Aufgabe 1

Sei f eine Funktion definiert durch $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 1 - \frac{1}{x}$.

(i) Man zeige, dass $f \circ f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

(ii) Man zeige, dass f bijektiv $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ abbildet, also eine bijektive Funktion ist.

(iii) Man bestimme f^{-1}.

(iiii) Nach (i) gilt $f \circ f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, aber offenbar ist $f \circ f \neq id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Man gebe eine weitere bijektive Funktion g auf einer Menge A so an, dass auch $g \circ g \circ g = id_A$ und $g \circ g \neq id_A$ gilt. Kann dabei A endlich sein?

A1. $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$x \to f(x) := 1 - \frac{1}{x}$

a. Behauptung: $f \circ f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Es gilt $f \circ f \circ f$.

Dann gilt: $f(f(f(x))) = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)} = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{\frac{-x}{1-x}}\right)} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{+x}\right)} = \dfrac{1}{\frac{+x+1-x}{+x}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{x} = x$

NR: $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$ "

Daraus folgt: $(f \circ f \circ f)(x) = x = id(x)_{\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$, also $f \circ f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$.

b. Behauptung: ~~Sei~~ $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $x \to f(x) := 1 - \frac{1}{x}$ ist eine bijektive Funktion.

Beweis

i. Injektivität z.z. $\forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Seien $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Es gelte $f(x) = f(y)$, d.h. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ und $f(y) = 1 - \frac{1}{y}$.

Dann gilt:

$$1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y}$$
$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$$
$$x = y$$

ii. Surjektivität $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\ \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: f(x) = y$

Sei $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Wähle $x := \frac{1}{1-y}$ Wohldefiniert

$\triangleright$ $x \in \mathbb{R}$?

$\triangleright$ $x \neq 0$ und $x \neq 1$?

Dann gilt:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-y}} = 1 - \frac{1}{1-y} = 1 - 1 - y = y$$

geeignet gewählt

qed.

c. Man bestimme die Umkehrfunktion $f(x) : 1 - \frac{1}{x}$

* nach x auflösen $\hat{=}$ Umkehrfunktion

erster Beweis Herleitung

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Dann folgt:

$$y = 1 - \frac{1}{x}$$
$$y - 1 = -\frac{1}{x}$$
$$1 - y = \frac{1}{x}$$
$$(1-y) \cdot x = 1$$
$$x = \frac{1}{1-y}$$

Daraus folgt $f^{-1}(y) = \frac{1}{1-y}$.

Somit lautet die Umkehrfunktion von f: $f^{-1} = -\frac{1}{x-1}$.

Daraus folgt $f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ mit $x \longmapsto -\frac{1}{x-1}$.

zweiter Beweis Herleitung

Es gilt $f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $(f \circ f^{-1})(x) = x$

Damit folgt: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 1 - \frac{1}{f^{-1}(x)} = x$

Dann gilt:

$$1 - \frac{1}{f^{-1}(x)} = x \qquad | \cdot f^{-1}(x)$$
$$1 \cdot f^{-1}(x) - 1 = x \cdot f^{-1}(x)$$
$$-1 = x \cdot f^{-1}(x) - f^{-1}(x)$$
$$-1 = f^{-1}(x)(x-1)$$
$$-\frac{1}{x-1} = f^{-1}(x)$$

Nebenrechnung

Beh.: $f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ mit $x \longmapsto -\frac{1}{x-1}$ ist die Umkehrfkt. von f.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

z.z. $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

bitte anpassen, was ist mit -1?

d. Wähle $g: \boxed{\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}}$ mit $x \to -1 - \frac{1}{x} = \frac{-(x+1)}{x}$

Es gilt $g(g(g(x))) = g\left(-\left(\dfrac{-\frac{(x+1)}{x} - 1}{\frac{-(x+1)}{x}}\right)\right) = g\left(\dfrac{x+1-x}{-(x+1)}\right) = \dfrac{1}{-\frac{(x+1)}{x}+1} = \dfrac{1}{\frac{(x+1)-x}{x}} = \dfrac{x}{x+1-x} = x$

Somit gilt $g \circ g \circ g = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

Und es gilt nicht $g \circ g = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$: $g(g(x)) = \left(-\left(\dfrac{-\frac{(x+1)}{x} - 1}{\frac{-(x+1)}{x}}\right)\right) = \left(\dfrac{x+1-x}{-(x+1)}\right) = -\dfrac{1}{x+1} \neq x$

qed.

Kann A endlich sein?

Betrachte $A = \{1, 2, 3\}$ und

$g := \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

zu zeigen

$\triangleright$ $g \circ g \neq id_A$, aber $g \circ g \circ g = id_A$

Aufgabe 2

Sei T eine Teilmenge der reellen Zahlen definiert durch

$$T := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x = \frac{n^2+\sqrt{2}}{n},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei w eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach T so, dass $n \mapsto w(n) := \frac{n^2+\sqrt{2}}{n}$. Man untersuche w auf Surjektivität und Injektivität.

Aufgabe 2:

Zur Injektivität

Beh.: $\forall_{a,b} \in \mathbb{N}: w(a) = w(b) \Rightarrow a = b$

Bew.: (Für $a = n$ und $b = n+1$ beweisen wir mittels Kontraposition, d. h. $\forall_{a,b} \in \mathbb{N}: a \neq b \Rightarrow w(a) \neq w(b)$

2.2. $\forall n \in \mathbb{N}: w(n) < w(n+1)$.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und es gelte $a \neq b$, also $n \neq n+1$ mit $n < n+1$.)

Somit gilt $w(n) = \frac{n^2+\sqrt{2}}{n} \ \overset{<}{\cancel{\neq}}\ ; \frac{n^2+2n+1+\sqrt{2}}{n+1} = \frac{(n+1)^2+\sqrt{2}}{n+1} = w(n+1)$

Also gilt $\frac{n^2+\sqrt{2}}{n} \overset{<}{\cancel{\neq}} \frac{n^2+2n+1+\sqrt{2}}{n+1}$

Diese Aussage liefert für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$ und o.B.d.A $a < b$, dass $w(a) < w(b)$.

$\Leftrightarrow (n^2+\sqrt{2}) \cdot (n+1) \overset{<}{\cancel{\neq}} (n^2+2n+1+\sqrt{2}) \cdot n$ | da $n \in \mathbb{N}$ ist $n \neq 0$ und der Rechenschritt kann gemacht werden

$\Leftrightarrow n^3 + \sqrt{2n} + n^2 + \sqrt{2} \overset{<}{\cancel{\neq}} n^3 + 2n^2 + n + \sqrt{2n}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \overset{<}{\cancel{\neq}} n^2 + n$

Da $n^2 \geq 1$ und $n \geq 1$, ist $n^2 + n \geq 2$, so dass $n^2 + n > \sqrt{2}$.

(Daraus folgt, dass $n \neq n+1$, also $a \neq b$.)

(Da $a \neq b$ gilt, gilt ebenfalls $w(a) \neq w(b)$, womit die Injektivität bewiesen ist. //)

Zur Surjektivität

Beh.: $\forall_b \in T\ \exists_a \in \mathbb{N}: w(a) = b$

d.h. es ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $b = \frac{n^2+\sqrt{2}}{n}$. Wähle n entsprechend.

Bew.: Sei $b \in T$. Für alle Elemente aus T gilt $b = \frac{a^2+\sqrt{2}}{a} = w(a)$, wobei $a \in \mathbb{N}$.

Da $w(a) = b$ ist, gilt die Surjektivität der Funktion //

Es gilt $w(\mathbb{N}) = T$. Also ist die Funktion surjektiv.

A2. i. Behauptung: Sei w eine injektive Funktion definiert durch $w: \mathbb{N} \to T$ mit $n \to w(n) := \frac{n^2+\sqrt{2}}{n}$.

$T: \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = \frac{n^2+\sqrt{2}}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

Sei~~en~~ ~~$n \in \mathbb{N}$.~~ $x, y \in \mathbb{N}$.

Es gelte $w(x) = w(y)$, d.h. $w(x) = \frac{x^2+\sqrt{2}}{x}$ und $w(y) = \frac{y^2+\sqrt{2}}{y}$

Dann gilt: $\frac{x^2+\sqrt{2}}{x} = \frac{y^2+\sqrt{2}}{y}$

$$x^2+\sqrt{2} = \frac{(y^2+\sqrt{2}) \cdot x}{y}$$

$$yx^2+\sqrt{2} \cdot y = xy^2+\sqrt{2} \cdot x$$

$$0 = xy^2+\sqrt{2} \cdot x - yx^2 - \sqrt{2} \cdot y$$

$$0 = (x-y)(-xy+\sqrt{2})$$

$$x-y = 0 \lor -xy+\sqrt{2} = 0$$

$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow -xy \in \mathbb{Z}$, also $xy \neq \sqrt{2}$. Also $-xy+\sqrt{2} \neq 0$.

also gilt $x - y = 0$.

Damit gilt $x = y$.

qed.

ii. Behauptung: Sei w surjektive Funktion definiert durch $w: \mathbb{N} \to T$ mit $n \to w(n) := \frac{n^2+\sqrt{2}}{n}$.

$T: \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = \frac{n^2+\sqrt{2}}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Beweis

Da die Funktion $w(n)$ dem Definitionsbereich entspricht wird jedes Element aus T getroffen.

→ Trivial durch die Definition bewiesen

qed.

Dann gilt:

$$\frac{a^2+\sqrt{2}}{a} = \frac{b^2+\sqrt{2}}{b}$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{\sqrt{2}}{a} = b + \frac{\sqrt{2}}{b}$$

Dann gilt:

$$\frac{(b-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}}{b-\sqrt{2}}$$

$$\overset{=}{\Leftrightarrow} b-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{b-\sqrt{2}}$$

?

Aufgabe 3

Man zeige die Gleichheit $|\mathbb{N} \cup \{\pi\}| = |\mathbb{N}|$

A3. Behauptung: Die Gleichheit von: $\underbrace{|\mathbb{N} \cup \{\pi\}|}_{\text{disjunkt}} = |\mathbb{N}|$

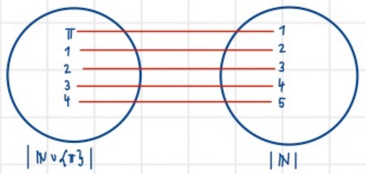
Beweis:

siehe Vorlesung

Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn sie ~~gleichmächtig sind~~ die gleichen Elemente enthalten. $A = B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Zwei Mengen A, B haben dieselbe Mächtigkeit genau dann, wenn beide leer sind oder wenn es eine bijektive Funktion von A nach B gibt.

Wählen wir $g: \mathbb{N} \cup \{\pi\} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = \pi \\ x+1, & \text{falls } x \in \mathbb{N} \end{cases}$ ▷ wohldefiniert?



geeignet gewählt
⇒ injektiv, surjektiv?

i. Injektivität $\forall x,y \in \mathbb{N} \cup \{\pi\}: g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$

Seien $x, y \in \mathbb{N} \cup \{\pi\}$

Es gelte $g(x) = g(y)$

1. Fall: $\overset{x,y \in \mathbb{N}}{g(x)} = x+1 = y+1 = g(y)$

Dann gilt: $x + 1 = y + 1$

$x = y$

2. Fall: $\overset{x,y=\pi}{g(x)} = 1 = g(y)$

Dann gilt nach g: $x = \pi = y$ (*)

3. Fall o.B.d.A. $x = \pi$ und $y \in \mathbb{N}$, dann gilt $g(x) = 1 < y+1 = g(y)$. $\Rightarrow g(x) \neq g(y)$.

ii. Surjektivität $\forall y \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{N} \cup \{\pi\}: g(x) = y$

Fall 1: $y \geq 2$ ~~$x \in \mathbb{N}$~~

Sei $y \in \mathbb{N}$.

Wähle $x = y - 1 \in \mathbb{N} \cup \{\pi\}$

Dann gilt: $g(x) = y - 1 + 1$

$= y$

Fall 2: $y = 1$. Wähle $x = \pi \in \mathbb{N} \cup \{\pi\}$

Dann gilt $g(\pi) = 1$.

qed.

Aufgabe 3:

Man zeige die Gleichheit $|\mathbb{N} \cup \{\pi\}| = |\mathbb{N}|$:

Da $\mathbb{N}$ eine abzählbar unendliche Menge ist, muss $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$ auch abzählbar unendlich sein.

Behauptung: $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: zu zeigen: Es existiert eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$.

Wähle $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\pi\}, x \mapsto f(x) = \{\pi \cdot \cancel{x}$ für $x \overset{=1}{\cancel{\in \{1\}}}; x - 1$ für $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ wohldefiniert?

Beweis Injektivität von f:

zu zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{N}: f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

1. Fall: ~~Seien~~ $a, b \overset{\geq 2}{\cancel{\in \mathbb{N} \setminus \{1\}}}$. Dann ist $f(a) = a - 1$. Außerdem ist $f(b) = b - 1$.

Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gilt $a - 1 = b - 1 \Leftrightarrow a = b$.

2. Fall: ~~Seien~~ $a, b \cancel{\in} \{1\}$. Dann ist $f(a) = \pi \cdot \cancel{a}$. Außerdem ist $f(b) = \pi \cdot \cancel{b}$. vgl. mit (*)

Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gilt $\pi \cdot a = \pi \cdot b \Leftrightarrow a = b$.

Also ist f injektiv.

3. Fall: ...

Beweis Surjektivität von f:

zu zeigen: $\forall b \in \mathbb{N}\, \exists a \in \mathbb{N} \cancel{\setminus \{\pi\}} \cup \{\pi\}: f(a) = b$.

1. Fall: ~~Sei~~ $b \in \mathbb{N} \cancel{\setminus \{1\}}$. Wähle $a = b + 1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist $f(a) = f(b+1) = b + 1 - 1 = b$.

2. Fall: ~~Sei~~ $b \overset{=\pi}{\cancel{\in \{1\}}}$. Wähle $a = \cancel{\tfrac{b}{\pi}}\ 1$. Dann ist $f(a) = f\left(\cancel{\tfrac{b}{\pi}}\ 1\right) = \cancel{\pi \cdot \tfrac{b}{\pi} = b}$. $\pi = b$.

Also ist f surjektiv.

Damit ist f bijektiv und die Gleichheit $|\mathbb{N} \cup \{\pi\}| = |\mathbb{N}|$ ist bewiesen.

Aufgabe 4

Man zeige die Gleichmächtigkeit der Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ mit Hilfe der Funktion

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

mit

$$(i, j) \mapsto f((i, j)) := \frac{(i + j - 2) \cdot (i + j - 1)}{2} + i.$$

▷ Cantorsche Paarungsfunktion ◁

A4. Behauptung: Sei die Funktion $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(i,j) \to f(i,j) := \frac{(i+j-2)\cdot(i+j-1)}{2} + i$ gleichmächtig.

Bewis:

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	1	3	$\boxed{6}$	10	15	21
2	2	5	9	14	20	27
3	4	8	13	19	26	
4	7	12	18	25		
5	11	17	24			
6	16	23	31			

$0+1 = 1$
$0+1+2 = 3$ ($+2$)
$0+1+2+3 = 6$ ($+3$)

Idee der diagonalen Abzählung.

Zwei Mengen A, B haben dieselbe Mächtigkeit genau dann, wenn beide leer sind oder wenn es eine bijektive Funktion von A nach B gibt, d.h. $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Die Funktion ist wohldefiniert, da der kleinste Wert 1 ist.

Die Funktion ist injektiv, da jedem Paar genau eine natürliche Zahl zugeordnet.

Die Funktion ist surjektiv, da der kleinste Wert der natürlichen Zahlen 1 ist und die folgende Zahlen aufsteigen.

1. Zeile stehen die Summen der ersten natürlichen Zahlen

$0+1=1$
$0+1+2=3$
$0+1+2+3=6$
$\vdots$

$$0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. Summe der Koordinaten der Diagonalen ist konstant.

$$\Rightarrow (i,j) \mapsto \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + i$$