distraktoren dazu, die Ratewahrscheinlichkeit zusätzlich zu reduzieren.

Die von mir durchgeführten rationalen und empirischen Aufgabenanalysen führten zur Erstellung einer Distraktorensammlung für jedes im Online-Test Mathe-Meister integrierte Testitem. Bereits während der Entwicklungsphase wurden Evaluationen durchgeführt und die Ergebnisse stets wieder in den Entwicklungsprozess eingebunden. So lief der gesamte Forschungs- und Entwicklungsprozess „spiralig vernetzt“ ab. Eine abschließende Evaluation zur Überprüfung der generierten und ausgewählten Distraktoren orientierte sich an folgenden Fragestellungen:

Eval_1 Sind die generierten Antwortmuster valide?

Eval_2 Wie verhalten sich die Daten der Ausgangstests (Papiertests) zu den Daten des modifizierten Multiple-Choice-Verfahrens des Online-Tests mit den im Rahmen dieser Arbeit generierten Antwortmustern?

Eval_3 Bildet die Auswahl der Distraktoren für den Online-Test die typischen Antworten vollständig ab?

Die Evaluation (vgl. Kapitel 8.5) zeigte zum einen, dass die generierten Antwortmuster valide sind. Zum anderen bestätigte sich hinsichtlich der Fragestellung Eval_3, dass die ausgewählten Distraktoren die typischen Antworten der Zielgruppe repräsentativ abbilden. Auf Basis der gewonnenen Evaluationsdaten konnten einige wenige weitere typische Muster ermittelt werden (vgl. Kapitel 8.5.3), die soweit möglich als Distraktoren mit aufgenommen werden.

Hinsichtlich der Schlussfolgerungen und der daraus resultierenden Perspektiven plane ich die Auswahl der Distraktoren nochmals weitergehend hinsichtlich des Anteils korrekter Antwortalternativen zu überprüfen. Dabei betrachte ich es weiterhin als relevant, die typischen korrekten Antwortmuster – soweit inhaltlich möglich und gerechtfertigt – vollständig aufzuführen. Ich bin der Meinung, dass dadurch fehlerhafte Defizitauswertungen vermieden werden. So z. B. für den Fall, dass die Probanden ein korrektes Ergebnis in einer anderen Notationsform als der oder den durch die Distraktoren vorgegebenen erlangt haben, aber den Transfer zur Feststellung der Gleichwertigkeit der Lösungen nicht leisten können. Ich schlage vor, die Antwortalternativen um weitere, typische oder sogar „untypische" fehlerhafte Muster zu erweitern und die Beschränkung auf insgesamt neun (bzw. elf) Distraktoren für die Items aufzuheben. Auf diese Weise lässt sich der Anteil korrekter Distraktoren bei einem Item ggf. reduzieren. Hierzu sind allerdings weitere, umfangreiche Untersuchungen nötig. Der vermuteten erhöhten Ratewahrscheinlichkeit eines korrekten Ergebnisses bei einem hohen Anteil richtiger Antwortalternativen könnte bspw. in einer weiteren Untersuchung nachgegangen werden, bei der verglichen wird, inwieweit Probanden, die ein Item sonst nicht oder nicht korrekt gelöst hätten, eine Lösung raten oder willkürlich ankreuzen. Hierbei sollte die Trefferwahrscheinlichkeit für die einzelnen Items in Abhängigkeit vom Anteil der korrekten aber auch der Gesamtanzahl der Distraktoren ermittelt werden.

Inhaltlich betrachtet liefert diese Arbeit zum einen im Bereich der Kategorisierung von Fehlermustern und Typisierung von Lösungsmustern neue Erkenntnisse und zum anderen für gebundene Antwortformate geeignete Distraktoren mit diagnostischem Potential. Insgesamt ziehe ich insbesondere aus den Ergebnissen der Evaluationen den Schluss, dass erstens das von mir entwickelte Konzept zur Generierung und Auswahl diagnostisch aussagekräftiger Antwortmuster erfolgreich anwendbar ist. Zweitens komme ich zum dem Fazit, dass die erzeugten Muster die typischen Antworten der Zielgruppe nahezu vollständig abbilden und damit das Ziel eines individuellen diagnostischen Feedbacks durch den Online-Selbsttests Mathe-Meister mit den Entwicklungsergebnissen dieser Arbeit erreicht wird.

TEIL VI VERZEICHNISSE, GLOSSAR UND ANHANG

10 Literaturverzeichnis

Albers, H.-J. (2003): Lösungen: Allgemeine Wirtschaftslehre für Bankberufe. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Albers, H.-J., Ehnert, G. (2003): Allgemeine Wirtschaftslehre für Bankberufe. Europa-Fachbuchreihe für wirtschaftliche Bildung. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Baroody, A. J. (1984): Children's Difficulties in Subtraction: Some Causes and Questions. In: Journal of Research in Mathematics Education, Vol. 3, S. 203-213.

Barr, G. (1983): The Operation of Division and the embedded Zero. In: Mathematics in School, Sept. 1983, S. 4-5.

Bastian, P., Eichler, W., Riefler, S., Rinn, H., Spielvogel, O., Tkotz, K., Winter, U. (2005): Rechenbuch Elektrotechnik – Ein Lehr- und Übungsbuch zur Grund- und Fachstufe. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 16., überarb. Aufl.

Bastian, P., Eichler, W., Riefler, S., Rinn, H., Spielvogel, O., Tkotz, K., Winter, U. (2005): Methodische Lösungswege zum Rechenbuch Elektrotechnik. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 16. Aufl.

Bastian, P., Eichler, W., Riefler, S., Rinn, H., Spielvogel, O., Tkotz, K., Winter, U. (2005): Prüfungsvorbereitung Fachrechnen Elektrotechnik. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 4. Aufl.

Bathelt, Post, Padberg, F. (1986): Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3/1986, Erich Friedrich Verlag, Seelze, S. 29-44.

Baumert, J., Bos, W., Lehmann, R. (Hrsg.) (2000a): TIMSS/III: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie, Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn – Band 1: Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung am Ende der

Pflichtschulzeit. leske+budrich, Opladen.

Baumert, J., Bos, W., Lehmann, R. (Hrsg.) (2000b): TIMSS/III: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie, Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn – Band 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. leske+budrich, Opladen.

Baumgartner, P., Payr, S. (1999): Lernen mit Software. Studien Verlag, Innsbruck.

Beck, M., Wagenleiter, H.-W., Wollinger, P., Moss, J. (Hrsg.) (2002): Technische Mathematik für Metallbauer und Konstruktionsmechaniker: Fachkenntnisse. Handwerk und Technik, Hamburg, 3. Aufl.

Becker, G. (1985): Schülerfehler als Folge von Nicht-Berücksichtigung von Programm-Hierarchien. In: Dörfler, W., Fischer, R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik, Bd. 10, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, Teubner, Stuttgart, S. 27-32.

Becker, G. (1988): A Classification of Student’s Errors in Secondary Levels Algebra. In: Proceedings of PME 12, Veszprém, S. 131-138.

Blando, J. A. et al. (1989): Analyzing and Modelling Arithmetic Errors. In: Journal of Research Mathematics Education, 3/1989, S. 301-308.

Bortz, J. (2005): Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler. Springer, Berlin, 6. Auflage.

Bortz, J., Döring, N. (2006): Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. Springer Medizin Verlag, Heidelberg, 4. Aufl.

Bortz, Lienert, Böhnke (2008): Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. Springer Verlag, Heidelberg, 3. Aufl.

Brandl (1992): Analyse von Rechenfehlern im Grundrechenbereich. Ein Beitrag zur Behebung von Rechenschwäche und Arithmasthenie. Deutsche Hochschuledition, Bd. 25, Ars Una, München.

Brenner, A. (1980): Schwierigkeiten mit dem kleinen Einmaleins – Bericht über Erfahrungen mit Grundschülern zu Beginn des 3. Schuljahres. In: Mathematische Unterrichtspraxis, 3/1980, S. 11-14.

Bromme, R., Seeger, F., Steinbrink, H. (1990): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. In: IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 14, Aulis-Verlag, Köln.

Brownell, W. A., Moser, H. E. (1949): Meaningful vs. mechanical learning: A study in grade III subtraction. Duke University Press, Durham.

Brübach, H., Laubersheimer, K.-H., Schäfer, K. (2006): Technische Mathematik für Elektroberufe – Industrie und Handwerk. Bildungsverlag EINS, Troisdorf, 5. Aufl.

Buhmann, G. (2009): Haut und Haar : Friseurfachkunde. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 5. Aufl.

Buhmann, G. (2009): Lösungen zu den Mathematikaufgaben: Haut und Haar. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 5. Aufl.

Buhmann, G., Feigel, I., Friedewold, B., ter Jung, B., Strecker, A., Wiggelinghoff, B. (2009): Haut und Haar Friseurfachkunde – Lösungen zu den Mathematikaufgaben. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 5. Aufl.

Bundesverband Metall Zentralstelle für die Weiterbildung im Handwerk (Hrsg.) (2005): Rahmenlehrplan für die Vorbereitung auf die Meisterprüfung für das Feinwerkmechaniker-Handwerk, ZWH, Düsseldorf.

Büning, H. (1991): Robuste und adaptive Tests. Walter de Gruyter, New York.

Carpenter, Th., Moser, J. (1984): The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades one through three. In: Journal of Research Mathematics Education, 3/1984, S. 179-202.

Daubert, K.; Gerster, H.-D. (1983): Differenzierende Maßnahmen zur Vorbeugung und zur Behebung von Schülerfehlern beim Rechnen mit Brüchen. In: Pädagogische Welt, Heft 37, S.758-763.

Davis, R. B., Jockusch, E., McKnight, C. C. (1978): Cognitive Processes in Learning Algebra. In: Journal of Children's Mathematical Behaviour, Vol. 2 (1), S. 10-320.

Dillinger, J. (2005): Technische Mathematik für Metallbauberufe : Lehr- und Übungsbuch. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 4. Aufl.

Fein, E., Müller, R. (2007): Betriebswirtschaftslehre für technische Berufe. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Fettweiß, E. (1929): Versuch einer Erklärung von Schülerfehlern in der Algebra. In: Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht 60, S. 214-219.

Fischbein, E. et al. (1985): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: Journal for Research in Mathematics Education, Jhg. 16, S. 3-17.

FitzSimons, G., Mitsui, T. (i. V.): Educational Interfaces between Mathematics and Industry: WG6 Education/Training with Industry Participation (Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen der Arbeitsgruppe zur Präsentation und Veröffentlichung im Rahmen des 7. Internationalen Kongresses "on Industrial and Applied Mathematics" – ICIAM 2011).

Fleiss, J. L., Cohen, J., Everitt, B. S. (1969): Large sample standard errors of kappa and weighted kappa. Psychological Bulletin, Volume 72, Heft 5, S. 323-327.

Flick, U. (2008): Triangulation – Eine Einführung. VS Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden, 2. Aufl.

Fritz, A. (2003): Bedingungsvariation und Fehleranalysen als Beobachtungszugänge zur Diagnostik arithmetischer Kompetenzen. In: Fritz, A., Ricken, G., Schmidt, S. (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim, S. 283-308.

Gerschler, H. (2008): Methodische Lösungswege, gültig für 9. Aufl.: Rechenbuch Kraftfahrzeugtechnik. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 9. Aufl.

Gerster, H.-D. (1982): Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Herder, Freiburg, Basel, Wien.

Gerster, H.-D. (2009): Probleme und Fehler bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: Fritz, A. et al: Handbuch Rechenschwäche. Weinheim, S. 269-284.

Gerster, H.-D., Grevsmühl, U. (1983): Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen. In: Pädagogische Welt 11/1983, S. 654-660.

Glaser, B. G., Strauss, A. L. (1967): The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research. Chicago.

Gscheidle, R. (2008): Rechenbuch Kraftfahrzeugtechnik: Lehr- und Übungsbuch. Europa-Fachbuchreihe für Kraftfahrzeugtechnik. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 9. Aufl.

Hackenberg, H. (2007a): Basiswissen Buchführung Schritt für Schritt. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 5. Aufl.

Hackenberg, H. (2007b): Kosten- und Leistungsrechnung Schritt für Schritt – Lösungen. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 7. Aufl.

Hackenberg, H. (2007c): Lösungen zum Lehrbuch Basiswissen Buchführung Schritt für Schritt. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 5. Aufl.

Hackenberg, H., Reichelt, H., Sack, A., Schley, G. (2007): Kosten- und Leistungsrechnung Schritt für Schritt. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 7. Aufl.

Hart, K. (1978): The Understanding of fractions in the secondary school. In: Proceedings of the second International Conference for Psychology of Mathematics Education, Osnabrücker Zeitschriften zur Mathematik, Universität Osnabrück, Osnabrück, S. 177-183.

Hart, K. (1980): Secondary Childrens Understanding of Mathematics, A Report of the Mathematics Component of the Concepts in Secondary Mathematics and Science Programme. Mathematics Education Centre of Science Education, University of London, London.

Hart, K. (1981): Children's understanding of mathematics (Vol. 11-16). Murray, London.

Hart, K. (1987): Strategies and Errors in Secondary Mathematics. In: Mathematics in School (V16, Nr. 2), Harlow, Essex, S. 4-17.

Hasemann, K. (1983): Lernschwierigkeiten in der Bruchrechnung. In: Vollrath, H.-J. (Hrsg.): Zahlbereiche, Didaktische Materialien für die Hauptschule. Stuttgart, S. 26-44.

Hasemann, K. (1985): Die Beschreibung von Schülerfehlern mit kognitionstheoretischen Modellen. In: Hasemann K. (Hrsg.): Fehleranalysen – Mathematische Denkprozesse. Der Mathematikunterricht. Jahrgang 31, Heft 6. S. 6-15.

Herden, G., Pallack, A. (2000): Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. Empirische Erhebung über 244 SchülerInnen der Klassen 7 von Gymnasien. In: Journal für Mathematikdidaktik, Heft 3/4, B. G. Teubner, Stuttgart, S. 259-279.

Hierbert, J. (Hrsg.) (1986): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, Hillsdale.

Hoffart, E. (2008): Aufgabenanalysen und Analyse von Schülerbearbeitungen – Überlegungen zur hessischen Orientierungsarbeit. In: Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik 2008 in Budapest, div Franzbecker, Hildesheim.

Hoffart, E. (2008a): Analysen zu den Aufgaben der Orientierungsarbeit in Hessen 2005. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 461-464.

Hoffart, E. (2009): Zum diagnostischen Potential von Aufgaben in Orientierungsarbeiten – Rationale und empirische Aufgabenanalyse. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 651-654.

Humbach, M. (2008): Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10 – Quantitative und qualitative Analysen. Verlag Dr. Köster, Berlin.

Hylla, E. (1916): Analyse von Rechenfehlern. In: Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik 17, S. 319-325.

ICIAM (2008): Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI-Study). Quelle: http://www.iciam.org/EIMI/EIMI-flyer611.pdf. Letzter Abruf: 23.08.2010.

ICMI, ICIAM (2008): Educational Interfaces between Mathematics and Industry – Discussion Document. http://www.iciam.org/EIMI/eimi_dd-09.pdf, Letzter Abruf: 14.09.2010.

ICMI, ICIAM (2010): Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Quelle: http://eimi.mathdir.org/. Letzter Abruf: 23.08.2010.

Jost, D., Erni, J., Schmassmann, M. (1992): Mit Fehlern muss gerechnet werden. Sabe-Verlag, Zürich.

Karplus, R., Karplus, E. F., Wollman, W. (1974): Intellectual development beyond elementary school: ratio, the influence of cognitive style (Vol. 4). In: School and Science Mathematics, Jg. 74, S. 476-482.

Karriere.de (2009): Check up – Mathematikkönnen. Quelle: http://www.karriere.de/service/survey-test/fit-im-ausbildungsmarathon-teil-2-91.html, karriere.de ist ein Angebot der ECONOMY.ONE GmbH, Letzter Aufruf: 02.08.2009.

Keck, R. W., Sandfuchs, U. (Hrsg.) (1994): Wörterbuch Schulpädagogik. Verlag Justus Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

Koblischke (1983): Fehler bei der schriftlichen Division. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Heft 3/1983, Neckar-Verlag, Villingen, S. 21-32.

Kompetenzstufen im Grundbildungstest für Mathematik, Stand: 15.06.2001 Quelle: http://www.timss.mpg.de/Konzeptuelle_Grundlagen/Kompetenzstufen_im_Grundbildungstest_fuer_Mathematik.htm, Stand: 13.06.2008.

Korn, G. (1925): Über Rechenleistung und Rechenfehler. Zeitschrift für angewandte Psychologie 25, S. 145-243.

Kühnhold, Padberg, F. (1986): Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3/1986, Erich Friedrich Verlag, Seelze, S. 6-16.

Kurth, W. (1992): Proportionen und Antiproportionen. Untersuchungen zum funktionalen Denken von Schülern. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Heft 13, S. 311-343.

Lienert, G. A. (1973): Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik, Bad 1.Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, 2. völlig überarb. Aufl.

Lienert, G. A., Raatz, U. (1998): Testaufbau und Testanalyse. Beltz Psychologie Verlags Union, Weinheim, 6. Aufl.

Lind, D., Knoche, N. (2004): Testtheoretische Modelle und Verfahren bei PISA-2000-Mathematik. In: Neubrand, M.: Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. VS Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden.

LIS BW Landesinstitut für Schulentwicklung Baden-Württemberg (2009): Vergleichsarbeiten „DVA". Quelle: http://www.schule-bw.de/entwicklung /dva, Stand: 13.06.2009.

Lörcher, G. A. (1982): Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen. In: Pädagogische Welt, Heft 3, S. 172-180

Lorenz, J. H. (1987): Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematik-didaktischen Forschung. In: Journal für Mathematikdidaktik. (8), S. 205-228.

Malle, G. (1983): Zur Fähigkeit von Schülern im Aufstellen und Interpretieren von Formeln. In: Fischer, R. et al. (Hrsg.): Pädagogik und Fachdidaktik für Mathematiklehrer, Bd. 14, Teubner, Stuttgart, S. 167-174.

Malle, G. (1986): Was denken sich Schüler beim Aufstellen und Interpretieren von Formeln? In: Mathematik lehren, Heft 15, S. 9 – 11.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden.

Marx, H. (2005): Holztechnik. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Matz, M. (1980): Towards a Computational Theory of Algbraic Competence. In: Journal of Mathematical Behavior, Vol. 3 (1), S. 93-166.

Matz, M. (1982): Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In: Sleeman, J.; Brown, S. (Hrsg.): Intelligent Tutoring Systems, Academic Press, New York, S. 25 – 50.

Nutsch, W., Schulz, P. (2004): Prüfungsbuch – Holztechnik: Fragen, Antworten, Erklärungen, Abbildungen, programmierte Testaufgaben, Lösungen, Bewertung. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 4. Aufl.

Opwis, K. Plötzner, R. (1996): Kognitive Psychologie mit dem Computer: Ein Einführungskurs geistiger Leistungen mit Prolog. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Oser, F., Hascher, T., Spychiger, M. (1999): Lernen aus Fehlern, Zur Psychologie des negativen Wissens. In: Althof, Wolfgang (Hrsg.): Fehler-Welten. Leske + Budrich, Opladen, S. 11-41.

Padberg, F, (1983): Über Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung. In: Vollrath, H. J.: Zahlbereiche. Stuttgart, S. 45-57.

Padberg, F. (1986): Didaktik der Arithmetik. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.

Padberg, F. (1986): Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen. In: Der Mathematikunterricht 3/1986, Friedrich Verlag, Berlin, S. 58-77.

Padberg, F. (1987): Problembereiche bei den schriftlichen Rechenverfahren. Typische Schülerfehler - mögliche Ursachen - Gegenmaßnahmen. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe (SMP), Band 15 Heft 6, S. 267-276.

Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung, Franzbecker, Hildesheim, 3. Aufl.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 4., überarb. Aufl.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2004): PISA 2003 – Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Berlin/Münster.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2007): PISA `06 – Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie. Waxmann.

Podlogar, H., Stein, M., Winter, K. (2011): Zwischenbericht Projekt Mathe-Meister 2010 – Teilbericht zur Datenerfassung und Auswertung. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Münster, erscheint 2011.

Pollert, A., Kirchner, B. (2008): Wissen macht sicher: sicher in die (Meister)-Prüfung, bestehen im Beruf/in der Schule; Rechnungswesen, Wirtschaft, Recht und Steuern; [Prüfungsaufgaben]. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 6. neub. Aufl.

Radatz, H. (1979): Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Vieweg-Verlag, Braunschweig.

Radatz, H. (1985): Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Nr. 31(6), Friedrich Verlag, Seelze-Velber, S. 18-24.

Ranschburg, P. (1916): Die Leseschwäche (Legasthenie) und Rechenschwäche (Arithmastenie) der Schulkinder, Springer-Verlag, Berlin.

Rennschmid, L., Berger, H. (1992): Fachrechnen für Buchbinder und verwandte Berufe. Verlag Beruf + Schule, Itzehoe.

Rose, G. (1928): Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht. Leipzig.

Schaffert, S. (2004): Einsatz von Online-Prüfungen in der beruflichen Weiterbildung: Gegenwart und Zukunft. Deutsches Institut für Erwachsenenbildung. Quelle: http://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2000/schaffert00_01.pdf, Stand: 25.10.2009.

Schmiel, J., Wengler, G. (2002): Technische Mathematik für Maler und Lackierer – Lehr- und Übungsbuch. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Schmiel, J., Wengler, G. (2003): Lösungen zur 1. Aufl. des Lehrbuches: Technische Mathematik für Maler und Lackierer. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Schnell, R., Hill, P. B., Esser, E. (2008): Methoden der empirischen Sozialforschung. Oldenbourg Verlag, München, 8. unveränderte Aufl.

Schoy-Lutz, M. (2005): Fehlerkultur im Mathematikunterricht. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin.

Schroedel, Diesterweg, Westermann (2010): Online-Diagnose: Fördert individuell – passt zum Schulbuch. Quelle: http://www.westermann.de /diagnose_neu/mathematik_diagnose.xtp. Letzter Aufruf: 25.08.2010.

Schroedel, Diesterweg, Westermann, Schöningh (2010): Online-Diagnose. Quelle: http://diagnose.schroedel.de/index.php?schoolbook=student, Stand: 24.10.2009.

Schumacher, B. (2006): Wirtschaftsrechnen auf einen Blick : [kaufmännisches Rechnen, Vollkostenrechnung, Teilkostenrechnung, Tabellenkalkulation; mit 100 Originalbelegen]. Ludwigshafen/Rhein : Kiehl.

Scitec.fh-jena.de (2009): Selbsttest Mathematik: Interaktiver Online-Mathe-Test. Quelle: http://www.scitec.fh-jena.de/de/fachbereich/mathetest, Copyright Fachbereich SciTec der FH Jena, Letzte Aktualisierung der Site 16.11.2006, Letzter Aufruf: 05.08.2009.

Seemann, J. (1931): Die Rechenfehler: Ihre psychologischen Ursachen und ihre Verhütung. Beyer, Langenbalza.

Selter, Ch. (2004): Rechnen auf eigenen Wegen. In: Schule heute, Heft 4. Berlin, S. 8-10.

Selter, Ch., Meseth, V. (2002). Zu Schülerfehlern bei der nicht-schriftlichen Addition und Subtraktion im Tausenderraum. In: Sache, Wort, Zahl, 30 (45), Aulis Verlag, Freising, S. 51-58.

Shevarev, P. A. (1978): An Experiment in the Psychological Analysis of Algebraic Errors. In: Proceedings of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, Vol. 3, S. 135-180.

Siegel, S. (1976): Nichtparametrische statistische Methoden. Fachbuchhandlung für Psychologie, Frankfurt am Main.

Sill, H.-D., Sikora, Ch. (2007): Leistungserhebungen im Mathematikunterricht – Theoretische und empirische Studien. Franzbecker, Hildesheim.

Sommer, N. (1982): Fehleranalyse als empirische Forschungsmethode der Mathematikdidaktik. Dissertation an der Universität Osnabrück.

Spiegel, M. R., Stephens, L. J. (1999): Statistik. McGraw-Hill Companies Inc., New York.

Stein, M., Winter, K., Jordan, R., Podlogar, H. (2010): Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge. In: Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08. März bis 12. März 2010 in München, WTM-Verlag, Münster, im Druck.

Stiewe, Padberg, F. (1986): Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3/1986, Erhard, Friedrich Verlag, Seelze, S. 18-27.

Tabellenbuch Kraftfahrzeugtechnik : Tabellen, Formeln, Übersichten, Normen; Mathematik, Betriebsführung, Grundkenntnisse, Werkstoffkunde, Zeichnen, Fachkenntnisse Kraftfahrzeugtechnik, elektrische Anlage, Vorschriften, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2005, 15. Aufl.

Tagesschau.de (2009): Quiz: Mathe-Olympiade Bremen. Quelle: http://spiel.tagesschau.de/quiz/index.php?id=214, Copyright tagesschau.de, Start des Quiz 21.02.2009, Letzter Aufruf: 03.08.2009.

Tietze, J. (2007): Vom Richtigen zum Falschen in der elementaren Algebra, Vieweg-Verlag, Braunschweig.

Tietze, U.-P. (1987): Lernschwierigkeiten und Schülerfehler in der Algebra. In: mathematica didactica 10, Franzbecker, Bad Salzdetfurth, S. 45-59.

Tietze, U.-P. (1988): Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik – Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. Journal für Mathematik-Didaktik 9, Heft 2/3, S. 163-204.

Vergnaud, G. (1983): Multiplicative structures. In: Lesh, R., Landau, M.: Acquisition of Mathematics Concepts an Processes. Academic Press, New York, S. 127-174.

Voigt, J. (1997). Empirische Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. In: Kadunz, G. (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Beiträge. Wien, S. 383-398.

Wartha, S., Wittmann, G. (2009 in Vorb.): Ursachen für Lernschwierigkeiten im Bereich des Bruchzahlbegriffs und der Bruchrechnung. Erscheint in Fritz, A., Schmidt, S. (Hrsg.): Überwindung arithmetischer Lernschwierigkeiten in der Sekundarstufe I.

Wearne, Hiebert (1986): Über typische Schülerfehler im Bereich der Dezimalbrüche. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3/1986, Erhard, Friedrich Verlag, Seelze, S. 78-88.

Weimer, H. (1929): Psychologie der Fehler. Leipzig.

Winter, F. (2008): Mit Aufgaben das Lernen sondieren. In: Thonhauser, J. (Hrsg.): Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Waxmann Verlag, Münster.

Winter, K. (2003): Formale Spezifikationen eines Diagnosesystems für ein intelligentes Lehr-Lern-System: Fehlerdiagnose in der Dezimalbruchrechnung. Universität Hildesheim, Hildesheim. (Unveröffentlichte Masterarbeit)

Winter, K. (2007): Analyse der Entwicklung von Rechenanwendungen in der Bruchrechnung – Erste Ergebnisse. Vortrag an der PH Schwäbisch Gmünd, Schwäbisch Gmünd.

Winter, K. (2009): Andere Einsichten durch Rechenweganalysen. Vortrag im Rahmen des didaktischen Kolloquiums an der Universität Gießen, Gießen.

Winter, K. (2010): The project "Mathe-Meister" – a mathematical self assessment centre with diagnostic feedback for vocational trainees (Postponed conclusion for EIMI-Conference 2010 in Lisbon; Nach Verschiebung der Konferenz und nach Druck der Proceedings zugelassener Artikel zu den Proceedings und Vortrag).

Winter, K., Wittmann, G. (2009): Wo liegt der Fehler? Schülerinnen und Schüler analysieren fehlerhafte Lösungswege beim Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen. In: Praxis Mathematik Heft 27/2009. S. 15-21.

Wirtz, B. W., Deutsche Telekom AG (2008): Studie „Deutschland Online“. Quellen: Home: http://www.studie-deutschland-online.de; Zitatquelle: http://www.studie-deutschland-online.de/do1/1200.html, letzter Abruf: 23.08.2010.

Wittmann, G. (2007): Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. In: Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. bis 31. März 2007 in Berlin, div Franzbecker, Hildesheim, S. 175-178.

Wittmann, G. (2007a): Fehleranalysen in der Bruchrechnung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. bis 31. März 2007 in Berlin, div Franzbecker, Hildesheim, S. 173-174.

www.bettermarks.de: Erfolgreich in Mathe. Lernportal für Mathematik. Stand: 13.12.2010.

www.ecdl.de: Europäischer Computerführerschein. Stand: 13.12.2010.

www.legakids.de: Legakids.net. Stand: 13.12.2010.

www.lernserver.de: lernserver Individuelle Förderung. Stand: 13.12.2010.

www.schroedel.de: Verlagshomepage des Schroedel-Verlags. Stand: 13.12.2010.

11 Glossar

In diesem Glossar werden in dieser Arbeit auftretende Termini kurz erläutert. Fachbegriffe aus der Methodik oder Didaktik im Allgemeinen, wie „Konkordanzanalyse“ oder „Operator“, werden in der Regel hier nicht näher erörtert, wenn nicht im Rahmen dieser Arbeit eine spezifische Definition dieser Termini entwickelt werden musste.

Analogaufgabe siehe *Parallelaufgabe*
Anforderungsbereich Ein (*mathematischer) Anforderungsbereich* beschreibt einen abgegrenztes mathematischen Themengebiet oder auch nur einzelne Kompetenzen dazu, wie z. B. die Algebra, daraus die Bruchrechnung und darunter ggf. wiederum begrenzt auf das Rechnen mit Brüchen.
Anforderungsprofil In einem Anforderungsprofil – auch *mathematisches Anforderungsprofil* – werden die für den jeweiligen *Anforderungsbereich* benötigten Kompetenzen genau beschrieben. Ein Anforderungsprofil formuliert damit die Zielsetzung, für welche die dazugehörigen Items generiert wurden.
Antwortalternative Zu einem Item werden im *Multiple-Choice*-Test mehrere Antwortalternativen zur Auswahl angeboten, die mögliche (korrekte wie fehlerhafte) Lösungen darstellen. Analog dazu steht der Begriff *Distraktoren.* Der Begriff Antwortalternative wird zudem verwendet für verschiedene Lösungen (ggf. inklusive der Lösungswege), die zu einem *Item* möglich sind. *Distraktoren* bilden dahingegen in dieser Arbeit nur Ergebnisse (also keine Lösungswege) ab.

Antwortformat

Das Antwortformat einer Aufgabe beschreibt, in welcher Form auf die *Aufgabenstellung* durch die Probanden geantwortet werden kann. Dabei werden drei Formen von Antwortformaten unterschieden:

gebundene (geschlossene) Antwortformate

Bei gebundenen Antwortformaten werden den Probanden die *Antwortmöglichkeiten* zur Auswahl einer oder mehrerer Antworten vorgegeben. Hierzu zählen z. B. *Multiple-Choice* oder *Single-Choice*.

halboffene Antwortformate

Bei halboffenen Aufgaben werden den Probanden Teile einer oder mehrerer möglicher Antworten vorgegeben, die ergänzt, erweitert oder korrigiert werden müssen, wie z. B. Ansätze einer Zeichnung, die vervollständigt werden muss.

offene (freie) Antwortformate

Bei offenen Antwortformaten werden den Probanden keine Antworten zur Auswahl oder zur Ergänzung vorgegeben. Die Probanden müssen Form und Inhalt der Aufgabenbeantwortung selbst entwickeln, wie z. B. durch mathematische Beweise, ausführliche textuelle Begründungen oder (vollständig) selbst erstellte Zeichnungen.

Antwortmöglichkeiten

siehe *Antwortalternative*

Antwortmuster

Antwortmuster sind verbale oder algebraische Beschreibungen typischer *Rechen-* oder *Fehlermuster* zu einem *Aufgabentyp*.

Antwortoption

siehe *Antwortalternative*

Antwortphänomen

siehe *Phänomen*

Antwortvorgabe

siehe *Antwortalternative*

Aspektausprägung

siehe *Aufgabenaspekt*

Aufgabenanalyse

Die Aufgabenanalyse beinhaltet Untersuchungen von *Items* und wird hier zur Ermittlung des *diagnostischen Potentials* und konkreter *Rechen-* und *Fehlermuster* auf verschiedene Arten eingesetzt. Es werden u. a. die *rationale* und die *empirische Aufgabenanalyse* unterschieden. Die rationale A. wird auf Basis theoretischer Untersuchungen der *Items* durchgeführt, die empirische A. integriert entsprechend empirische Methoden und Daten.

Aufgabenaspekt

Jede Aufgabe beinhaltet verschiedene Aufgabenaspekte, wie z. B. die Form des Ergebnisses, der Operation oder der jeweiligen Rechenanforderungen einer Aufgabe. Anhand der Aufgabenaspekte sowie der *Ausprägungen dieser Aspekte* werden *Aufgabentypen* unterschieden. Eine *Ausprägung des Aufgabenaspekte*s „Operandenbeziehung untereinander“ kann bspw. sein, dass bei einer Aufgabe zwei gleichnamige Brüche (Operanden), bei einer anderen Aufgabe zwei ungleichnamige Brüche miteinander verknüpft werden.

Aufgabenformat

Das Aufgabenformat ergibt sich durch die Verknüpfung aus der *Aufgabenstellung* zu einer Aufgabe mit der ausgewählten Form des *Antwortformates*. So gibt es bspw. Textaufgaben mit *offenem*, *halboffenem* und *gebundenem Antwortformat*.

Aufgabenkonstruktion

Die Aufgabenkonstruktion beschreibt den Prozess der Generierung von Aufgaben anhand der durch die *Aufgabenmuster* definierten Konstruktionsvorschriften.

Aufgabenmuster

Aufgabenmuster sind verbale oder algebraische, verallgemeinerte Beschreibungen eines *Aufgabentyps*. Sie stellen eine Konstruktionsvorschrift für die Erstellung von *Items* dar.

Aufgabensammlung

siehe *Indikatoraufgabe* oder *Startaufgabensammlung*

Aufgabenstellung

Unter Aufgabenstellung wird die Art und Weise der Aufgabenformulierung gefasst. Hierunter fallen bspw. die Unterscheidungen in Textaufgaben im Sinne eingekleideter Aufgaben oder auch als *Modellierungsaufgaben*. Ebenso werden Aufgabenstellungen unterschieden, welche nur aus einem Term, einer Gleichung etc. und einer kurzen Aufforderung wie „Berechne“ bestehen.

Aufgabentyp

siehe *Aufgabentypus*

Aufgabentypus

Jede Aufgabe gehört einem Aufgabentypus/*Aufgabentyp* an. Dieser setzt sich aus verschiedenen *Aufgabenaspekten* zusammen und beschreibt die aus mathematischer Perspektive inhaltlichen Anforderungen der Aufgabe und die Kompetenzen, die zur Lösung notwendig sind. So können bspw. die Aufgabentypen „Addition gleichnamiger Brüche“ und „Subtraktion gleichnamiger Brüche“ differenziert werden. Je nach Zielsetzung und Konzeption lassen sich diese aber auch zu einem Aufgabentyp zusammenfassen.

Bearbeitungsphänomen

siehe *Phänomen*

Bearbeitungsschema

siehe *Lösungsschema*

Beratungspaket

Das Beratungspaket ist ein Aufgabenbereich des Projektes Mathe-Meister, dessen Gestaltung durch diese Arbeit erörtert wird. Hierdurch werden die Inhalte für die *Fehleranalysehinweise* erzeugt.

Bruchzahl in gemischter Schreibweise

Bruchzahlen der Form $g\frac{a}{b}$. Auch bezeichnet als *gemischte Schreibweise* (Kurzform), *gemischte Zahl* oder *gemischter Bruch*.

charakteristischer Fehler

siehe *typischer Fehler*

Defizitanalyse

Die Defizitanalyse ist ein Programmbereich des *Feedbacks* des *Online-Test*-Portals Mathe-Meister. Sie gibt an, in welchen *mathematischen Bereichen* die Kandidaten Defizite haben.

diagnostische Eignung

siehe *diagnostisches Potential*

diagnostisches Aussagepotential

siehe *diagnostisches Potential*

diagnostisches Potential

Das diagnostische Potential eines *Items* insgesamt oder der dazugehörigen *Distraktoren* im Einzelnen beschreibt, ob es geeignet ist, auf Basis dieses *Items* bzw. der *Distraktoren* detaillierte diagnostische (hier vorrangig fehleranalytische) Aussagen zu den Kompetenzen einer Person bzgl. des durch dieses *Item* repräsentierten *Anforderungsprofils* zu ermöglichen.

Distraktor

Zu einem Item werden in *gebundenen Antwortformaten* mehrere Antworten, so genannte Distraktoren, zur Auswahl angeboten, die mögliche (korrekte wie fehlerhafte) Lösungen darstellen. Distraktoren bilden in dieser Arbeit nur Ergebnisse (also keine Lösungswege) ab.

e-Assessments

siehe *Online-Test*

empirische Aufgabenanalyse

siehe *Aufgabenanalyse*

Ergebnismuster

siehe *Antwortmuster*

Ergebnisrückmeldung

siehe *Defizitanalyse* und *Fehleranalyse*

Feedback

Siehe *Defizitanalyse* und *Fehleranalyse*

Fehler

Eine mathematisch falsche Rechnung bzw. ein mathematisch falsches Ergebnis eines Lösungsprozesses. Rechnungen oder Ergebnisse, die mathematisch korrekt sind, aber in ihrer Form nicht einem bspw. in Curricularen Vorgaben verankerten Normalverfahren entsprechen – und damit eine Abweichung von der Norm nach Oser darstellen – werden hier *nicht* als Fehler betrachtet, sondern als Alternativen eines zu einem korrekten Ergebnis führenden Lösungsverfahrens.

Fehleranalyse

Die Fehleranalyse ist ein Programmbereich des *Feedbacks* des *Online-Test*-Portals Mathe-Meister. Sie beinhaltet die *Fehleranalysehinweise* zu jedem *Item*, das falsch beantwortet wurde. Dazu erfolgen Hinweise zu konkreten *Fehlermustern*, die aus der Antwortauswahl abgeleitet werden können.

Außerdem steht der Begriff Fehleranalyse für einen Forschungsbereich der Mathematikdidaktik wie auch Psychologie (und anderer Fächer), in dem es um die Erkundung der von Probanden getätigten fehlerhaften Lösungen zu bestimmten Aufgaben oder Anforderungen geht.

Fehleranalysehinweis

siehe *Fehleranalyse*

Fehleranalysetext

Synonym für *Fehleranalysehinweis*

fehleranalytische Rückmeldung

Synonym für *Fehleranalysehinweis*

Fehlerbeschreibung

siehe *Fehlermuster*

Fehlerdiagnose

Synonym für *Fehleranalyse*

Fehlerkategorie

siehe *Fehlerphänomen*

Fehlermuster

siehe *Muster*

Fehlerphänomen

siehe *Phänomen*

Fehlerquelle

Als *Fehlerquellen* seien hier hypothetische Begründungen bezeichnet, die einen fehlerhaften Bearbeitungsschritt aufzeigen. So z. B. einen Rechenfehler in der Menge der natürlichen Zahlen oder das Vertauschen von Variablen.

Fehlertyp

siehe *Fehlerphänomen*

Fehlertypenliste

siehe *Typenliste*

Fehlerursache

Fehlerursachen können bspw. sein:

Flüchtigkeitsfehler

Umgangssprachlich auch als „Leichtsinnsfehler“ bezeichnet. Sie lassen sich dadurch charakterisieren, dass die betreffende Person einen solchen Fehler sofort korrigieren kann, wenn sie darauf aufmerksam gemacht wird.

Systematische Fehler

Sie liegen insbesondere dann vor, wenn dasselbe *Fehlermuster* bei Aufgaben eines bestimmten Typs immer wieder auftritt.

typische (charakteristische) Fehler

Sie kommen bei bestimmten Rechenoperationen auf Basis der Befunde einer oder mehrerer Untersuchungen häufiger vor.

Förderhinweise

Auf Basis der *Defizitanalyse* wird für jeden defizitären Bereich zurückgemeldet, welche dazu konkret passenden Lernmedien und Fortbildungen empfohlen werden.

freie Aufgabenbeantwortung

siehe *Antwortformat*

freies Antwortformat

siehe *Antwortformat*

gebundene Aufgabenbeantwortung

siehe *Antwortformate*

gebundenes Antwortformat

siehe *Antwortformat*

gemischte Schreibweise

siehe *Bruchzahl in gemischter Schreibweise*

gemischte Zahl

siehe *Bruchzahl in gemischter Schreibweise*

gemischter Bruch

siehe *Bruchzahl in gemischter Schreibweise*

geschlossenes Antwortformat

siehe *Antwortformat*

halboffenes Antwortformat

siehe *Antwortformat*

Indikatoraufgabe

Im Projekt Mathe-Meister wird die zu Beginn erzeugte so genannte *Startaufgabensammlung* reduziert zu einer Itemsammlung kleineren Umfangs, den Indikatoraufgaben. Sie bilden den Itempool für die Generierung der *Distraktoren*.

Item

Ein Test setzt sich aus mehreren Items zusammen. Das können *Aufgabestellungen* oder auch Fragestellungen sein.

Itemblock

Itemblöcke entstehen durch die Zusammenfassung mehrerer Items eines *Anforderungsprofils* oder eines *mathematischen Bereichs*.

Lösungsschema

Ein Lösungsschema stellt eine Variationsmöglichkeit für die Bearbeitung einer Aufgabe/eines Items dar.. Ein Lösungsschema kann auch fehlerhaft sein und zu einem falschen Ergebnis führen.

Lösungsverfahren

siehe *Lösungsschema*

mathematischer Anforderungsbereich

siehe *Anforderungsbereich*

mathematischer Bereich

Unter einem mathematischen Bereich sind bspw. Themengebiete der Mathematik zusammengefasst, wie Geometrie oder Arithmetik.

Multiple-Choice

Multiple-Choice ist eine Form von *gebundenen Antwortformaten*, bei denen zu jedem *Item* eine Auswahl an *Distraktoren* zur Verfügung steht. Beim Multiple-Choice können mehrere *Distraktoren* eine korrekte Antwort darstellen.

Muster

Muster stellen verallgemeinerte textuelle oder algebraische Beschreibungen (Deklarationen) von *Aufgabentypen* und korrekten oder fehlerhaften *Lösungsverfahren* dar. Diese Beschreibungen werden auch als *Musterdefinition* oder *-deklaration* bezeichnet.

Aufgabenmuster
werden erzeugt durch die Kategorisierung und Verallgemeinerung von Aufgabentypen und stellen eine verallgemeinerte textuelle oder algebraische Beschreibung dieses Typus dar.

Fehlermuster
werden erzeugt durch die Kategorisierung und Verallgemeinerung von Fehlerphänomenen. Ein Muster kann bei unterschiedlichen Items identifiziert werden.

Rechenmuster
stellen korrekte, verallgemeinerte Lösungsschemata zu ähnlichen Items dar.

Musterdefinition

siehe *Muster*

Musterdeklaration

siehe *Muster*

Mustergenerierung

Auf Basis der Analyse von *Phänomenen* werden Muster generiert.

Notationsform

siehe *Probandennotation*

offenes Antwortformat

siehe *Antwortformat*

Online-Assessment-Center

Ein Online-Assessment-Center ist ein Internetportal, welches ein oder mehrere Assessments (Tests) zur Verfügung stellt.

Online-Assessment

Ein Online-Assessment ist ein Test, der im Internet zur Verfügung gestellt wird. Prinzipiell gibt es dabei sowohl Tests, die direkt online bearbeitet werden können, als auch solche, die heruntergeladen oder ausgedruckt werden müssen. Im Rahmen dieser Arbeit sind unter dem Begriff *Online-Tests* solche gemeint, die online bearbeitet und ausgewertet werden.

Online-Self-Assessment

Ein Online-Self-Assessment ist ein *Selbsttest*, der im Internet zur Verfügung gestellt wird. Prinzipiell gibt es dabei sowohl Tests, die direkt online bearbeitet werden können, als auch solche, die heruntergeladen oder ausgedruckt werden müssen. Im Rahmen dieser Arbeit sind unter dem Begriff *Online-Tests* solche gemeint, die online bearbeitet und ausgewertet werden.

Online-Test

siehe *Online-Assessment*

Parallelaufgabe

Parallelaufgaben stellen Aufgaben desselben Typus dar und sollen bei der *empirischen Aufgabenanalyse* die Möglichkeit bieten, eventuelle zusätzliche Differenzierungsaspekte aufzuzeigen.

Phänomen

Phänomene sind von Probanden zu *Items* notierte *Lösungsschemata* oder Ergebnisse. Es wird unterschieden in *Fehler*- und *Rechenphänomene*:

Fehlerphänomene
bezeichnen eine mathematisch fehlerhafte Probandennotation. Phänomene beziehen sich stets genau auf eine *Aufgabenstellung*.

Rechenphänomene
zeigen eine mathematisch korrekte *Probandennotation*.

Probandennotation

Die schriftlich fixierten *Lösungsschemata* und Ergebnisse von Probanden werden als Probandennotation, teilweise auch nur als *Notation*, bezeichnet.

Rationale Aufgabenanalyse

siehe *Aufgabenanalyse*

Rechenphänomen

siehe *Phänomen*

Rechentyp

siehe *Phänomen*

Rechentypenliste

siehe *Typenliste*

Selbsttest

siehe *Self-Assessment*

Self-Assessment-Center

In einem Self-Assessment-Center werden Tests zur Überprüfung der eigenen Kompetenzen angeboten. Self-Assessment-Center können bspw. in Instituten lokal an einem Ort oder auch im Internet global zur Verfügung gestellt werden.

Self-Assessment

Self-Assessments sind Tests, die Personen für sich selbst zur Überprüfung ihrer eigenen Kompetenzen auf einem Gebiet/Fachgebiet anwenden können.

Single-Choice

Multiple-Choice ist eine Form von *gebundenen Antwortformaten*, bei denen zu jedem *Item* eine Auswahl an *Distraktoren* zur Verfügung steht. Bei der Auswahl von *Distraktoren* im Single-Choice-Modus ist stets nur genau eine Antwort korrekt.

Startaufgabensammlung

Die Startaufgabensammlung umfasst im Projekt Mathe-Meister einen umfangreichen Itempool, der zu Beginn des Projektes entwickelt und anschließend reduziert wurde und in die *Indikatoraufgaben* mündet.

systematischer Fehler

siehe *Fehlerursache*

Testaufgabe

siehe *Item*

Testaufgabenanforderung

Testaufgabenanforderungen sind die Vorgaben an ein Item, die durch die *Anforderungsprofile* definiert werden. D. h., was mit dem *Item*/dem *Itemblock* überprüft werden soll.

Testitem

siehe *Item*

Typenliste

Zu jeder Aufgabe wurden die vollständigen *Probandennotationen* (*Phänomene*) in so genannten *Fehler*- und *Rechentypenlisten* zusammengefasst.

typische Antwort

Typische Antworten ergeben sich aus der Analyse der *Typenlisten*. Sie treten bei einem *Item* in der Regel mehrfach auf.

typische Antwortvorgabe

Typische Antwortvorgaben ergeben sich aus den *typischen Antworten*. *Distraktoren* entsprechen diesen typischen Antwortvorgaben.

typischer Fehler

siehe *Fehlerursache*

typisches Muster

siehe *Muster* und *Fehlerursache*

12 Abbildungsverzeichnis

13 Tabellenverzeichnis

14 Anhang

14.1 Online-Testportale – weitere Abbildungen

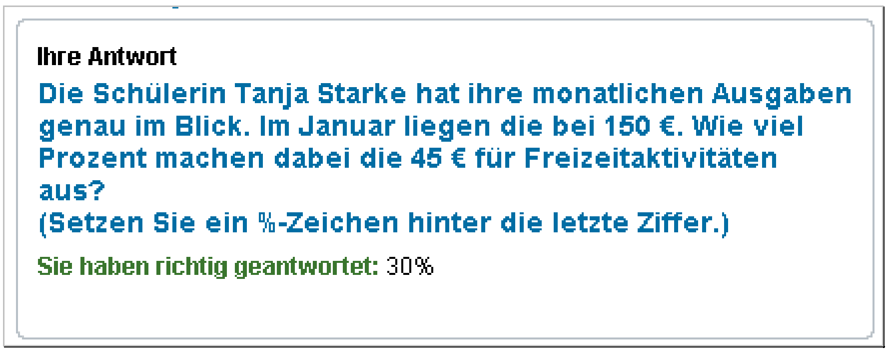


Abbildung 42: Eingabeanweisungen für offenes Antwortformat, Frage 4 [Ausschnitt aus karriere.de 2009].

Auswertung

Frage 1 von 5

Ben Merck tankt mit seinem Auto 39,5 Liter Kraftstoff. Er muss dafür 49,77 € zahlen. Wie viel EUR kostet 1 Liter Kraftstoff?
Tragen Sie den Preis in das Kästchen ein.

Ihre richtige Lösung: 1,26 €

Frage 2 von 5

Familie Walter verfügt über ein Monatseinkommen von 1.980 EUR. Monatlich wird davon 1/3 für Miete, 1/4 für Nahrungsmittel, 1/6 für das Auto und 1/12 für Kleidung ausgegeben. Wie viel € stehen der Familie nach Abzug der o.g. Ausgaben jeden Monat für sonstige Ausgaben zur Verfügung?

Ihre falsche Lösung:

Die richtige Lösung: 330 €

Frage 3 von 5

Die Schülerin Tanja Starke hat ihre monatlichen Ausgaben genau im Blick. Im Januar liegen die bei 150 €. Wie viel Prozent machen dabei die 45 € für Freizeitaktivitäten aus? (Setzen Sie ein %-Zeichen hinter die letzte Ziffer.)

Ihre richtige Lösung: 30%

Frage 4 von 5

Im Januar kauft sich Tanja Starke für 31 € Kleidung; im Monat darauf sind es nur noch 10 €. Um wie viel Prozent sind die Ausgaben im Januar höher als die im Februar? (Setzen Sie nach der letzten Ziffer das %-Zeichen.)

Ihre falsche Lösung: 210 %

Die richtige Lösung: 210%

Frage 5 von 5

Ben Merck fährt mit dem Auto jeden Morgen 12 km bis zu seiner Arbeitsstätte. Er braucht für die Strecke 18 Minuten. Wie viel Stundenkilometer fährt Ben im Durchschnitt?

Ihre falsche Lösung: 60 km/h

Die richtige Lösung: 40 km/h

Abbildung 43: Testauswertung und Rückmeldung an den Probanden [Ausschnitt aus karriere.de]

14.2 Onlineumfrage 2008

Ziel: Evaluation der verlangten Grundlagenkenntnisse und Expertenrating zur beruflichen Zuordnung

14.2.1 Rahmenbedingungen: Teilnehmer, Experten

IHK Stuttgart, IHK Passau, IHK Hagen

HWK Münster, HWK Hamburg, HWK Düsseldorf

Zeitraum der Onlinebefragung (UniPark-Umfrage): Juli – Oktober 2008

Motivation: Verlosung von Gutscheinen für das Onlineportal amazon.de; Ansonsten anonyme Verarbeitung der erfassten Daten.

Auswahl der Teilnehmenden: Lehrende, die nach Anfrage durch die Ansprechpartner aus den einzelnen Kammern benannt wurden.

Teilnehmerzahl: 16

Ziel der Onlinebefragung: Erfassung der benötigten Grundlagenkenntnisse in Mathematik, die zu Beginn einer Meisterausbildung gegeben sein sollten – differenziert nach konkreten Berufsfeldern.
Zu folgenden Berufsfeldern wurden von Experten Antworten gegeben:

- Maurer (5)
- Zimmerer (5)
- Dachdecker (2)
- Tischler (5)
- Metallbauer (2)
- Feinwerkmechaniker (2)
- Informationstechniker (1)
- Elektrotechniker (2)
- Industriemeister Holz (5)
- Industriemeister Elektrotechnik (1)
- Industriemeister Metall (4)

14.2.2 Extraktion der mathematischen Grundlageninhalte

Der Stoffanalyse von Lehrwerken und Arbeitsmaterialien aus der Meisterausbildung ging eine Auswertung der Rahmenlehrpläne der einzelnen Gewerke voraus. Diese ergab allerdings, dass mathematische Inhalte dort nicht mehr explizit konkretisiert werden, sondern höchstens im Rahmen der Einbettung in berufsspezifische Probleme formuliert werden (vgl. Tabelle 81, Tabelle 82).

Abkürzungen: Metallbauer (MB) – Feinwerkmechaniker (FM) – Elektrotechniker (ET) – Installateur- und Heizungsbauer (SHK)

Explizit in Rahmenlehrplänen genannte oder erschließbare Inhalte und Bezüge:

Technische Mathematik	MB	FM	ET	SHK
Berechnung physikalischer Größen	x	x		x
Berechnungen aus der Mechanik	x	x		
Festigkeitslehre	x	x		
Fluidtechnik	x	x		
Berechnungen an Maschinen		x		
Berechnungen zu: Schneidwerkzeugbau, Formenbau, Umformtechnik		x		
Leistungsberechnungen			x	
Wärmebedarfsberechnung (EnEV)				x
Rohrnetzberechnung (alle Medien)				x
RLT-Berechnung				x
Kanalnetzberechnung				x
Berechnungen in der Technik (Elektronik, Digital-, Hochfrequenztechnik, Mess-, Regelungstechnik ...)				x

Tabelle 81: Mathematische Inhalte zur Technischen Mathematik in verschiedenen Berufszweigen laut Rahmenlehrplänen 2005.

Kostenrechnung	MB	FM	ET	SHK
Kostenartenrechnung kalkulatorische Kosten	x	x	x x	x x
Innerbetriebliche Leistungsverrechnung (Kostenstellen-rechnung, BAB, Platzkostenrechnung)	x x x	x x x	x x	x x
Deckungsbeitragsrechnung				x

Tabelle 82: Mathematische Inhalte zur Kostenrechnung in verschiedenen Berufszweigen laut Rahmenlehrplänen 2005.

14.2.3 Aufbau der Online-Umfrage

14.2.3.1 Einführender Text

„Mathematische Grundkenntnisse in den einzelnen Berufsfeldern

Sehr geehrte Lehrende,

mit den von uns für unterschiedliche Gewerke und Berufe zu entwickelnden Tests wollen wir eine Feststellung der notwendigen EINGANGSvoraussetzungen für Schülerinnen und Schüler von Meisterlehrgängen bzw. Verkaufsleiterlehrgängen im Bereich Mathematik ermöglichen. Wir möchten deshalb für einzelne Berufsfelder möglichst genau erfassen, bei welchen mathematischen Inhalten es sich um Aspekte handelt,

- die zu Beginn des Lehrgangs vorausgesetzt werden können sollten,
- oder Inhalte, die ausführlich im Rahmen des Lehrgangs wiederholt bzw. neu erarbeitet werden.

Ein Beispiel soll dies veranschaulichen: Der Satz des Pythagoras ist in der Regel schon Gegenstand des Regelschulunterrichts. Sicherlich wird er in der Ausbildung zum Tischler wiederholt und nochmals erörtert. Für zukünftige Meisterschülerinnen und -schüler des Tischlerhandwerks stellt sich nun zu Beginn ihres Meisterlehrgangs die Frage, ob ihnen der Satz des Pythagoras vertraut sein sollte und sie ihn anwenden können sollten oder ob er im Laufe des Lehrgangs auf jeden Fall ausführlich wiederholt bzw. neu erarbeitet wird.

Aus den Lehrwerken für einzelne Berufe haben wir nun versucht, die Eingangsvoraussetzungen differenziert nach Berufsbildern heraus zu arbeiten. Bei einigen mathematischen Aspekten, wie zum Beispiel konkreten geometrischen Begriffen und Formeln ist aus den Lehrwerken jedoch nicht eindeutig ersichtlich, welche Inhalte, Formeln und Begriffe zu Beginn des Meisterlehrgangs vorausgesetzt werden. Daher benötigen wir an dieser Stelle Ihre Hilfe als Lehrende aus den einzelnen Gewerken. Wir bitten Sie, jeweils nach den vorgegebenen Berufsfeldern getrennt die im Folgenden aufgestellten mathematischen Inhalte zu betrachten und zu entscheiden, bei welchen es sich für die jeweiligen Berufsgruppen um Grundkenntnisse handelt, die Sie zu Beginn des Meisterlehrgangs voraussetzen.

Des Weiteren ist uns sehr geholfen, wenn Sie sich bei den einzelnen Fragen Anmerkungen notieren, falls Ihrer Meinung nach bezogen auf die von Ihnen beurteilten Berufsbilder weitere Punkte fehlen. Am Ende des Fragebogens haben Sie die Gelegenheit, uns diese Anmerkungen mitzuteilen. Sollten Ihnen weitere Grundvoraussetzungen in Mathematik einfallen, bitten wir Sie, die Liste zu ergänzen.

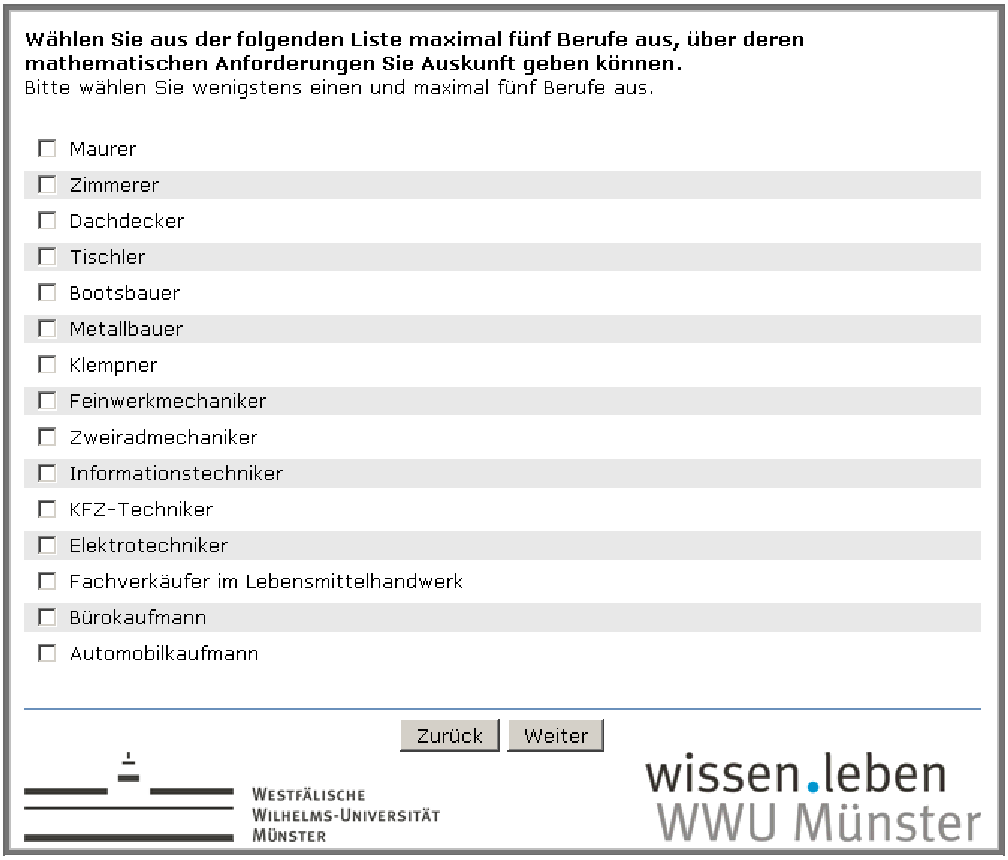
Wir danken recht herzlich für Ihre Unterstützung!“

14.2.3.2 Abgefragte Berufe (zur Meisterausbildung bzw. Fachleiterausbildung)

Bei der Onlinebefragung standen folgende Meisterabschlüsse bzw. Berufsfelder zur Auswahl:

Für die IHK:

- Industriemeister Metall
- Industriemeister Holz
- Industriemeister Elektrotechnik



Wählen Sie aus der folgenden Liste maximal fünf Berufe aus, über deren mathematischen Anforderungen Sie Auskunft geben können.
Bitte wählen Sie wenigstens einen und maximal fünf Berufe aus.

- ☐ Maurer
- ☐ Zimmerer
- ☐ Dachdecker
- ☐ Tischler
- ☐ Bootsbauer
- ☐ Metallbauer
- ☐ Klempner
- ☐ Feinwerkmechaniker
- ☐ Zweiradmechaniker
- ☐ Informationstechniker
- ☐ KFZ-Techniker
- ☐ Elektrotechniker
- ☐ Fachverkäufer im Lebensmittelhandwerk
- ☐ Bürokaufmann
- ☐ Automobilkaufmann

Zurück Weiter

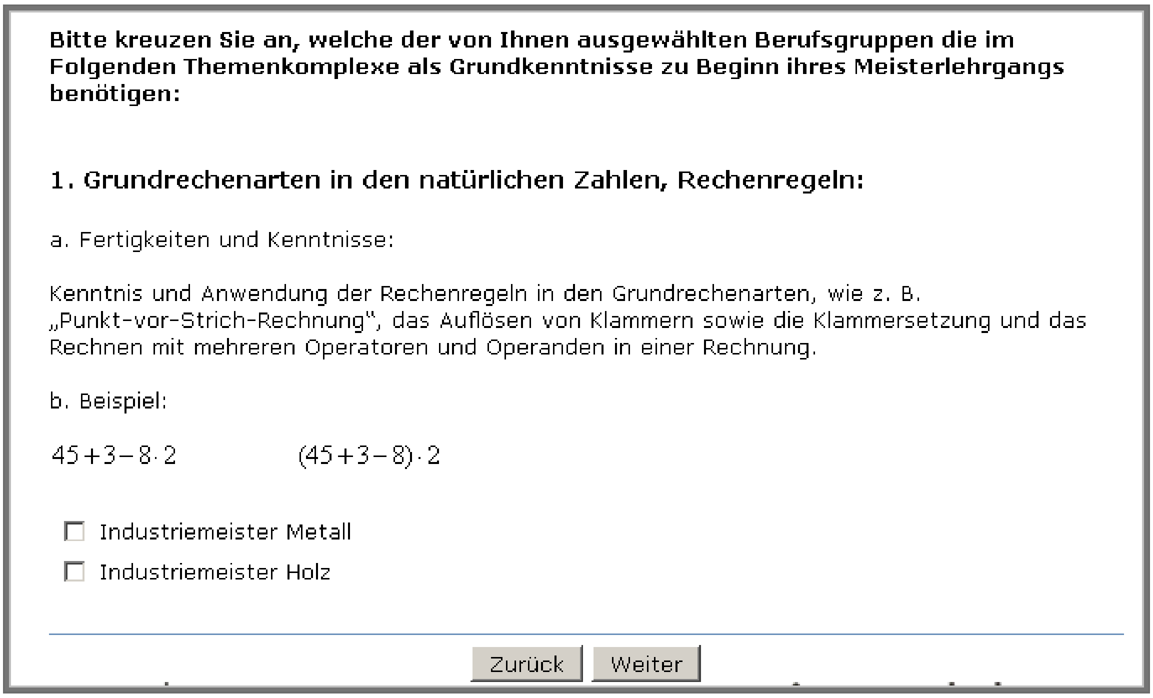
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
wissen.leben WWU Münster

Abbildung 44: Originalabfragefenster der Onlineumfrage zur Auswahl der Berufe im Bereich HWK.

Nur für die an dieser Stelle ausgewählten Berufe müssen nachfolgend die mathematischen Inhalte als notwendige oder nicht notwendige Grundlagenkenntnisse zu Beginn des Meisterlehrgangs zugeordnet werden.

14.2.3.3 Abgefragte mathematische Inhalte

Darstellung der Abfragen am Beispiel des Auswahlvorgangs 1. IHK, 2. Industriemeister Metall und Holz. Die Fragen werden dementsprechend nur für diese beiden Gewerke gestellt:



Bitte kreuzen Sie an, welche der von Ihnen ausgewählten Berufsgruppen die im Folgenden Themenkomplexe als Grundkenntnisse zu Beginn ihres Meisterlehrgangs benötigen:

1. Grundrechenarten in den natürlichen Zahlen, Rechenregeln:

a. Fertigkeiten und Kenntnisse:

Kenntnis und Anwendung der Rechenregeln in den Grundrechenarten, wie z. B. „Punkt-vor-Strich-Rechnung", das Auflösen von Klammern sowie die Klammersetzung und das Rechnen mit mehreren Operatoren und Operanden in einer Rechnung.

b. Beispiel:

$45+3-8\cdot 2 \qquad (45+3-8)\cdot 2$

☐ Industriemeister Metall

☐ Industriemeister Holz

Zurück Weiter

Abbildung 45: Abfragefenster (komplett) zur ersten inhaltsbezogenen Frage.

Nachfolgend werden exemplarisch weitere Fragefenster optisch reduziert dargestellt. Dabei wird die Auswahl der Berufe nicht in jeder Abbildung aufgezeigt, sofern sie der Anordnung in Abbildung 45 entspricht.

4. Dreisatz:

a. Fertigkeiten und Kenntnisse:

Verständnis und Anwendung des Prinzips des Dreisatzes auf verschiedene Aufgabenstellungen.

b. Beispiel:

1000 g Schwarztee kosten 20,- €, 1000 g Kräutertee kosten 25,- €. Eine Mischung enthält insgesamt 250 g in einem Verhältnis von 4:1. Was kostet die Teemischung?

5. Umrechnen von Einheiten:

a. Fertigkeiten und Kenntnisse:

Umrechnen von und in verschiedene Einheiten.

b. Beispiel:

5 cm = 50 mm

6. Rechnen mit Einheiten:

a. Fertigkeiten und Kenntnisse:

Lösen von Rechnungen mit Einheiten. Korrekte Verknüpfung zusammengehöriger Werte nach Einheiten.

b. Beispiel:

5 cm + 8 l + 3,4 cm + 5 l

8. Prozentrechnung 1:

a. Fertigkeiten und Kenntnisse:

Berechnung prozentualer Anteile etc..

b. Beispiel:

„3 von 12 Balken entsprechen ___%"

9. Prozentrechnung 2:

a. Fertigkeiten und Kenntnisse:

Berechnung des Prozentsatzes, des Prozentwertes und des Grundwertes, Anteile umrechnen inklusive Kenntnis der entsprechenden Begriffe und den zugehörigen Berechnungsvorschriften.

b. Beispiel:

„Ermitteln Sie den Prozentsatz aus folgendem Zusammenhang ..."

Der Fragebogen schließt ab mit einer offenen Frage, die den Teilnehmenden die Möglichkeit zu Anmerkungen zu Inhalten und/oder dem Fragebogen an sich bietet:

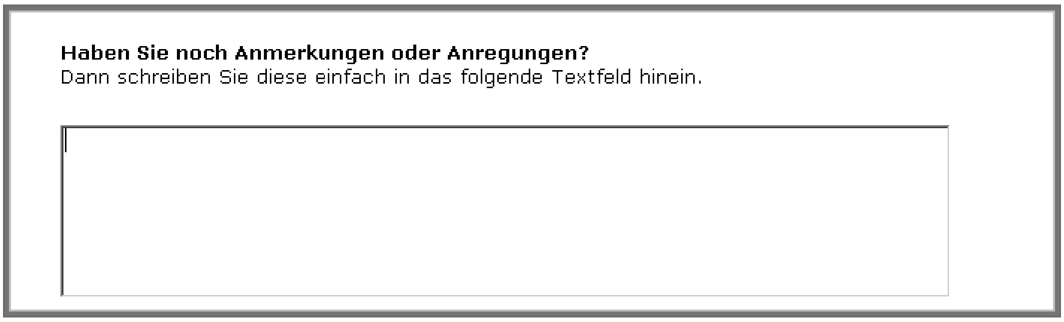


Abbildung 46: Abschließende Fragestellung des Bogens mit Raum für Anmerkungen zum Fragebogen.

14.2.4 Auswertung der Onlineumfrage

Nachfolgend werden die einzelnen Themen aufgeführt und aufgezeigt, welche für Meisterlehrgänge aus Sicht der Experten zu Beginn des Meisterlehrgangs vorausgesetzt werden. Es wird zu jedem Bereich dargestellt, welche berufsspezifische Zuordnung sich ergibt und in wie weit die durch die Stoffanalyse erarbeiteten und in der Onlineumfrage vorgestellten Inhalte, Kompetenzanforderungen und Begriffe ggf. durch die Experten verändert und oder erweitert wurden.

In der tabellarischen Übersicht werden die Bereiche und Kompetenzen durch Markierung hervorgehoben, die in dem jeweiligen Berufsfeld *nicht* als Eingangsvoraussetzung für den Meisterlehrgang spezifiziert wurden.

Berufsfeld Thema	Maurer	Zimmerer	Dachdecker	Tischler	Metallbauer	Feinwerk-mechaniker	Informations-techniker	Elektro-techniker	Ind.-Meister Metall	Ind.-Meister Holz	Ind.-Meister Elektrotechnik
Grundmenge	*5*	*5*	*2*	*5*	*2*	*2*	*1*	*2*	*5*	*1*	*4*
Grundrechen-arten in N, Rechenregeln	5/5	5/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen	3/5	3/5	1/2	4/5	2/2	2/2	1/1	1/2	5/5	1/1	4/4
Potenzrech-nung	2/5	2/5	**0/2**	3/5	1/2	2/2	1/1	1/2	5/5	1/1	3/4
Dreisatz	4/5	4/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	1/2	5/5	1/1	4/4
Umrechnen von Einheiten	5/5	5/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Rechnen mit Einheiten	5/5	5/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	1/2	4/5	1/1	4/4
Zuordnungen ((Umgekehrt-)Proportional)	3/5	3/5	1/2	3/5	2/2	2/2	1/1	1/2	5/5	1/1	4/4

Berufsfeld Thema	Maurer	Zimmerer	Dachdecker	Tischler	Metallbauer	Feinwerk-mechaniker	Informations-techniker	Elektro-techniker	Ind.-Meister Metall	Ind.-Meister Holz	Ind.-Meister Elektrotechnik
Grundmenge	5	5	2	5	2	2	1	2	5	1	4
Prozentrechnung Anteile berechnen	5/5	5/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	1/2	5/5	1/1	4/4
Prozentrechnung Begriffs-, Formelkenntnis, Berechnungen	5/5	5/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	1/2	4/5	1/1	2/4
Zinsrechnung Regelkenntnis u. Berechnungen	4/5	3/5	1/2	4/5	2/2	2/2	1/1	1/2	3/5	1/1	2/4
Diagramme Lesen u. Erstellen	4/5	4/5	1/2	4/5	2/2	2/2	1/1	1/2	5/5	1/1	4/4
Termumformun-gen	3/5	3/5	1/2	4/5	2/2	2/2	1/1	2/2	4/5	1/1	2/4
lineare Gleichun-gen	3/5	3/5	1/2	4/5	2/2	2/2	1/1	2/2	4/5	1/1	2/4
quadratische Gleichungen	1/5	1/5	0/2	1/5	0/2	1/2	0/1	2/2	1/5	0/1	0/4

Berufsfeld Thema	Maurer	Zimmerer	Dachdecker	Tischler	Metallbauer	Feinwerk-mechaniker	Informations-techniker	Elektro-techniker	Ind.-Meister Metall	Ind.-Meister Holz	Ind.-Meister Elektrotechnik
Grundmenge	5	5	2	5	2	2	1	2	5	1	4
Taschenrechner Anwendungen	4/5	4/5	2/2	4/5	2/2	2/2	1/1	2/2	4/5	1/1	4/4
Mathematische Begriffe allgemein	4/5	4/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Summe, Differenz, Produkt	1/5	1/5	0/2	2/5	1/2	2/2	1/1	2/2	3/5	0/1	1/4
Summand	1/5	1/5	0/2	2/5	0/2	1/2	1/1	2/2	3/5	0/1	1/4
Subtrahend, Minuend	1/5	1/5	0/2	2/5	0/2	1/2	1/1	2/2	3/5	0/1	1/4
Divisor, Dividend	3/5	3/5	1/2	4/5	2/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Faktor	4/5	4/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Division, Addition, Subtraktion, Multiplikation	4/5	4/5	2/2	5/5	2/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Nenner, Zähler	0/5	0/5	0/2	1/5	0/2	0/2	1/1	1/2	2/5	0/1	1/4
Weitere Begriffe											

Berufsfeld Thema	Maurer	Zimmerer	Dachdecker	Tischler	Metallbauer	Feinwerk-mechaniker	Informations-techniker	Elektro-techniker	Ind.-Meister Metall	Ind.-Meister Holz	Ind.-Meister Elektrtechnik
Grundmenge	*5*	*5*	*2*	*5*	*2*	*2*	*1*	*2*	*5*	*1*	*4*
Begriffe Geometrie											
Würfel, Quader, Kugel	2/5	3/5	**0/2**	3/5	1/2	1/2	1/1	**0/2**	5/5	1/1	4/4
Kreis, Rechteck, Quadrat, Dreieck	3/5	3/5	1/2	3/5	1/2	1/2	1/1	**0/2**	5/5	1/1	4/4
Pyramide, Kegel, Zylinder	2/5	2/5	**0/2**	3/5	1/2	1/2	**0/1**	**0/2**	5/5	1/1	4/4
Tetraeder, Oktaeder	**0/5**	**0/5**	**0/2**	1/5	**0/2**	**0/2**	**0/1**	**0/2**	4/5	1/1	3/4
Prisma, Ellipse	1/5	1/5	**0/2**	2/5	1/2	1/2	**0/1**	**0/2**	5/5	1/1	3/4
Höhe, Radius	3/5	3/5	1/2	3/5	1/2	1/2	**0/1**	**0/2**	5/5	1/1	4/4
weitere Begriffe	1/5	1/5	**0/2**	2/5	**0/2**	**0/2**	**0/1**	**0/2**	**0/5**	**0/1**	**0/4**
Flächenberechnung											
Quadrat, Rechteck, Kreis	4/5	4/5	1/2	4/5	1/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Raute	2/5	3/5	1/2	3/5	**0/2**	**0/2**	1/1	1/2	4/5	1/1	2/4
Rechtwinkliges Dreieck, Dreieck allgemein	4/5	4/5	1/2	4/5	1/2	2/2	1/1	2/2	5/5	1/1	4/4
Weitere Begriffe	1/5	2/5	**0/2**	3/5	**0/2**	**0/2**	**0/1**	**0/2**	1/5	1/1	1/4
Zusammengesetzte Formen aus den o. a.	2/5	2/5	**0/2**	3/5	1/2	1/2	**0/1**	**0/2**	5/5	1/1	3/4

Berufsfeld / Thema	Maurer	Zimmerer	Dachdecker	Tischler	Metallbauer	Feinwerk-mechaniker	Informations-techniker	Elektro-techniker	Ind.-Meister Metall	Ind.-Meister Holz	Ind.-Meister Elektrotechnik
Grundmenge	*5*	*5*	*2*	*5*	*2*	*2*	*1*	*2*	*5*	*1*	*4*
Oberflächen und Volumenberechnung											
Quader, Würfel	4/5	4/5	1/2	4/5	1/2	2/2	**0/1**	2/2	4/5	1/1	2/4
Kugel	4/5	4/5	1/2	2/5	1/2	2/2	**0/1**	2/2	4/5	1/1	3/4
Zylinder, Pyramide, Prisma	3/5	3/5	**0/2**	4/5	1/2	2/2	**0/1**	2/2	4/5	1/1	2/4
Weitere Begriffe	2/5	1/5	**0/2**	1/5	**0/2**	**0/2**	**0/1**	**0/2**	1/5	1/1	**0/4**
Zusammengesetzte aus den o. a.	2/5	2/5	**0/2**	3/5	1/2	1/2	**0/1**	**0/2**	4/5	1/1	2/4
Wurzeln und Quadratzahlen	2/5	2/5	**0/2**	3/5	1/2	2/2	**0/1**	2/2	3/5	1/1	3/4
Verhältnis- u. Mischungsrechnung	4/5	3/5	1/2	4/5	1/2	2/2	1/1	2/2	4/5	1/1	4/4
Satz des Pythagoras (Formelkenntnis und Anwendung)	3/5	3/5	1/2	4/5	1/2	2/2	**0/1**	2/2	5/5	1/1	4/4
Satz des Pythagoras (Begriffe)	2/5	2/5	**0/2**	3/5	1/2	2/2	**0/1**	2/2	5/5	1/1	4/4

14.2.5 Zusätzliche berufsspezifische Kenntnisse und Begriffe

Die Experten haben zu verschiedenen Bereichen noch die folgenden Anforderungen ergänzt:

<u>Weitere Kenntnis von Begriffen und deren Eigenschaften in den Bereichen:</u>

- Mathematische Grundbegriffe allgemein:
    - Exponent, Logarithmus, Wurzel (Tischler)
    - Potenz, Logarithmus (Informationstechniker)
    - multiplizieren, dividieren usw. (Industriemeister Metall, Industriemeister Elektrotechnik)
    - Potenz, Zehnerlogarithmus (Industriemeister Metall)
- Begriffe Geometrie:
    - beliebige Dreiecke (Zimmerer)
    - Kugelabschnitt (Tischler)

<u>Weitere Anforderungen in den Bereichen:</u>

- Flächenberechnung:
    - Kreisausschnitte, Kreisringe, Segmente, Vielecke (Zimmerer)
    - Stichbogen (Tischler)
    - auch anwendungsbezogen (Industriemeister Holz, Industriemeister Elektrotechnik)
- Oberflächenberechnung und Volumenberechnung Körper:
    - Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf (Maurer)
    - auch anwendungsbezogen (Industriemeister Metall, Industriemeister Holz)

14.3 Konkordanzanalyse zur Urteilsübereinstimmung

Für die in Kapitel 7.2.5.4 dargestellten Ergebnisse der Überprüfung der Urteilerübereinstimmung liegen die nachfolgend aufgezeigten Daten und statistischen Vorschriften zugrunde. Die modifizierten Tests, die die Urteiler erhalten haben, werden als Test E1 bis E6 und F1 bis F6 bezeichnet. Die nachfolgende Beschreibung der statistischen Auswertung orientiert sich an Bortz et al. [2008] und ist angelehnt an die projektinterne Dokumentation von Podlogar et al. [2011][67].

Mithilfe der durch die modifizierten Testbögen erhobenen Daten konnte überprüft werden, ob die Rater in ihren Bewertungen übereinstimmen und in wieweit diese Übereinstimmungen signifikant sind. Für eine exemplarische Beschreibung der Anwendung der Formeln und Vorschriften zur Konkordanzanalyse werden in Tabelle 83 die erhobenen Daten für Testbogen E1 zusammengefasst. Anhand dieser Daten wird Urteilerübereinstimmung und deren Signifikanz überprüft. Anschließend wurden die erhobenen Daten der anderen elf modifizierten Testbögen ebenfalls hinzugezogen.

Korrekturstufe		0	1	2	3	4	5	6	7	8	Ges.	
Aufg. i		Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	Anz.	P_i
1	A(E) (a)	0	0	0	0	0	0	0	6	2	8	0,57
2	A(E) (b) (Rech)	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
3	A(E) (c) (Rech)	0	0	0	0	0	0	0	7	1	8	0,75
4	A(E) (d)	0	1	7	0	0	0	0	0	0	8	0,75
5	A(E) (e)	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	1
6	A(E) (f)	0	0	0	0	0	0	0	7	1	8	0,75
7	A(E) (g)	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
8	A(E) (h) (Rech)	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	1
9	A(E) (i) (Rech)	0	1	4	0	3	0	0	0	0	8	0,32

[67] Eine ausführliche Dokumentation aller Ergebnistabellen findet sich in der projektinternen Dokumentation und kann auf Anfrage eingesehen werden.

10	Q(E), a)(1)	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
11	Q(E), a)(2)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
12	Q(E), a)(3)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
13	Q(E), a)(4)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
14	Q(E), a)(5)	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
15	Q(E), b)(1)	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1
16	Q(E), b)(2)	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1
17	P(E), a)	0	0	7	0	1	0	0	0	0	8	0,75
18	P(E), b)	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1
19	P(E), c)	0	0	5	0	3	0	0	0	0	8	0,46
20	P(E), d)	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1
21	P(E), e)(1)	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
22	P(E), e)(2)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
23	P(E), e)(3)	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
24	P(E), e)(4)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
25	D(E), Teil 1	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
26	D(E), Teil 2	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
27	D(E), Teil 3	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
28	D(E), Teil 4	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
29	B(E), Teil a	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
30	B(E), Teil b	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
31	B(E), Teil c	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
32	B(E), Teil d	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
33	B(E), Teil e	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	1
34	B(E), Teil f	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
35	C(E), Sp. 1	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
36	C(E), Sp. 3	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
37	C(E), Sp. 4	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
38	C(E), Sp. 5	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
39	K(E), Teil a	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	1

40	K(E), Teil b	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	1
41	K(E), Teil c	0	0	8	0	0	0	0	0	0	8	1
42	K(E), Teil d	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	1
43	K(E), Teil e	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	1
44	K(E), Teil f	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	1
45	K(E), Teil g	0	0	1	0	0	0	0	6	1	8	0,54
46	K(E), Teil h	0	0	0	0	0	0	0	4	4	8	0,43
47	K(E), Teil i	0	0	0	0	0	0	0	7	1	8	0,75
48	K(E), Teil j	0	0	0	0	0	0	0	7	1	8	0,75
49	K(E), Teil k	0	0	8	0	0	0	0	0	0	8	1
	n_j=	32	66	40	0	7	0	0	92	155		
	p_j=	0,08	0,17	0,1	0	0,02	0	0	0,23	0,4		

Tabelle 83: Urteilserfassung zum modifizierten Testbogen E1.

Zu den Daten aus Tabelle 83:

- Zeilen: Resultate der einzelnen Aufgaben
- Spalten 0 bis 8: Anzahl der Bewertungen zu einer Korrekturstufe
- Spalte P_i: Wahrscheinlichkeit, mit der 2 zufällig ausgewählte Beurteiler dieselbe Bewertung abgeben.

Sei n_{ij} die Anzahl der Beurteiler, die bei der Beurteilung der Aufgabe i die Kategorie j (j = 0, …, 8) gewählt haben, errechnet sich P_i durch folgende Formel (Bortz et al. 2008, S. 455):

$$P_i = \frac{\sum_{j=0}^{8} n_{ij} \cdot (n_{ij} - 1)}{m \cdot (m-1)}$$

Mithilfe der P_i, lässt sich nun ein Durchschnittswert $\overline{P}$ berechnen; dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der 2 zufällig herausgegriffene Beurteiler bei der Beurteilung der Aufgaben übereinstimmen. Im vorliegenden Fall liegt $\overline{P}$ über 90 %, so dass bereits von einer sehr hohen Übereinstimmung auszugehen ist.

Es muss an dieser Stelle einbezogen werden, dass eine Urteilerübereinstimmung auch zufällig zustande kommen kann. Die Spaltensummen lassen Berechnung der Wahlwahrscheinlichkeiten p_j über folgende Formel zu:

$$p_j = \frac{\sum_{i=1}^{49} n_{ij} \cdot \left(n_{ij} - 1\right)}{N \cdot m} \quad mit \begin{cases} p_j : Wahlwahrscheinlichkeit \\ N : Anzahl\ der\ Items \\ m : Anzahl\ der\ Rater \\ n_{ij} : Spaltensummen \end{cases}$$

Mithilfe der Wahlwahrscheinlichkeiten kann anschließend die erwartete Urteilerübereinstimmung $\overline{P}_e$ ermittelt werden. Man erhält nun für die erwartete Urteilerübereinstimmung folgende Formel [vgl. Bortz et al. 2008, S. 456]:

$$\overline{P}_e = \sum_{j=1}^{9} p_j^{\,2}$$

Mit $(1 - \overline{P}_e)$ wird der über den Zufall hinausgehende mögliche Anteil konkordanter Urteile beschrieben. Mit $(\overline{P} - \overline{P}_e)$ wird der über den Zufall hinausgehende und tatsächlich auftretende Anteil konkordanter Urteile bezeichnet. Wird $(\overline{P} - \overline{P}_e)$ durch $(1 - \overline{P}_e)$ relativiert, erhält man den Konkordanzkoeffizienten κ_m:

$$\kappa_m = \frac{\overline{P} - \overline{P}_e}{1 - \overline{P}_e}.$$

Der Konkordanzkoeffizient κ_m ist bei Gültigkeit der Nullhypothese im Grenzfall um Null normalverteilt. Die Varianz von κ_m wird von Fleiss et al. [1969] wie folgt angegeben:

$$VAR(\kappa_m) = \frac{1}{N \cdot m \cdot (m-1)} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j^{\,2} - (2 \cdot m - 3) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} p_j^{\,2}\right)^2 + 2 \cdot (m-2) - \sum_{j=1}^{k} p_j^{\,3}}{\left(1 - \sum_{j=1}^{k} p_j^{\,2}\right)^2}$$

Für den Signifikanztest lässt sich mithilfe von κ_m und der Varianz von κ_m eine Prüfgröße u wie folgt berechnen:

$$u = \frac{\kappa_m}{\sqrt{VAR\left(\kappa_m\right)}}$$

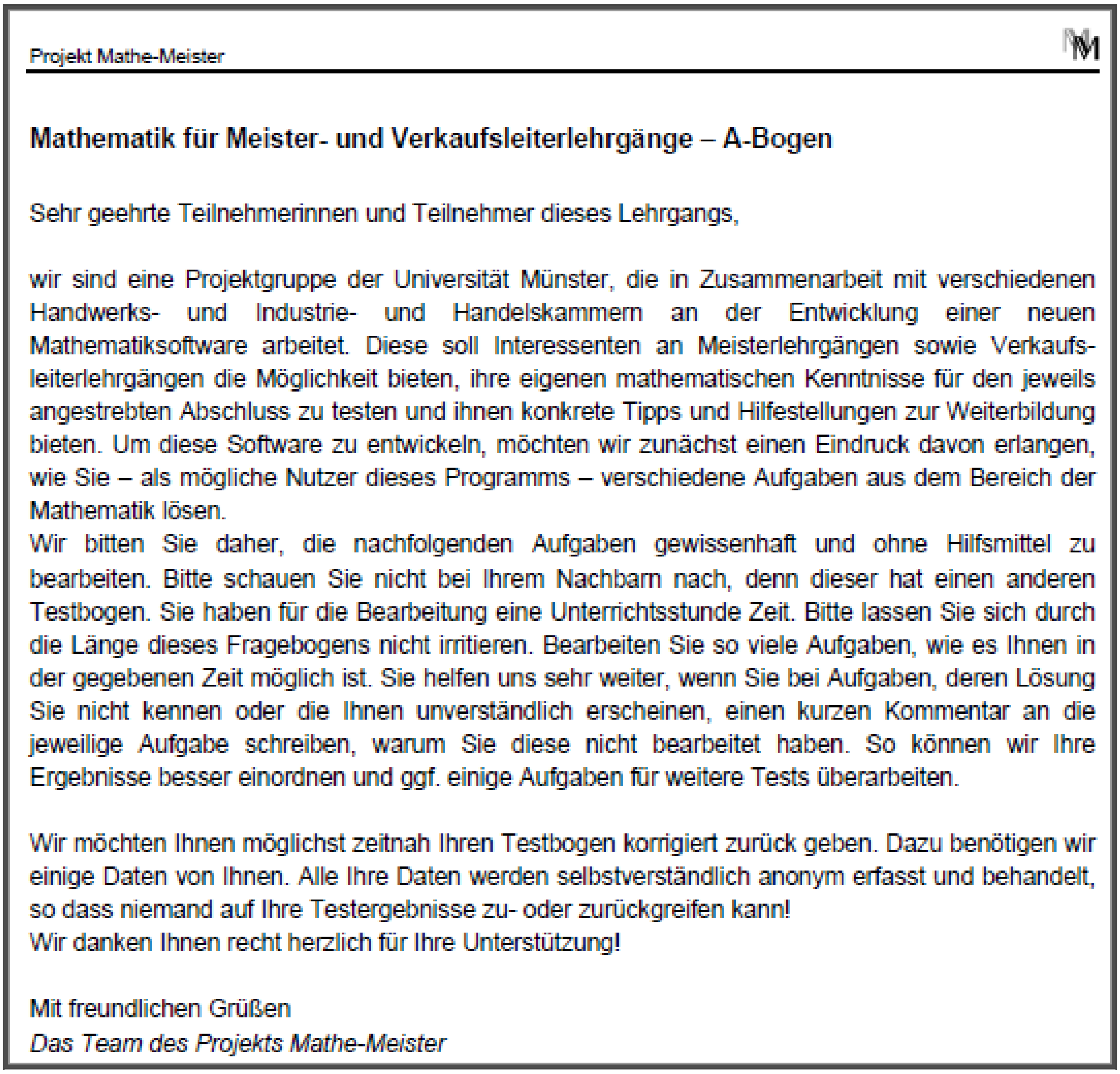
Der für u berechnete Wert ist mit dem Wert der Standardnormalverteilung zu vergleichen. Auf dem 5 %-Niveau ist die Konkordanz signifikant ab einem Wert für u von 1,65. Im vorliegenden Beispiel liegt u über einem Wert von 39 (vgl. Tabelle 84). Damit liegt eine sehr hohe Urteilerübereinstimmung vor. Bei allen anderen elf Tests liegt die Prüfgröße u über einem Wert von 20, so dass auch hier hohe Urteilerübereinstimmungen vorliegen.

N=	49
$\overline{P}$ =	0,914723032
$\overline{P}_e$ =	0,25717149
m=	8
κ_m =	0,885199657
VAR(κ_m)=	0,000490037
u=	39,98774384

Tabelle 84: Ergebnis der Konkordanzanalyse zu Test E1.

14.4 Zu den schriftlichen diagnostischen Tests

14.4.1 Erörterungen und Vorwort



Projekt Mathe-Meister

Mathematik für Meister- und Verkaufsleiterlehrgänge – A-Bogen

Sehr geehrte Teilnehmerinnen und Teilnehmer dieses Lehrgangs,

wir sind eine Projektgruppe der Universität Münster, die in Zusammenarbeit mit verschiedenen Handwerks- und Industrie- und Handelskammern an der Entwicklung einer neuen Mathematiksoftware arbeitet. Diese soll Interessenten an Meisterlehrgängen sowie Verkaufsleiterlehrgängen die Möglichkeit bieten, ihre eigenen mathematischen Kenntnisse für den jeweils angestrebten Abschluss zu testen und ihnen konkrete Tipps und Hilfestellungen zur Weiterbildung bieten. Um diese Software zu entwickeln, möchten wir zunächst einen Eindruck davon erlangen, wie Sie – als mögliche Nutzer dieses Programms – verschiedene Aufgaben aus dem Bereich der Mathematik lösen.
Wir bitten Sie daher, die nachfolgenden Aufgaben gewissenhaft und ohne Hilfsmittel zu bearbeiten. Bitte schauen Sie nicht bei Ihrem Nachbarn nach, denn dieser hat einen anderen Testbogen. Sie haben für die Bearbeitung eine Unterrichtsstunde Zeit. Bitte lassen Sie sich durch die Länge dieses Fragebogens nicht irritieren. Bearbeiten Sie so viele Aufgaben, wie es Ihnen in der gegebenen Zeit möglich ist. Sie helfen uns sehr weiter, wenn Sie bei Aufgaben, deren Lösung Sie nicht kennen oder die Ihnen unverständlich erscheinen, einen kurzen Kommentar an die jeweilige Aufgabe schreiben, warum Sie diese nicht bearbeitet haben. So können wir Ihre Ergebnisse besser einordnen und ggf. einige Aufgaben für weitere Tests überarbeiten.

Wir möchten Ihnen möglichst zeitnah Ihren Testbogen korrigiert zurück geben. Dazu benötigen wir einige Daten von Ihnen. Alle Ihre Daten werden selbstverständlich anonym erfasst und behandelt, so dass niemand auf Ihre Testergebnisse zu- oder zurückgreifen kann!
Wir danken Ihnen recht herzlich für Ihre Unterstützung!

Mit freundlichen Grüßen
Das Team des Projekts Mathe-Meister

Abbildung 47: Einleitende Worte zur Erörterung der Zielsetzung des Tests gegenüber den Probanden.

14.5 Beispiele von Quotenausprägungen einzelner Itemblöcke

Nachfolgend werden einige Itemblöcke und Items exemplarisch auf quantitativer Basis verglichen.

In Test A und E gibt es im Bereich der Arithmetik einen identischen Itemblock. Dieser beinhaltet Aufgaben zur Anwendung von Rechengesetzen in der Menge der natürlichen Zahlen und Aufgaben zum Rechnen mit Einheiten (vgl. Tabelle 85):

A_A a)	$127-35\cdot 2=$		A_A h)	$5{,}7kg+2{,}46kg=$
A_A d)	$(17+123)-(-20\cdot 2)=$		A_A b)	$4\cdot 2{,}2m=$
A_A e)	$3\cdot(700+12)=$		A_A c)	$6\cdot 4{,}312m=$
A_A f)	$[48:(12-4)]\cdot 5=$		A_A i)	$0{,}8m\cdot 6m=$
A_A g)	$456:8=$			

Tabelle 85: Identischer Itemblock (Test A und E, beide Hauptprobandengruppen) zu Rechengesetzen und dem Rechnen mit Einheiten.

Auf die Aufgaben zum Rechnen mit Einheiten wurden entsprechend der Korrekturvorschriften zwei Korrekturen angewendet: einmal die Beurteilung der Rechnung und einmal der Einheitenangabe im Ergebnis (vgl. Kapitel 7.2.5.1). Die Ermittlung der Quoten für jedes einzelne Item zeigt in der direkten Gegenüberstellung hinsichtlich der Lösungsquoten Unterschiede zwischen null und sechs Prozentpunkten, die nicht signifikant[68] sind. Signifikante Unterschiede zeigen sich nur bei zwei Aufgaben (vgl. Tabelle 86, Markierung). Bei beiden handelt es sich um eine Multiplikation mit einer Dezimalzahl aus der Kategorie „Rechnen mit Einheiten". Auffällig ist hier, dass die Gruppe der Meisterschüler bei beiden Aufgaben um ca. 10 Prozentpunkte höhere Lösungsquoten erzielt und dies bei nicht signifikant unterschiedlichen Bearbeitungsanteilen. D. h., dass Schüler der allgemeinbildenden und Berufsbildenden Schulen bei diesen Aufgaben deutlich mehr Fehler machen. Um der diagnostischen Betrachtung vorzugreifen: Bei der Analyse der Fehlerphänomene zeigen sich keine inhaltlichen Unterschiede.

Eine Vermutung für dieses deutlich bessere Abschneiden der Meisterschüler bei diesen Items liegt in der Anwendungsbezogenheit der Aufgaben. Das Rechnen mit Einheiten und Dezimalzahlen – ohne Taschenrechner(!) – werden Gesellen im Berufsleben wesentlich häufiger anwenden müssen. Bei der

68 Signifikanzniveau bei $\alpha = 0.05$. Ermittlung der Unterschiede über Chi-Quadrat-Test für (vgl. Ausführungen in Kapitel 8.5.2).

Ermittlung der Quoten über den gesamten Itemblock zeigt sich deutlich, dass diese insgesamt nicht signifikant voneinander abweichen (vgl. Tabelle 86, letzte Spalte). Diese Übereinstimmungen und ebenso die Abweichungen zeigen sich vergleichbar bei den Arithmetikblöcken in den Tests B und F (vgl. Tabelle 87).

Aufgabe & Korrekturschema	**Meisterschüler (n = 163)**			**Andere Schüler (n = 749)**		
	n. b.	**falsch**	**richtig**	**n. b.**	**falsch**	**richtig**
A_A a)	0,0%	25,2%	74,8%	0,4%	27,5%	72,1%
A_A b) Rechnung	0,0%	4,9%	95,1%	0,6%	6,7%	92,7%
A_A b) Einheit	14,1%	0,6%	85,3%	9,2%	0,4%	90,4%
A_A c) Rechnung	5,5%	22,1%	72,4%	10,0%	27,9%	62,1%
A_A c) Einheit	36,8%	0,0%	63,2%	40,4%	2,3%	57,3%
A_A d)	4,3%	46,0%	49,7%	3,7%	30,4%	65,9%
A_A e)	1,2%	8,6%	90,2%	1,2%	13,6%	85,2%
A_A f)	5,5%	12,3%	82,2%	9,7%	12,6%	77,7%
A_A g)	4,9%	14,7%	80,4%	8,5%	14,6%	76,9%
A_A h) Rechnung	0,6%	5,5%	93,9%	2,3%	10,4%	87,3%
A_A h) Einheit	18,4%	0,6%	81,0%	12,6%	0,3%	87,1%
A_A i) Rechnung	3,1%	13,5%	83,4%	4,5%	23,4%	72,1%
A_A i) (Einheit)	20,9%	54,6%	24,5%	19,8%	62,2%	18,0%
Spaltendurchschn.	**8,9%**	**16,0%**	**75,1%**	**9,4%**	**17,9%**	**72,7%**

Tabelle 86: Gegenüberstellung der Quoten der Probandengruppen Test A und Test E zum identischen Itemblock Arithmetik.

Aufgabe & Korrekturschema			Meisterschüler (n = 135)				Andere Schüler (n = 741)		
			n. b.	falsch	richtig		n. b.	falsch	richtig
A_B c) Rech.	$5 \cdot 2{,}61m =$		2,9%	21,5%	75,6%		6,6%	27,3%	66,1%
A_B h) Rech.	$0{,}7\,m \cdot 7 =$		2,9%	11,9%	85,2%		4,3%	25,5%	70,2%
A_B h) Einheit	$0{,}7\,m \cdot 7 =$		14,1%	0,7%	85,2%		18,4%	1,2%	80,4%

Tabelle 87: Gegenüberstellung der Quoten der Probandengruppen Test B und Test F, Auszüge aus dem identischen Itemblock Arithmetik.

Beim Rechnen mit Potenzen wiederum liegen die Defizite deutlich mehr auf Seiten der Meisterschüler. In den Testbögen B und F sind hierzu identische Itemblöcke verankert. Einzelne Items hieraus finden sich ebenfalls auch in den anderen Testbögen und zeigen gleiche Ergebnisse. So liegen hier beim Rechnen mit Potenzen oder auch nur dem Ausrechnen einer Potenz die Lösungsquoten der Meisterschüler signifikant unter denen der anderen Schülergruppe. Die Fehlerquoten liegen signifikant höher. (vgl. Tabelle 88)

Aufgabe & Korrekturschema			Meisterschüler (n = 135)				Andere Schüler (n = 741)		
			n. b.	falsch	richtig		n. b.	falsch	richtig
B_B b)	2^5		5,2%	37,0%	57,8%		3,6%	24,7%	71,7%
B_B d)	10^4		7,4%	35,6%	57,0%		2,4%	25,3%	72,3%
B_B e)	$5 \cdot 2^3$		5,9%	37,1%	57,0%		2,0%	26,2%	71,8%
B_B f)	$5^2 \cdot 4$		4,4%	28,2%	67,4%		2,3%	14,7%	83,0%

Tabelle 88: Gegenüberstellung der Quoten der Probandengruppen Test B und Test F, Auszüge aus dem identischen Itemblock Algebra, konkret „Rechnen mit Potenzen“.

Signifikante Unterschiede in den Lösungsquoten zeigen sich zwischen den beiden Probandengruppen Meisterschüler und Schüler anderer Schulformen außerdem im Bereich der Anwendungen des Dreisatzes bspw. bei folgender Aufgabe, die in den Testvarianten C und E gestellt wird:

In einer Lebensmittelfabrik werden täglich 200 l Lebensmittelfarbe verarbeitet. Mit dem Lagervorrat kann die Fabrik dann 12 Werktage produzieren. Wie viele Werktage reicht der Vorrat aus, wenn täglich 100 l, 300 l, 400 l bzw. 600 l verarbeitet werden?

Tägliche Verarbeitung	*100 l*	*200 l*	*300 l*	*400 l*	*600 l*
Anzahl Werktage		*12*			

Hier weisen die Meisterschüler weitaus höhere Lösungsquoten auf, die sich bei den vier Teilberechnungen der Aufgabe (für 100l, 300l etc.) zwischen 14 und 23 Prozentpunkten von denen der anderen Schülergruppe unterschieden. Beiden Probandengruppen sind jedoch die insgesamt hohen Fehlerquoten gemein, die durchschnittlich bei 59,1 % (Meisterschüler) und 70,4 % (andere Schüler) liegen.

Besonders hohe Unterschiede hinsichtlich der Lösungsquoten lassen sich in einem weiteren Bereich des Grundblocks, der Bruchrechnung, finden. Hier schneiden die Schüler anderer Schulformen deutlich besser ab. Insbesondere bei Bruchaufgaben zur Division liegen die Lösungsquoten der Meisterschüler durchschnittlich nur bei 39,8 %, bei den anderen Schülern bei durchschnittlich 60,6 %. Auffällig ist jedoch, dass die Meisterschüler durchschnittlich nicht signifikant höhere Fehlerquoten aufweisen, sondern die Aufgaben eher gar nicht bearbeiten. Die Nichtbearbeitungsanteile liegen durchschnittlich bei der Division von Brüchen bei 42,4 % (Meisterschüler) und 21,2 % (andere Schüler).

Es zeigt sich also bereits bei einem Vergleich der Grundblockitems eine Bestätigung der zu Anfang dieses Kapitels aufgestellten Hypothese, die Quoten der Tests nicht aufsummiert über die Gesamtbögen auf statistische Unterschiede hin zu untersuchen. Damit wird auch die Testkonstruktion darin bestätigt, identische Testitemblöcke in den verschiedenen Testvarianten zu Vergleichszwecken einzubinden.

In den vom Grundblock abhängigen, anspruchsvolleren Itemblöcken zu linearen und quadratischen Gleichungen oder dem Umstellen von Formeln zeigen sich ebenfalls signifikante Unterschiede zwischen den Probandengruppen. Hier wird vor allem deutlich, dass beide Gruppen dazu neigen, diese Aufgaben eher gar nicht zu bearbeiten. Beim Bearbeiten der Aufgaben zur Formelumstellung waren die Nichtbearbeitungsanteile besonders hoch, wie Tabelle 89 verdeutlicht. Ein Abgleich mit der miterfassten Bearbeitungszeit zeigt, dass dies nicht an einem Zeitmangel liegen kann. Ein Großteil der Probanden beider Gruppen hat für die gesamte Testbearbeitung nur zwischen 20 und 35 Minuten Zeit investiert.

Besonders schlecht fallen die Ergebnisse bei Aufgaben mit quadratischen Gleichungen aus. Insbesondere sobald die Gleichung von der Normalform abweicht, werden die Aufgaben von Meisterschülern kaum noch bearbeitet. Die andere Schülergruppe zeigt noch Lösungsansätze, gelangt aber auch verhältnismäßig selten zu einem korrekten Ergebnis.

Aufgabe	**Meisterschüler (n = 135)**			**Andere Schüler (n = 741)**		
	n. b.	**falsch**	**richtig**	**n. b.**	**falsch**	**richtig**
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, umstellen nach a	40,0%	51,9%	8,1%	39,3%	59,8%	0,9%
$a = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2}$ umstellen nach z_1	48,9%	25,2%	25,9%	56,4%	27,5%	16,1%“
$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2}$ Umstellen nach d_1	40,0%	23,0%	37,0%	49,1%	23,1%	27,8%
$V = \frac{A \cdot h}{3}$ umstellen nach h	34,8%	18,5%	46,7%	45,7%	22,0%	32,3%
$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ umstellen nach R_1	56,3%	42,2%	1,5%	64,2%	35,4%	0,4%

Tabelle 89: Gegenüberstellung der Quoten der Probandengruppen Test B und Test F, Auszüge aus dem identischen Itemblock Algebra, konkret: „Formelumstellungen“.

Bogen Probandengruppe	Aufgabe J	n. b.		Falsch		richtig	
Test B (n = 135) Meisterschüler	$2z^2+4z-126=0$	72	53,3%	62	45,9%	1	0,8%
Test C (n = 156) Meisterschüler	$2z^2+4z-126=0$	96	61,5%	60	38,5%	0	0,0%
Test F (n = 741) Andere Schüler	$2z^2+4z-126=0$	249	33,6%	438	59,1%	54	7,3%

Tabelle 90: Quotenvergleich zur Lösung einer quadratischen Gleichung.

14.6 Beispiele für Rechen- und Fehlertypenlisten

14.6.1 Fehler- und Rechentypenliste zu Aufgabe D_A Teil3

Fehlertypen	Anzahl	Rechentypen	Anzahl
= 1,6dm	11	= 160dm	116
= 1600dm	8	10cm 1dm 10dm 1m = 160dm	1
= 16000dm	6		
= 32dm	2		
= 16dm	2		
= 160000dm	1		
= 0,16dm	1		
= 0,0016dm	1		

14.6.2 Fehler- und Rechentypenlisten zu Aufgabe I_A a) $(2x+3y)^2$

14.6.2.1 Bogen A, Meisterschüler, n = 163

Fehlertypen	**Anzahl**	**Rechentypen**	**Anzahl**
$4x+9y$	12	$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x^2+12xy+9y^2$	2
$4x^2+9y^2$	12	$4x^2+12xy+9y^2$	1
$4x+6y$	10	$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x^2+(6xy+6xy)+9y^2$	1
$2x^2+3y^2$	7	$2x+3y \cdot 2x+3y$ $= 4x^2+12xy+9y^2$	1
$25xy$	7	$4x^2+6xy+6xy+9y^2$ $= 4x^2+12xy+9y^2$	1
$4x^2-12xy+9y^2$	3	$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x^2+6xy+6xy+9y^2$ $= 4x^2+12xy+9y^2$	1
$(2x+3y)(2x+3y)$	3		
$10xy$	2		
$2x \cdot 2x + 3y \cdot 3y$ $= 4x+9y$	2		
$5xy^2$	2		
$2x+3y \cdot 2x+3y$	2		
$2x+3y^2$	2		
$(5xy)^2$	2		
10	2		
$36y$	1		
$25xy^2$	1		

$4x^2+2x3y+3y+2x+9y^2$ $= 4x^2+4x+6y+9y^2$	1	
$4x+6y= 10xy$	1	
$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x+12xy-9y$	1	
$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x^2+6xy+9y^2$	1	
$2x+3y\cdot 2$	1	
$-1xy$	1	
$\sqrt{}[2x+3y]$	1	
$2^2x^2+3^2y^2= 4x^2+9y^2$	1	
$2x^2+3y^2+2xy$	1	
6	1	
50xy	1	
$10xy^2$	1	
$2xy+3xy$	1	
$(x+x+y+y+y)^2$	1	
$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 2\cdot 2x^2+2\cdot 3y^2$	1	
$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x^2+4x6y+9y^2$	1	
(5xy) 10xy	1	
14xy	1	

14.6.2.2 Bogen B, Meisterschüler, n = 135

Fehlertyp	**Anzahl**	**Rechentyp**	**Anzahl**
$4x+9y$	14	$4x^2+12xy+9y^2$	6
$2x^2+3y^2$	13	$(2x+3y)(2x+3y)= 4x^2+12xy+9y^2$	2
$5xy^2$	3		
$4x+6y$	3		
$2x\cdot 2x+3y\cdot 3y$	4		
5^2	2		
$4x^2+6y^2$	1		
$\sqrt{}[2x+3y]$	4		
$4x^2+25xy+9y^2$	1		
$36xy$	1		
$2x+9y$	1		
$2x+6y$	1		
$5xy^2= 25xy^2$	2		
$10xy$	1		
$2x+3y\cdot 2x+3y= 4x+3y$	1		

14.6.2.3 Bogen C, Meisterschüler, n = 156

Fehlertypen	**Anzahl**	**Rechentypen**	**Anzahl**
$4x^2+9y^2$	12	$4x^2+6xy+6xy+9y^2$ $= 4x^2+12xy+9y^2$	4
$2x^2+3y^2$	10	$4x^2+12xy+9y^2$	4
$5xy^2$	7	$(2x+3y)(2x+3y)$ $= 4x^2+12xy+9y^2$	3
$4x+9y$	7	$(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$	2

$4x+6y$	5		
$2x^2+12xy+3y^2$	4		
$\sqrt{[2x+3y]}$	3		
$2x \cdot 2x+3y \cdot 3y = 4x+9y$	3		
$4x^2+6y^2$	2		
$2 \cdot 2x+3 \cdot 3y$	2		
$2x+3y \cdot 2x+3y$	2		
$2x^2+(4x \cdot 6y)+3y^2$	2		
$6x+9y$	1		
$4x+12y$	1		
$4x+9y+8x+6y$	1		
$62x^2+3y^2$	1		
$(2x+3y)(2x+3y)= 4x^2+9y^2$	1		
$4x^2+25xy+9y^2$	1		
$8x+12y$	1		
$25xy^2$	1		

14.6.3 Rechen- und Fehlertypenliste zur Aufgabe K_A e)

14.6.3.1 Meisterschüler, Bogen A, n = 163

Aufgabenterm: $\frac{8}{6} \cdot \frac{3}{2}$

Fehlertypen	**Anzahl**	**Rechentypen**	**Anzahl**
$= \frac{8}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{72}{6}$	5	$= \frac{24}{12} = 2$	34
$= \frac{24}{12} = \frac{12}{1} = 12$	3	$= 2$	15
$= \frac{18}{12} = 1\frac{6}{12} = 1\frac{3}{4}$	2	$= \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{6} = \frac{72}{36}$	4

$\frac{18}{16}=1\frac{2}{16}$	2	$=\frac{24}{12}$	3
$\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$	2	$=\frac{24}{12}=\frac{2}{1}=2$	2
$=\frac{24}{12}=3$	1	$=\frac{24}{12}=\frac{12}{6}=\frac{2}{1}$	1
$=\frac{16}{18}$	1	$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$	1
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}$	1	$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$	1
$\frac{2}{4}$	1		
$\frac{24}{12}=3\frac{4}{2}$	1		
12	1		
$2\frac{2}{6}=\frac{14}{6}$	1		
$\frac{24}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{72}{2}=\frac{36}{1}=36$	1		
$\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{72}{6},22$	1		
$\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}=8$	1		
228	1		
$\frac{24}{12}=\frac{3}{2}$	1		
$\frac{24}{8}=3$	1		
$\frac{24}{2}$	1		
$\frac{18}{12}$	1		
$\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{6}=\frac{84}{36}=2\frac{12}{36}$	1		
$\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{42}{6}$	1		

$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$	1	

14.6.3.2 Rechentypenlisten Hauptschule, Gymnasium

Aufgabenterm: $\frac{8}{6} \cdot \frac{3}{2}$

Rechentypenlisten mit detaillierter Differenzierung der Lösungswege.

Rechentyp	**Schulform: GYM Jhgst. 9 n = 119**	**Schulform: HS Jhgst. 10 n = 112**
$= 2$	1	2
$= \frac{24}{12} = 2$	14	17
$= \frac{24}{12} = \frac{2}{1} = 2$	3	2
$= \frac{8}{4} = 2$	1	-
$= \frac{4}{2} = 2$	1	-
$= \frac{4}{2}$	1	-
$= \frac{24}{12} = \frac{4}{2} = 2$	-	1
$= \frac{24}{12} = 1\frac{12}{12} = 2$	-	2
$= \frac{24}{12} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$	1	-
$= \frac{24}{12} = \frac{2}{1}$	2	1
$= \frac{24}{12} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$	1	-
$= \frac{24}{12}$	4	7
$= \frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{4}{2} = 2$	1	7

$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=2$	1	-
$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}$	1	3
$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{24}{12}=2$	-	1
$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$	-	1
$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$	1	-
$=\frac{8}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{2}=\frac{8}{4}=2$	1	-
$=\frac{8}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{2}=\frac{8}{4}$	-	1
$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$	1	-
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{72}{36}=2$	1	-
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{72}{36}$	1	-

14.6.3.3 Fehlertypenlisten Hauptschule, Gymnasium

Aufgabenterm: $\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}$

Fehlertyp	Schulform: GYM Jhgst. 9 n = 119	Schulform: HS Jhgst. 10 n = 112
$=\frac{24}{12}=12$	1	-
$=\frac{24}{12}=2\frac{1}{12}$	-	1

$=\frac{24}{12}=\frac{6}{3}$	-	1
$=\frac{24}{12}=\frac{12}{1}=12$	1	-
$=\frac{24}{12}=3$	-	1
$=\frac{18}{12}=1\frac{6}{12}=1\frac{3}{6}=1\frac{1}{2}$	1	-
$=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{2}=0{,}5$	-	1
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{81}{6}=14\frac{1}{6}$	1	-
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}=\frac{72}{6}$	1	-
$=\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{6}=\frac{72}{36}=2\frac{10}{36}$	-	1
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{3}=\frac{72}{18}=\frac{8}{2}=\frac{4}{1}$	1	-
$=\frac{8}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{18}$	-	1
$=\frac{16}{18}$	2	-
$=\frac{11}{8}$	1	-
$=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$	-	1
$=\frac{12}{25}$	-	1

14.6.4 Typenlisten zur Aufgabe J_A a)

Aufgabenterm: 3a+5= 26

Fehlertypen	Anzahl	Rechentypen	Anzahl
3a+5= 26 |-5 3a= 21	5	3a+5= 26 |-5 3a= 21 |:3 a= 7	52
3a+5= 26 |:3 a+5= 26/3 |+5 a= [26+5]/3 = 26/3 + 15/3 = 42/3	1	7	13
3a+5= 26 |-5 3a= 21 |:7 a= 3	1	3·7+5= 26	10
21	1	3·7+5	7
3a+5= 26 |-5 3a= 26:3 a= 8,66	1	26-5= 21 a= 7	8
a= 26-5+3	1	3a= 26-5 3a= 21 a= 7	6
8a= 26	1	26-5= 21 21:3= 7 a= 7	5

3a+5= 26 a+5= 23 a= 23-5 a= 18	1	[26-5]/3= 7	4
		3a+5= 26 |:3 a+5= [26-5]/3 |-5 a= 7	1
		3a= 21 |:3 a= 7	1
		a+5= 26/3 a= [26-5]/3 a= 21/3 a= 7	1

14.6.5 Typenlisten zur Aufgabe J_A d)

Aufgabenterm: z^2-2z-15= 0

Fehlertypen	Anzahl	Rechentypen	Anzahl
z^2-2z-15= 0 |√ z-2z-15= 0 |+15 z-2z= 15 -z= 15 |·(-1) z= 15	4	z= 5	4
z^2-2z= 15 z= 17	3	25·10= 15 z= 5	3
z^2-2= 15 z= 3	3	5^2-2·5-15= 0 = 5	3
z·z-2z= 15 1z-2z= 15 -1z= 15 z= -15	2	z^2-2z= 15 z= 5	3
z^2-2z-15= 0 |+15 z^2-2z= 15 |+2 z^2= 17 |√	2	(z-5)(z+3) z= 5, z= -3	1
z^2-2z-15= 0 |:2 z-2z-15= 0 3z-15= 0 |+15 3z= 15	2	$0=z^2-2z-15$ $z_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ $=1\pm\sqrt{(1)^2-15}$ $z_1=1+\sqrt{16}=1+4=5$	1

$3z^2= 15$ $-z^2= 18$ $-z^2= \sqrt{18}$ $-z= 4{,}55$, $z= -4{,}55$	1	$(-3\cdot -3)\cdot(-2\cdot -3)= 15$ $9\cdot 6= 15$ $z= -3$	1
$z^2-2z= 15+2z$ $z^2= \sqrt{[17z]}$ $z= 4{,}123$	1		
$z^2-2z+1-1-15= 0$	1		
$z^2-2z-15= 0 \quad \vert +15$ $z^2-2z= 15 \quad \vert :2$ $= 7{,}5$ $z= 7{,}5$	1		
$z\cdot z-2z-15= 0 \quad \vert +2z$ $+15$ $4= 2z+15 \quad \vert -15$ $-11= 2z \quad \vert :2$ $z= 5{,}5$	1		
$z^2-2z= 15 \quad \vert +2z$ $z^2= 15+2z \quad \vert :z$ $z= [15+2z] \quad \vert z$ $z= 17$	1		
$z^2-2z-15= 0 \quad \vert +15$ $z^2-2z= 15 \quad \vert :2$ $z^2-2 = 7{,}5 \quad \vert :3$ $z= 2{,}5$	1		
17	1		
$8{,}5^2-2\cdot 15= 0$	1		
$11^2-2\cdot 9-15= 0$	1		

z^2-2z= 15 z^2= 15-2z z= 13	1		
z= 0+15+4= 3 z= 19/3= 6,33	1		
$z \cdot z$-2z-15= 0 $z \cdot z$-2z= 15	1		