ÜBUNG 5

AUFGABE 1

Wir wollen uns nun mit unseren *Kombinationen ohne Wiederholung* aus der letzten Vorlesung beschäftigen, d.h. mit dem Zählen von Teilmengen T von einer gegebenen Menge M. Aus früheren Vorlesungen wissen wir bereits, dass die Anzahl aller Teilmengen T – also die Mächtigkeit der Potenzmenge von M – einer gegebenen n-elementigen Menge M durch

$$|P(M)| = 2^n$$

berechnet werden kann. Weitere Aufgaben zu dieser Abzählstrategie finden Sie in **Aufgabe 3**.

Die Anzahl der r-Kombinationen einer Menge mit n verschiedenen Elementen hatten wir mit $C(n, r)$ bezeichnet. Wir hatten nun

$$\binom{n}{r} := C(n, r)$$

gesetzt und den Ausdruck $\binom{n}{r}$ (lies: *n über r*) als *Binomialkoeffizient* bezeichnet. Wir sehen, dass $C(4, 2) = 6$ gilt, da die 2-Kombinationen (oder die 2-elementigen Teilmengen) von $\{a, b, c, d\}$ die sechs Teilmengen $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ und $\{c, d\}$ sind. Wir erinnern uns, dass die Anzahl aller Paare von S, also die Zahl $P(4, 2) = 12$ gilt.
Schließlich hatten wir uns den folgenden Satz hergeleitet:

Satz 0.1. *Die Anzahl der r-Kombinationen einer Menge mit n Elementen, wobei n eine nicht negative ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $0 \leq r \leq n$ ist, entspricht*

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Wenden wir uns nun einigen Aufgaben zu.

a) Man berechne ausführlich den Wert der Binomialkoeffizienten $\binom{7}{3}$, $\binom{14}{4}$, $\binom{5}{5}$ und $\binom{n}{n-1}$.

b) Man gebe alle Teilmengen T_i der Menge $R = \{+, -, \cdot, :\}$ an und bestimme dann die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von R.

c) In einer Gruppe sind 5 Männer und 4 Frauen. Man bestimme die Anzahl möglicher Teilgruppen mit genau 3 Personen. Wie viele dieser Teilgruppen besteht nur aus Männern (nur aus Frauen)?

d) Ein Ausschuss mit 6 Personen soll aus 10 Männern und 15 Frauen gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn der Ausschuss mehr Frauen als Männer enthalten soll?

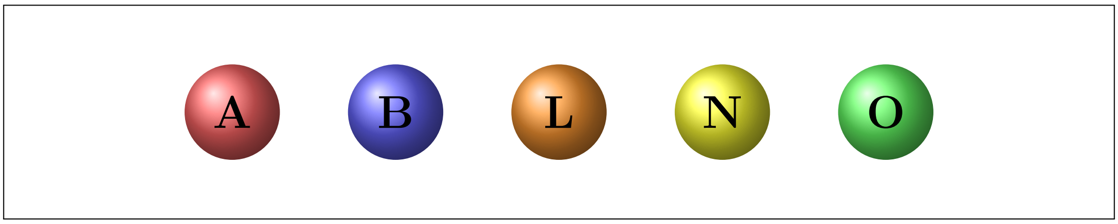
e) In einem Verein gibt es 7 Männer und 5 Frauen. Wie viele 4-köpfige Teams kann man bilden, wenn genau 2 Frauen dabei sein sollen?

f) Eine Lehrerin möchte 3 Schüler:innen für eine Präsentation auswählen, die sich aus 5 Jungen und 4 Mädchen zusammensetzt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn mehr Mädchen als Jungen gewählt werden sollen?

AUFGABE 2

In der Vorlesung hatten wir auch die *Permutationen mit Wiederholung* behandelt. Wir gehen noch einmal gemeinsam durch ein Beispiel für diesen Aufgaben- bzw. Zähltyp.

In einer Schachtel liegen Kugeln mit den Aufschriften A, B, L, N, O. Es werden nacheinandner 7 Buchstaben aus der Schachtel herausgenommen. Nach jedem Zug wird die Kugel wieder zurück in die Schachtel gelegt.



Wir können die Situation durch die Angabe folgender Menge modellieren:

$$M = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \mid X_i \in \{A, B, L, N, O\}, 1 \leq i \leq 7\}$$

a) Wie viele 7-Tupel liegen in M? Für die erste Komponeten X_1 haben wir fünf Buchstaben zur Auswahl. Da wir die Kugel stets wieder zurück legen, haben wir auch für die zweite Komponente fünf Kugeln zur Auswahl, usw. Insgesamt gilt also für die Mächtigkeit der Menge M:

$$|M| = 7 \cdot \ldots$$

b) Man bestimme die Anzahl der folgenden Teilmenge T von M

$$T = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \mid X_i = X_j, 1 \leq i, j \leq 7\}.$$

Was beschreibt die Menge?

c) Offenbar ist das 7-Tupel $(A, B, B, A, L, A, O) \in M$. Wir erkennen den Namen der Band $ABBA$. Sie war eine schwedische Popgruppe, die 1972 in Stockholm gegründet wurde. Die Mitglieder sind Agnetha Fältskog, Björn Ulvaeus, Benny Andersson und Anni-Frid (Frida) Lyngstad – ihre Anfangsbuchstaben ergeben den Bandnamen $ABBA$. Mit ihren eingängigen Melodien, mehrstimmigem Gesang und fröhlich-melancholischem Sound wurde $ABBA$ in den 1970er-Jahren zu einer der erfolgreichsten Popgruppen der Welt. Zu ihren bekanntesten Hits gehören „Waterloo", „Dancing Queen", „Mamma Mia", „Fernando" und „Take a Chance on Me".
Man bestimme die Anzahl der 7-Tupel, die den Namen der Band $ABBA$ enthalten, also die diese Buchstabenfolge beinhalten.

d) Das Wort $BALLOON$ besteht auch aus insgesamt 7 Buchstaben und ist offenbar auch ein Element von M, genauer ist das Tupel (B, A, L, L, O, O, N) natürlich Element von M.
Aus den Buchstaben des Wortes $BALLOON$ sollen alle verschiedenen Buchstabenanordnungen gebildet werden. Wie viele unterschiedliche Anordnungen sind möglich?
Wer Lust hat, kann sie zählen :-) …

ABLLNOO ABLLONO ABLLOON ABLNLOO ABLNOLO ABLNOOL ABLOLNO ABLOLON ABLONLO ABLONOL
ABLOOLN ABLOONL ABNLLOO ABNLOLO ABNLOOL ABNOLLO ABNOLOL ABNOOLL ABOLLNO ABOLLON
ABOLNLO ABOLNOL ABOLOLN ABOLONL ABONLLO ABONLOL ABONOLL ABOOLLN ABOOLNL ABOONLL
ALBLNOO ALBLONO ALBLOON ALBNLOO ALBNOLO ALBNOOL ALBOLNO ALBOLON ALBONLO ALBONOL
ALBOOLN ALBOONL ALLBNOO ALLBONO ALLBOON ALLNBOO ALLNOBO ALLNOOB ALLOBNO ALLOBON
ALLONBO ALLONOB ALLOOBN ALLOONB ALNBLOO ALNBOLO ALNBOOL ALNLBOO ALNLOBO ALNLOOB
ALNOBLO ALNOBOL ALNOLBO ALNOLOB ALNOOBL ALNOOLB ALOBLNO ALOBLON ALOBNLO ALOBNOL
ALOBOLN ALOBONL ALOLBNO ALOLBON ALOLNBO ALOLNOB ALOLOBN ALOLONB ALONBLO ALONBOL
ALONLBO ALONLOB ALONOBL ALONOLB ALOOBLN ALOOBNL ALOOLBN ALOOLNB ALOONBL ALOONLB
ANBLLOO ANBLOLO ANBLOOL ANBOLLO ANBOLOL ANBOOLL ANLBLOO ANLBOLO ANLBOOL ANLLBOO
ANLLOBO ANLLOOB ANLOBLO ANLOBOL ANLOLBO ANLOLOB ANLOOBL ANLOOLB ANOBLLO ANOBLOL
ANOBOLL ANOLBLO ANOLBOL ANOLLBO ANOLLOB ANOLOBL ANOLOLB ANOOBLL ANOOLBL ANOOLLB
AOBLLNO AOBLLON AOBLNLO AOBLNOL AOBLOLN AOBLONL AOBNLLO AOBNLOL AOBNOLL AOBOLLN
AOBOLNL AOBONLL AOLBLNO AOLBLON AOLBNLO AOLBNOL AOLBOLN AOLBONL AOLLBNO AOLLBON
AOLLNBO AOLLNOB AOLLOBN AOLLONB AOLNBLO AOLNBOL AOLNLBO AOLNLOB AOLNOBL AOLNOLB
AOLOBLN AOLOBNL AOLOLBN AOLOLNB AOLONBL AOLONLB AONBLLO AONBLOL AONBOLL AONLBLO
AONLBOL AONLLBO AONLLOB AONLOBL AONLOLB AONOBLL AONOLBL AONOLLB AOOBLLN AOOBLNL
AOOBNLL AOOLBLN AOOLBNL AOOLLBN AOOLLNB AOOLNBL AOOLNLB AOONBLL AOONLBL AOONLLB
BALLNOO BALLONO BALLOON BALNLOO BALNOLO BALNOOL BALOLNO BALOLON BALONLO BALONOL
BALOOLN BALOONL BANLLOO BANLOLO BANLOOL BANOLLO BANOLOL BANOOLL BAOLLNO BAOLLON
BAOLNLO BAOLNOL BAOLOLN BAOLONL BAONLLO BAONLOL BAONOLL BAOOLLN BAOOLNL BAOONLL
BLALNOO BLALONO BLALOON BLANLOO BLANOLO BLANOOL BLAOLNO BLAOLON BLAONLO BLAONOL
BLAOOLN BLAOONL BLLANOO BLLAONO BLLAOON BLLNAOO BLLNOAO BLLNOOA BLLOANO BLLOAON
BLLONAO BLLONOA BLLOOAN BLLOONA BLNALOO BLNAOLO BLNAOOL BLNLAOO BLNLOAO BLNLOOA
BLNOALO BLNOAOL BLNOLAO BLNOLOA BLNOOAL BLNOOLA BLOALNO BLOALON BLOANLO BLOANOL
BLOAOLN BLOAONL BLOLANO BLOLAON BLOLNAO BLOLNOA BLOLOAN BLOLONA BLONALO BLONAOL
BLONLAO BLONLOA BLONOAL BLONOLA BLOOALN BLOOANL BLOOLAN BLOOLNA BLOONAL BLOONLA
BNALLOO BNALOLO BNALOOL BNAOLLO BNAOLOL BNAOOLL BNLALOO BNLAOLO BNLAOOL BNLLAOO
BNLLOAO BNLLOOA BNLOALO BNLOAOL BNLOLAO BNLOLOA BNLOOAL BNLOOLA BNOALLO BNOALOL
BNOAOLL BNOLALO BNOLAOL BNOLLAO BNOLLOA BNOLOAL BNOLOLA BNOOALL BNOOLAL BNOOLLA
BOALLNO BOALLON BOALNLO BOALNOL BOALOLN BOALONL BOANLLO BOANLOL BOANOLL BOAOLLN
BOAOLNL BOAONLL BOLALNO BOLALON BOLANLO BOLANOL BOLAOLN BOLAONL BOLLANO BOLLAON

BOLLNAO	BOLLNOA	BOLLOAN	BOLLONA	BOLNALO	BOLNAOL	BOLNLAO	BOLNLOA	BOLNOAL	BOLNOLA
BOLOALN	BOLOANL	BOLOLAN	BOLOLNA	BOLONAL	BOLONLA	BONALLO	BONALOL	BONAOLL	BONLALO
BONLAOL	BONLLAO	BONLLOA	BONLOAL	BONLOLA	BONOALL	BONOLAL	BONOLLA	BOOALLN	BOOALNL
BOOANLL	BOOLALN	BOOLANL	BOOLLAN	BOOLLNA	BOOLNAL	BOOLNLA	BOONALL	BOONLAL	BOONLLA
LABLNOO	LABLONO	LABLOON	LABNLOO	LABNOLO	LABNOOL	LABOLNO	LABOLON	LABONLO	LABONOL
LABOOLN	LABOONL	LALBNOO	LALBONO	LALBOON	LALNBOO	LALNOBO	LALNOOB	LALOBNO	LALOBON
LALONBO	LALONOB	LALOOBN	LALOONB	LANBLOO	LANBOLO	LANBOOL	LANLBOO	LANLOBO	LANLOOB
LANOBLO	LANOBOL	LANOLBO	LANOLOB	LANOOBL	LANOOLB	LAOBLNO	LAOBLON	LAOBNLO	LAOBNOL
LAOBOLN	LAOBONL	LAOLBNO	LAOLBON	LAOLNBO	LAOLNOB	LAOLOBN	LAOLONB	LAONBLO	LAONBOL
LAONLBO	LAONLOB	LAONOBL	LAONOLB	LAOOBLN	LAOOBNL	LAOOLBN	LAOOLNB	LAOONBL	LAOONLB
LBALNOO	LBALONO	LBALOON	LBANLOO	LBANOLO	LBANOOL	LBAOLNO	LBAOLON	LBAONLO	LBAONOL
LBAOOLN	LBAOONL	LBLANOO	LBLAONO	LBLAOON	LBLNAOO	LBLNOAO	LBLNOOA	LBLOANO	LBLOAON
LBLONAO	LBLONOA	LBLOOAN	LBLOONA	LBNALOO	LBNAOLO	LBNAOOL	LBNLAOO	LBNLOAO	LBNLOOA
LBNOALO	LBNOAOL	LBNOLAO	LBNOLOA	LBNOOAL	LBNOOLA	LBOALNO	LBOALON	LBOANLO	LBOANOL
LBOAOLN	LBOAONL	LBOLANO	LBOLAON	LBOLNAO	LBOLNOA	LBOLOAN	LBOLONA	LBONALO	LBONAOL
LBONLAO	LBONLOA	LBONOAL	LBONOLA	LBOOALN	LBOOANL	LBOOLAN	LBOOLNA	LBOONAL	LBOONLA
LLABNOO	LLABONO	LLABOON	LLANBOO	LLANOBO	LLANOOB	LLAOBNO	LLAOBON	LLAONBO	LLAONOB
LLAOOBN	LLAOONB	LLBANOO	LLBAONO	LLBAOON	LLBNAOO	LLBNOAO	LLBNOOA	LLBOANO	LLBOAON
LLBONAO	LLBONOA	LLBOOAN	LLBOONA	LLNABOO	LLNAOBO	LLNAOOB	LLNBAOO	LLNBOAO	LLNBOOA
LLNOABO	LLNOAOB	LLNOBAO	LLNOBOA	LLNOOAB	LLNOOBA	LLOABNO	LLOABON	LLOANBO	LLOANOB
LLOAOBN	LLOAONB	LLOBANO	LLOBAON	LLOBNAO	LLOBNOA	LLOBOAN	LLOBONA	LLONABO	LLONAOB
LLONBAO	LLONBOA	LLONOAB	LLONOBA	LLOOABN	LLOOANB	LLOOBAN	LLOOBNA	LLOONAB	LLOONBA
LNABLOO	LNABOLO	LNABOOL	LNALBOO	LNALOBO	LNALOOB	LNAOBLO	LNAOBOL	LNAOLBO	LNAOLOB
LNAOOBL	LNAOOLB	LNBALOO	LNBAOLO	LNBAOOL	LNBLAOO	LNBLOAO	LNBLOOA	LNBOALO	LNBOAOL
LNBOLAO	LNBOLOA	LNBOOAL	LNBOOLA	LNLABOO	LNLAOBO	LNLAOOB	LNLBAOO	LNLBOAO	LNLBOOA
LNLOABO	LNLOAOB	LNLOBAO	LNLOBOA	LNLOOAB	LNLOOBA	LNOABLO	LNOABOL	LNOALBO	LNOALOB
LNOAOBL	LNOAOLB	LNOBALO	LNOBAOL	LNOBLAO	LNOBLOA	LNOBOAL	LNOBOLA	LNOLABO	LNOLAOB
LNOLBAO	LNOLBOA	LNOLOAB	LNOLOBA	LNOOABL	LNOOALB	LNOOBAL	LNOOBLA	LNOOLAB	LNOOLBA
LOABLNO	LOABLON	LOABNLO	LOABNOL	LOABOLN	LOABONL	LOALBNO	LOALBON	LOALNBO	LOALNOB
LOALOBN	LOALONB	LOANBLO	LOANBOL	LOANLBO	LOANLOB	LOANOBL	LOANOLB	LOAOBLN	LOAOBNL
LOAOLBN	LOAOLNB	LOAONBL	LOAONLB	LOBALNO	LOBALON	LOBANLO	LOBANOL	LOBAOLN	LOBAONL
LOBLANO	LOBLAON	LOBLNAO	LOBLNOA	LOBLOAN	LOBLONA	LOBNALO	LOBNAOL	LOBNLAO	LOBNLOA
LOBNOAL	LOBNOLA	LOBOALN	LOBOANL	LOBOLAN	LOBOLNA	LOBONAL	LOBONLA	LOLABNO	LOLABON
LOLANBO	LOLANOB	LOLAOBN	LOLAONB	LOLBANO	LOLBAON	LOLBNAO	LOLBNOA	LOLBOAN	LOLBONA
LOLNABO	LOLNAOB	LOLNBAO	LOLNBOA	LOLNOAB	LOLNOBA	LOLOABN	LOLOANB	LOLOBAN	LOLOBNA
LOLONAB	LOLONBA	LONABLO	LONABOL	LONALBO	LONALOB	LONAOBL	LONAOLB	LONBALO	LONBAOL
LONBLAO	LONBLOA	LONBOAL	LONBOLA	LONLABO	LONLAOB	LONLBAO	LONLBOA	LONLOAB	LONLOBA
LONOABL	LONOALB	LONOBAL	LONOBLA	LONOLAB	LONOLBA	LOOABLN	LOOABNL	LOOALBN	LOOALNB
LOOANBL	LOOANLB	LOOBALN	LOOBANL	LOOBLAN	LOOBLNA	LOOBNAL	LOOBNLA	LOOLABN	LOOLANB
LOOLBAN	LOOLBNA	LOOLNAB	LOOLNBA	LOONABL	LOONALB	LOONBAL	LOONBLA	LOONLAB	LOONLBA
NABLLOO	NABLOLO	NABLOOL	NABOLLO	NABOLOL	NABOOLL	NALBLOO	NALBOLO	NALBOOL	NALLBOO
NALLOBO	NALLOOB	NALOBLO	NALOBOL	NALOLBO	NALOLOB	NALOOBL	NALOOLB	NAOBLLO	NAOBLOL
NAOBOLL	NAOLBLO	NAOLBOL	NAOLLBO	NAOLLOB	NAOLOBL	NAOLOLB	NAOOBLL	NAOOLBL	NAOOLLB
NBALLOO	NBALOLO	NBALOOL	NBAOLLO	NBAOLOL	NBAOOLL	NBLALOO	NBLAOLO	NBLAOOL	NBLLAOO
NBLLOAO	NBLLOOA	NBLOALO	NBLOAOL	NBLOLAO	NBLOLOA	NBLOOAL	NBLOOLA	NBOALLO	NBOALOL
NBOAOLL	NBOLALO	NBOLAOL	NBOLLAO	NBOLLOA	NBOLOAL	NBOLOLA	NBOOALL	NBOOLAL	NBOOLLA
NLABLOO	NLABOLO	NLABOOL	NLALBOO	NLALOBO	NLALOOB	NLAOBLO	NLAOBOL	NLAOLBO	NLAOLOB
NLAOOBL	NLAOOLB	NLBALOO	NLBAOLO	NLBAOOL	NLBLAOO	NLBLOAO	NLBLOOA	NLBOALO	NLBOAOL
NLBOLAO	NLBOLOA	NLBOOAL	NLBOOLA	NLLABOO	NLLAOBO	NLLAOOB	NLLBAOO	NLLBOAO	NLLBOOA
NLLOABO	NLLOAOB	NLLOBAO	NLLOBOA	NLLOOAB	NLLOOBA	NLOABLO	NLOABOL	NLOALBO	NLOALOB
NLOAOBL	NLOAOLB	NLOBALO	NLOBAOL	NLOBLAO	NLOBLOA	NLOBOAL	NLOBOLA	NLOLABO	NLOLAOB
NLOLBAO	NLOLBOA	NLOLOAB	NLOLOBA	NLOOABL	NLOOALB	NLOOBAL	NLOOBLA	NLOOLAB	NLOOLBA
NOABLLO	NOABLOL	NOABOLL	NOALBLO	NOALBOL	NOALLBO	NOALLOB	NOALOBL	NOALOLB	NOAOBLL
NOAOLBL	NOAOLLB	NOBALLO	NOBALOL	NOBAOLL	NOBLALO	NOBLAOL	NOBLLAO	NOBLLOA	NOBLOAL
NOBLOLA	NOBOALL	NOBOLAL	NOBOLLA	NOLABLO	NOLABOL	NOLALBO	NOLALOB	NOLAOBL	NOLAOLB
NOLBALO	NOLBAOL	NOLBLAO	NOLBLOA	NOLBOAL	NOLBOLA	NOLLABO	NOLLAOB	NOLLBAO	NOLLBOA
NOLLOAB	NOLLOBA	NOLOABL	NOLOALB	NOLOBAL	NOLOBLA	NOLOLAB	NOLOLBA	NOOABLL	NOOALBL
NOOALLB	NOOBALL	NOOBLAL	NOOBLLA	NOOLABL	NOOLALB	NOOLBAL	NOOLBLA	NOOLLAB	NOOLLBA
OABLLNO	OABLLON	OABLNLO	OABLNOL	OABLOLN	OABLONL	OABNLLO	OABNLOL	OABNOLL	OABOLLN
OABOLNL	OABONLL	OALBLNO	OALBLON	OALBNLO	OALBNOL	OALBOLN	OALBONL	OALLBNO	OALLBON
OALLNBO	OALLNOB	OALLOBN	OALLONB	OALNBLO	OALNBOL	OALNLBO	OALNLOB	OALNOBL	OALNOLB
OALOBLN	OALOBNL	OALOLBN	OALOLNB	OALONBL	OALONLB	OANBLLO	OANBLOL	OANBOLL	OANLBLO
OANLBOL	OANLLBO	OANLLOB	OANLOBL	OANLOLB	OANOBLL	OANOLBL	OANOLLB	OAOBLLN	OAOBLNL
OAOBNLL	OAOLBLN	OAOLBNL	OAOLLBN	OAOLLNB	OAOLNBL	OAOLNLB	OAONBLL	OAONLBL	OAONLLB
OBALLNO	OBALLON	OBALNLO	OBALNOL	OBALOLN	OBALONL	OBANLLO	OBANLOL	OBANOLL	OBAOLLN
OBAOLNL	OBAONLL	OBLALNO	OBLALON	OBLANLO	OBLANOL	OBLAOLN	OBLAONL	OBLLANO	OBLLAON
OBLLNAO	OBLLNOA	OBLLOAN	OBLLONA	OBLNALO	OBLNAOL	OBLNLAO	OBLNLOA	OBLNOAL	OBLNOLA
OBLOALN	OBLOANL	OBLOLAN	OBLOLNA	OBLONAL	OBLONLA	OBNALLO	OBNALOL	OBNAOLL	OBNLALO
OBNLAOL	OBNLLAO	OBNLLOA	OBNLOAL	OBNLOLA	OBNOALL	OBNOLAL	OBNOLLA	OBOALLN	OBOALNL
OBOANLL	OBOLALN	OBOLANL	OBOLLAN	OBOLLNA	OBOLNAL	OBOLNLA	OBONALL	OBONLAL	OBONLLA
OLABLNO	OLABLON	OLABNLO	OLABNOL	OLABOLN	OLABONL	OLALBNO	OLALBON	OLALNBO	OLALNOB
OLALOBN	OLALONB	OLANBLO	OLANBOL	OLANLBO	OLANLOB	OLANOBL	OLANOLB	OLAOBLN	OLAOBNL
OLAOLBN	OLAOLNB	OLAONBL	OLAONLB	OLBALNO	OLBALON	OLBANLO	OLBANOL	OLBAOLN	OLBAONL
OLBLANO	OLBLAON	OLBLNAO	OLBLNOA	OLBLOAN	OLBLONA	OLBNALO	OLBNAOL	OLBNLAO	OLBNLOA
OLBNOAL	OLBNOLA	OLBOALN	OLBOANL	OLBOLAN	OLBOLNA	OLBONAL	OLBONLA	OLLABNO	OLLABON
OLLANBO	OLLANOB	OLLAOBN	OLLAONB	OLLBANO	OLLBAON	OLLBNAO	OLLBNOA	OLLBOAN	OLLBONA
OLLNABO	OLLNAOB	OLLNBAO	OLLNBOA	OLLNOAB	OLLNOBA	OLLOABN	OLLOANB	OLLOBAN	OLLOBNA
OLLONAB	OLLONBA	OLNABLO	OLNABOL	OLNALBO	OLNALOB	OLNAOBL	OLNAOLB	OLNBALO	OLNBAOL
OLNBLAO	OLNBLOA	OLNBOAL	OLNBOLA	OLNLABO	OLNLAOB	OLNLBAO	OLNLBOA	OLNLOAB	OLNLOBA
OLNOABL	OLNOALB	OLNOBAL	OLNOBLA	OLNOLAB	OLNOLBA	OLOABLN	OLOABNL	OLOALBN	OLOALNB
OLOANBL	OLOANLB	OLOBALN	OLOBANL	OLOBLAN	OLOBLNA	OLOBNAL	OLOBNLA	OLOLABN	OLOLANB
OLOLBAN	OLOLBNA	OLOLNAB	OLOLNBA	OLONABL	OLONALB	OLONBAL	OLONBLA	OLONLAB	OLONLBA
ONABLLO	ONABLOL	ONABOLL	ONALBLO	ONALBOL	ONALLBO	ONALLOB	ONALOBL	ONALOLB	ONAOBLL

ONAOLBL ONAOLLB ONBALLO ONBALOL ONBAOLL ONBLALO ONBLAOL ONBLLAO ONBLLOA ONBLOAL
ONBLOLA ONBOALL ONBOLAL ONBOLLA ONLABLO ONLABOL ONLALBO ONLALOB ONLAOBL ONLAOLB
ONLBALO ONLBAOL ONLBLAO ONLBLOA ONLBOAL ONLBOLA ONLLABO ONLLAOB ONLLBAO ONLLBOA
ONLLOAB ONLLOBA ONLOABL ONLOALB ONLOBAL ONLOBLA ONLOLAB ONLOLBA ONOABLL ONOALBL
ONOALLB ONOBALL ONOBLAL ONOBLLA ONOLABL ONOLALB ONOLBAL ONOLBLA ONOLLAB ONOLLBA
OOABLLN OOABLNL OOABNLL OOALBLN OOALBNL OOALLBN OOALLNB OOALNBL OOALNLB OOANBLL
OOANLBL OOANLLB OOBALLN OOBALNL OOBANLL OOBLALN OOBLANL OOBLLAN OOBLLNA OOBLNAL
OOBLNLA OOBNALL OOBNLAL OOBNLLA OOLABLN OOLABNL OOLALBN OOLALNB OOLANBL OOLANLB
OOLBALN OOLBANL OOLBLAN OOLBLNA OOLBNAL OOLBNLA OOLLABN OOLLANB OOLLBAN OOLLBNA
OOLLNAB OOLLNBA OOLNABL OOLNALB OOLNBAL OOLNBLA OOLNLAB OOLNLBA OONABLL OONALBL
OONALLB OONBALL OONBLAL OONBLLA OONLABL OONLALB OONLBAL OONLBLA OONLLAB OONLLBA

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe möchten wir einsehen, wie Binomialkoeffizienten uns helfen können, Abzählprobleme zu lösen. Wir betrachten eine Beispielaufgabe: Mara hat drei Weintrauben und vier Brombeeren. Man berechne anhand eines passenden Modells die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen, in denen sie die Früchte essen kann.
Wir strukturieren unsere Lösung in drei Teile.

- **Antwort:** Es gibt genau 35 verschiedene Reihenfolgen, die Früchte zu essen.
- **Modellierung:** Wir modellieren die Slots, an denen Mara eine Weintraube essen kann, durch die Menge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ferner beschreibt die Menge

  $$W = \{A \mid A \subseteq S \text{ und } |A| = 3\}$$

  die möglichen Auswahlen von drei Slots, an denen sie die Weintrauben isst. Ist beispielsweise $A = \{2, 4, 5\}$, so isst Mara zu den Zeitpunkten 2, 4 und 5 Weintrauben (und damit zu den Zeitpunkten 1, 3, 6 und 7 Brombeeren), so dass ihre Menüfolge Beere-Traube-Beere-Traube-Traube-Beere-Beere lautet.
- **Rechnung:** Es gilt $|S| = 7$, so dass die Anzahl der möglichen Reihenfolgen $|W| = C(7, 3)$ ist. Es gilt daher

  $$|W| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35.$$

Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben mit Hilfe geeigneter Modelle.

a) Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen Ziehungen beim Lotto „3 aus 10“.

b) Alex hat eine Tüte mit elf Jelly Beans, und zwar

   - sechs rote mit den Geschmacksrichtungen Zimt, Granatapfel, roter Apfel, Kirsche, Erdbeermarmelade und Cranberry

- und fünf orangefarbene mit den Geschmacksrichtungen Mandarine, Pfirsich, Grapefruit, Honigmelone und Passionsfrucht.

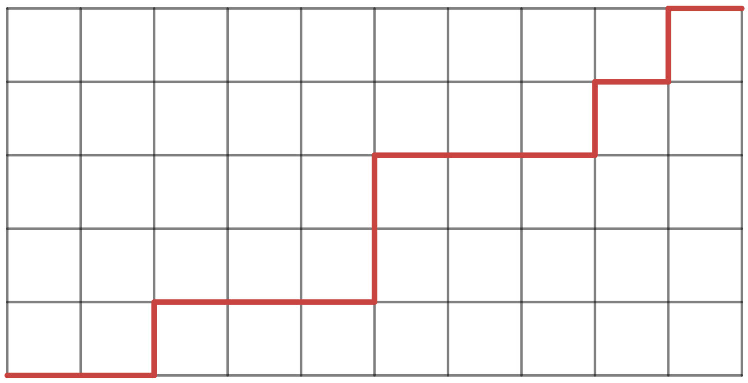
Er nimmt drei Jelly Beans aus der Tüte, ohne sie anzuschauen, und schenkt sie seinem Freund Bert. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Sets an Jelly Beans, die Bert erhalten kann. Berechnen Sie zudem, wie viele dieser Sets komplett rot sind.

c) Ein Binom ist ein zweiteiliger Ausdruck, zum Beispiel $x+y$. Wir multiplzieren die siebte Potenz

$$(x+y)^7 = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$$

des Binoms $x+y$ aus und fassen gleichartige Terme zusammen. Berechnen Sie den Koeffizienten, der vor dem Monom x^4y^3 entsteht.

d) Ermitteln Sie die Anzahl der Gitterwege von $(0,0)$ nach $(10,5)$, die in jedem Schritt entweder eine Einheit nach oben oder eine Einheit nach rechts gehen.



Aufgabe 4

Das Pascal'sche Dreieck ist eine Zahlenmauer. Die dritte und die vierte Zeile des Dreiecks bestehen beispielsweise aus den Zahlen

$$\binom{3}{0}=1,\quad \binom{3}{1}=3,\quad \binom{3}{2}=3,\quad \binom{3}{3}=1;$$
$$\binom{4}{0}=1\quad \binom{4}{1}=4,\quad \binom{4}{2}=6,\quad \binom{4}{3}=4,\quad \binom{4}{4}=1.$$

Es entsteht ein dreieckiges Schema, indem wir die Zahlen einer Zeile zentriert in einer Reihe schreiben. Das Bild zeigt die Zeilen 0, 1, 2, 3, 4 und 5.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

a) Lesen Sie aus dem Bild die Werte $\binom{2}{1}$, $\binom{5}{2}$ und $\binom{5}{3}$ ab.

b) Ergänzen Sie die sechste, siebte und achte Zeile.

Wir versuchen nun, in der Anordnung der Zahlen Muster zu identifizieren und zu erklären (ein Prozess, den manche Leute number crunching nennen). Wir betrachten ein Beispiel.

- **Phänomen:** Jede Zahl in einem Mauerstein im Inneren des Pascal'schen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Zahlen in den darüber liegenden Mauersteinen.

- **Instanz:** Es gilt $\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$.

- **Anschauliche Erklärung:** Sina ist eine von 7 Studierenden. Es soll ein Studierendenausschuss aus 3 Studierenden gebildet werden. Dann gibt es $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten, den Ausschuss zu bilden, da aus der Menge der 7 Studierenden eine Teilmenge aus 3 Studierenden auszuwählen ist.

  Sina selbst kann in dem Auschuss sein oder nicht.

  Es gibt $\binom{6}{3}$ mögliche Ausschüsse, in denen Sina nicht vertreten ist, da in dem Fall aus der Menge der restlichen 6 Studierenden eine Teilmenge aus 3 Studierenden auszuwählen ist.

  Ferner gibt es $\binom{6}{2}$ mögliche Ausschüsse mit Sina, da in dem Fall neben Sina noch 2 der 6 anderen Studierenden in den Ausschuss kommen müssen.

  Folglich muss die Anzahl $\binom{7}{3}$ aller möglichen Ausschüsse gleich der Summe aus $\binom{6}{3}$ und $\binom{6}{2}$ sein.

Wir laden nun die Studierenden ein, das Pascal'sche Dreieck zu explorieren, und weitere Beobachtungen zu formulieren und zu erklären.

c) Wir betrachten das folgende Phänomen: Die Summe der Zahlen in der Zeile n des Pascal'schen Dreiecks ist stets 2^n. Schreiben Sie auf, was dieses Phänomen im Fall $n = 6$ bedeutet und geben Sie eine anschauliche Erklärung für diesen Fall.

d) Wir betrachten die Formel

$$\binom{8}{3} = \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

Geben Sie eine anschauliche Erklärung der Formel und versuchen Sie, das Phänomen allgemeiner zu beschreiben.

e) Formulieren Sie ein eigenes Phänomen.

AUFGABE 5

Diese kurzen Aufgaben dienen dazu, die grundlegenden Zählprinzipien der Kombinatorik (Additionsregel, Multiplikationsregel, Permutationen, Kombinationen) anzuwenden und ihre didaktische Struktur zu reflektieren.

Beachten Sie bei jeder Aufgabe:

- Welches Zählprinzip wenden Sie an?
- Wie lässt sich die Aufgabe für Lernende verständlich darstellen oder visualisieren?

a) Bestimmen Sie, auf wie viele verschiedene Arten fünf Läuferinnen ein Rennen beenden können, wenn keine Gleichstände erlaubt sind.

b) Ermitteln Sie, auf wie viele verschiedene Arten die Namen von sechs Kandidatinnen und Kandidaten für das Amt der Bürgermeisterin bzw. des Bürgermeisters auf einem Stimmzettel angeordnet werden können.

c) Eine Münze wird zehnmal geworfen, wobei jedes Mal entweder „Kopf“ oder „Zahl“ auftreten kann.

  (i) Bestimmen Sie die Gesamtzahl aller möglichen Ausgänge.
  (ii) Ermitteln Sie die Anzahl der Ausgänge, die genau zwei Köpfe enthalten.
  (iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Ausgänge, die höchstens drei Zahlen enthalten.
  (iv) Ermitteln Sie, wie viele Ausgänge gleich viele Köpfe wie Zahlen enthalten.

d) Bestimmen Sie, wie viele Permutationen der Buchstaben $ABCDEFG$ jeweils folgende Teilstrings – also Teilbuchstabenfolgen vgl. Aufgabe 2– enthalten:

  (i) den String BCD

(ii) den String $CFGA$

(iii) die Strings BA und GF

(iv) die Strings ABC und DE

(v) die Strings ABC und CDE

(vi) die Strings CBA und BED

e) Bestimmen Sie, auf wie viele Arten acht Männer und fünf Frauen sich in einer Reihe aufstellen können, sodass keine zwei Frauen nebeneinanderstehen.

f) Bestimmen Sie, auf wie viele Arten zehn Frauen und sechs Männer sich in einer Reihe aufstellen können, sodass keine drei Männer nebeneinanderstehen.

g) Ein Verein hat 25 Mitglieder.

(i) Bestimmen Sie, auf wie viele Arten vier Mitglieder ausgewählt werden können, um im Vorstand mitzuwirken.

(ii) Ermitteln Sie, auf wie viele Arten ein Vorstand mit den Ämtern Präsidentin, Vizepräsidentin, Schriftführerin und Kassenwartin besetzt werden kann, wobei jede Person nur ein Amt übernehmen darf.