Kathrin WINTER, Hildesheim

Rechenfertigkeiten in der Bruchrechnung – Unterschiede in Schulformen und Klassenstufen

Dieser Artikel bildet einen Teil der Vorstellungen erster Ergebnisse aus der Studie ERaB des Institutes für Mathematik und Angewandte Informatik an der Universität Hildesheim. Die Studie ist ein gemeinsames Projekt der Autorin mit Dr. M. Hennecke [vgl. 1].

1. Einführung

Nationale und internationale Studien belegen seit Jahrzehnten immer wieder, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten bei der Durchführung von Rechenoperationen mit Bruchzahlen haben. Die mathematikdidaktische Forschung beschäftigt sich schwerpunktmäßig mit der Erforschung von Fehlern und Fehlerursachen in der Bruchrechnung. Groß angelegte Studien bilden dabei bis heute die Ausnahme und basieren in der Regel auf den Ergebnissen geschlossener Fragestellungen. Ebenso gibt es nur wenige umfangreiche Untersuchungen den Schulform- und Jahrgangsstufenvergleich betreffend oder solche, die korrekte Rechenstrategien analysieren und vergleichen.

Im Rahmen der Studie ERaB wird untersucht, wie sich Rechenfertigkeiten und Bruchzahlverständnis in Abhängigkeit von Faktoren wie unter anderem Schulform oder Geschlecht in einzelnen Jahrgangsstufen verteilen. Obwohl die Bruchrechnung in den untersuchten Schulformen zu den grundlegenden Rechenfertigkeiten zählt, zeigen sich in diesem Bereich deutliche, schulformspezifische Unterschiede in den Rechenstrategien der Schülerinnen und Schüler gleicher Jahrgangsstufen, wie auch in einer Schulform in verschiedenen Jahrgangsstufen.

Die ERaB-Studie verfolgt nicht das Ziel einer lückenlosen Ursachenforschung und Problembehebung. Sie ist der Grundlagenforschung zuzuordnen und dient in erster Linie einer umfangreichen und detaillierten Erfassung verschiedener Phänomene in der Bruchrechnung. Dabei wird insbesondere Wert darauf gelegt, nicht nur die Ergebnisse von Schülerrechnungen zu betrachten, sondern vor allem die Rechenwege, d. h. jeden einzelnen Rechenschritt eines Schülers.

2. Datenbasis

Die hier vorgestellten Beispiele basieren auf den Daten der ersten Erhebung der ERaB-Studie am Ende des Schuljahres 2006 in Haupt- und Realschulen und Gymnasien Niedersachsens. Insgesamt umfasste die erste Erhebung 7601 Schülerinnen und Schüler der drei hier vorgestellten Schulformen sowie Integrierter Gesamtschulen und Förderschulen in einem Pseudo-Längsschnitt. Hinzu kamen 597 Studierende verschiedener Semester und Studiengänge der Universität Hildesheim. Die Erhebung erfolgte durch einen schriftlichen Test- und Fragebogen, wobei 40 Bögen[1] identisch in allen Schulformen und Jahrgangsstufen verwendet wurden.

3. Rechenfertigkeiten

In der ERaB-Studie liegt ein besonderes Augenmerk auf den Rechenwegen und Rechenschritten zu verschiedenen Aufgabenstellungen. Um eine Einordnung dieser von Schülerinnen und Schülern notierten Rechenwege zu ermöglichen, ist es hilfreich, vorab die Lösungsquoten sowie den Anteil nicht bearbeiteter Aufgaben zu betrachten. Der Vergleich der Lösungsquoten über alle Rechenaufgaben beider Testbögen zeigt einen (erwarteten) signifikanten Leistungsunterschied zwischen den einzelnen Schulformen (vgl. Abbildung 1).

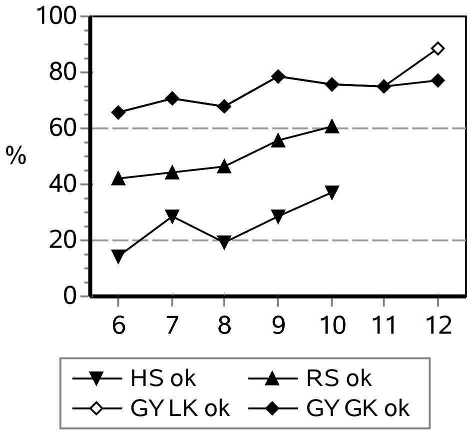


Abbildung 1: Erfüllungsquoten über alle Rechenaufgaben.

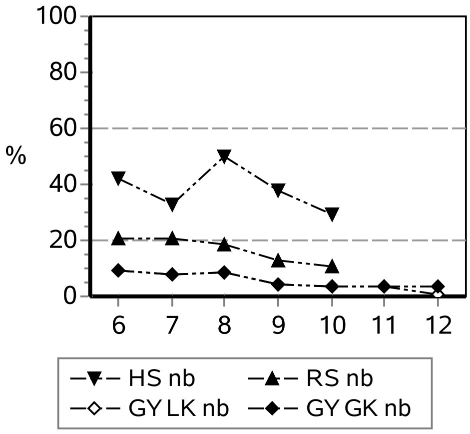


Abbildung 2: Nichtbearbeitungsquoten über alle Rechenaufgaben.

Mit einer Lösungsquote von 65,7 % und einem Nichtbearbeitungsanteil von 9,4 % liegt die Fehlerquote im Gymnasium (6. Jhg.) bei 23,6 %. Die höchste Lösungsquote erreichen die Schülerinnen und Schüler der Gymnasien aus dem 9. Schuljahrgang mit 78,4 %. Auffällig ist ein starker Zuwachs korrekter Lösungen in allen drei Schulformen am Ende des 9. Schuljahres. Im Gymnasium nimmt die Lösungsquote nur in den Leistungskursen des 12. Jahrgangs nochmals zu.

Die Analyse von Rechenwegen zeigt differenziert unterschiedliche Rechenstrategien zwischen Schulformen und Klassenstufen auf. Am Beispiel des Rechnens mit Bruchzahlen in gemischter Schreibweise – die immer noch in allen Schulformen Unterrichtsinhalt sind – wird dies exemplarisch darge-

[1] Zum Testdesign vgl. man die in Vorbereitung befindliche Dissertation der Autorin.

stellt. Dem Addieren von Bruchzahlen in gemischter Schreibweise liegen zwei grundsätzlich verschiedene Rechenstrategien zugrunde: 1. Das Umwandeln der Bruchzahl in gemischter Schreibweise vor dem Addieren (mU) und 2. das Beibehalten der gemischten Schreibweise (oU). D. h., die Aufgabe $\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}=$ wird über zwei[2] grundlegend unterschiedliche Strategieansätze bearbeitet:

Weg 1 (mU) $\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{35}{15}=\frac{41}{15}$ oder Weg 2 (oU) $\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+2\frac{5}{15}=2\frac{11}{15}$

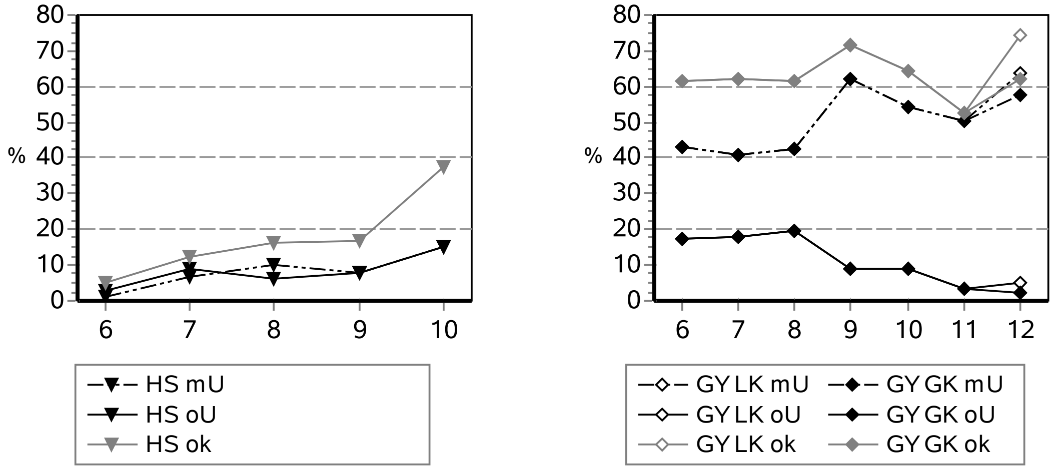


Abbildung 3a und 3b: Verteilung der Rechenwege mit Umwandlung und ohne Umwandlung gemischter Schreibweisen sowie Lösungsquote zur Aufgabe $\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}=$.

Die unterschiedlich häufige Verwendung dieser zwei grundlegend verschiedenen Rechenstrategien wird in den Abbildungen 3a und 3b dargestellt (im Vergleich teilnehmende Hauptschulen und Gymnasien). In der Hauptschule finden beide Strategien durchgehend ihre Anwendung und ihre Anteile unterschieden sich nicht signifikant. Im Gymnasium jedoch zeichnet sich ein anderes Bild ab. Der Anteil der Rechenwege mit Beibehaltung der gemischten Schreibweise liegt bei nur 17,5 % im 6. Schuljahr, im Vergleich dazu liegt der Anteil der Rechenwege mit Umwandlung vor dem Addieren bei 42,9 %. Bis zum 8. Jahrgang ändern sich diese Anteile kaum. Ab dem 9. Jahrgang fällt der Anteil der Rechenwege ohne Umwandlung um fast 10,5 Prozentpunkte auf 9 % ab und um weitere 6,1 Prozentpunkte im 11. Jahrgang. Mit durchschnittlich ca. 4 % scheint er ab dem 11. Jahrgang nahezu bedeutungslos. Dahingegen nimmt der Anteil der Rechenwege mit Umwandlung der gemischten Schreibweise entsprechend zu.

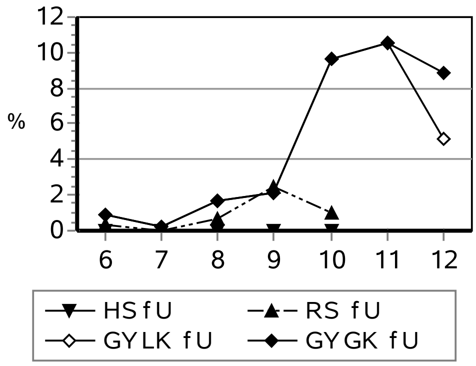
Ebenso zeigen sich auch deutliche Unterschiede zwischen Schulformen und Klassenstufen bei der Betrachtung typischer Fehler. Ab dem

[2] Der Übersichtlichkeit halber erfolgt hier eine Reduktion auf die zwei am häufigsten auftretenden Rechenwege ohne ihre Varianten weiter explizit zu differenzieren.

10. Jahrgang tritt bspw. in den Gymnasien die fehlerhafte Umwandlung gemischter Schreibweisen in unechte Bruchzahlen durch Multiplikation anstatt Addition zunehmend auf. Die Schülerinnen und Schüler rechnen:

$2\frac{1}{3} = 2\ \frac{1}{3} = \frac{2\ 1}{3} = \frac{3}{3}$ (f U) anstatt korrekt: $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$.

Dieser Fehler zur Aufgabe $\frac{2}{5} + 2\frac{1}{3} =$ wird von 9,6 % der Schülerinnen und Schüler in Jahrgang 10 und 10,5 % in Jahrgang 11 notiert, wohingegen er mit 2,5 % im 9. Schuljahr der Realschulen sein dortiges Maximum erreicht. In der Hauptschule ist er ohne Bedeutung. (vgl. nebenstehende Abbildung)



3. Zusammenfassung

Die hier vorgestellten Beispiele ermöglichen einen ersten Eindruck davon, wie unterschiedlich korrekte und fehlerhafte Rechenwege in verschiedenen Schulformen und Jahrgangsstufen ausgeprägt sind. Das Vorgehen bei der Lösung von Rechenaufgaben mit Bruchzahlen in gemischter Schreibweise unterscheidet sich im Vergleich der Schulformen in verschiedenen Bereichen sehr deutlich. So spielen z. B. Rechenstrategien und auch Fehlerstrategien, die im Gymnasium vorherrschen und in höheren Jahrgängen zunehmen, in der Hauptschule eine untergeordnete oder keine Rolle. Eine Schulform und Jahrgangsstufen unterscheidende Diagnostik erscheint daher sinnvoll.

Literatur

[1] Hennecke, M.: Fehlerdiagnostische Auswertungen in der Bruchrechnung. Beiträge zum Mathematikunterricht, 2007.