Übung 4

Aufgabe 1

Die Vorlesung *Stochastik* $9\frac{3}{4}$ bei Prof. Granger besuchen 6 Studierende. Die Studierenden geben in Zweiergruppen die wöchentlichen Übungen ab. Allerdings herrscht bei ihnen Uneinigkeit, wie viele Möglichkeiten zur Gruppenbildung es gibt.

Albus präsentiert dazu folgende Überlegung:
Zunächst gibt es $6 \cdot 5$ *Möglichkeiten, die beiden Plätze in der ersten Gruppe zu besetzen. Weil ja egal ist, in welcher Reihenfolge man die Gruppe besetzt, muss man diese Anzahl dann noch durch* 2 *teilen, sodass es* $\frac{6 \cdot 5}{2}$ *Möglichkeiten gibt, die erste Gruppe zu bilden. Ebenso gibt es* $\frac{4 \cdot 3}{2}$ *Möglichkeiten, die zweite Gruppe zu bilden und* $\frac{2 \cdot 1}{2}$ *Möglichkeiten für Gruppe 3. Insgesamt sind es also nach dem Multiplikationsprinzip* $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3} = 90$ *Möglichkeiten!*

Minerva widerspricht:
Das sind zu viele! Du hast Recht, Albus, dass es $\frac{6 \cdot 5}{2}$ *Möglichkeiten gibt, die erste Gruppe zu besetzen. Aber* 15 *ist dann schon das Endergebnis, weil nach dem Besetzen der ersten Gruppe klar ist, wie der Rest eingruppiert wird.*

Severus entgegnet:
Nein, das ist nicht klar. Ist die erste Gruppe besetzt, kann bei den verbleibenden vier Studis (1,2,3,4) Studi 1 ja mit 2,3, oder vier eine Gruppe bilden. Nur die letzte Gruppe wir dann automatisch aus den zwei verbleibenden gebildet. Es sind also $15 \cdot 3 = 45$ *Möglichkeiten.*

a) Entscheiden Sie für jede der Lösung ob diese richtig ist und nennen Sie Fehler in den Lösungen (falls Fehler vorhanden sind).

b) Berichtigen Sie die Fehler in den Lösungen. Nehmen Sie dabei möglichst viel der Argumentation der Studis auf und knüpfen an diese an.

Aufgabe 2

Frau Hansen und Frau Bielser wollen bestimmen, wer in ihrem gemeinsamen Büro für das Gießen der 8 Pflanzen verantwortlich ist. Das machen die beiden mit einem Würfelspiel: Frau Bielser wählt ihre beiden Lieblingswürfel: Einen Roten und einen Pinken. Frau Hansen holt ebenfalls ihre beiden Lieblingswürfel aus der Schublade, sie sind grün und blau. Nun spielen sie folgendes Spiel: Beide werfen ihre Würfel immer wieder. Ist dann die Summe von Frau Bielsers Ergebnissen kleiner als das Produkt der beiden Augenzahlen von Frau Hansens Würfeln, bekommt Frau Hansen einen Punkt, ansonsten Frau Bielser. Wer nach 1000 Runden weniger Punkte hat, muss für immer die Pflanzen versorgen.

a) Ermitteln Sie kombinatorsich, ob das Spiel fair ist oder eine der beiden einen Vorteil hat.

b) In der Tabelle 'pflanzen.xlsx' (die sich bei den Aufgabenzetteln auf der Seite von Herrn Lorenzen findet) sehen Sie die Ergebnisse: Tatsächlich hat Frau Bielser 504 der 1000 gespielten Runden gewonnen und Frau Hansen darf ab jetzt die Pflanzen versorgen. Zwar ist das bei Frau Bielsers unzweifelhafter Integrität eigentlich undenkbar, aber im Matheinstitut wird bei dem Ergebnis kontrovers diskutiert, ob einer der Würfel von Frau Bielser gezinkt sein könnte. Untersuchen Sie diesen Vorwurf! Erläutern Sie mithilfe geeigneter Berechnungen in einem Tabellenkalkulationsprogramm, ob jemand bei dem Spiel geschummelt hat.

AUFGABE 3

Beim Mathecamp im vergangenen Schuljahr spielten die 39 Teilnehmenden folgendes Spiel, das etwas brutal klingende 'Mörderspiel': Am Anfang des Camps erhält jede Person einen Namen eines Teilnehmenden auf einem Zettel zugelost, sein sogenanntes 'Opfer' (die Kinder haben sich die Bezeichnungen ausgedacht, nicht wir). Übergibt eine Person ihrem Opfer direkt einen Gegenstand und das Opfer nimmt diesen freiwillig an, scheidet es aus dem Spiel aus. Der 'Mörder' erhält dann das Opfer seines Opfers als neues Opfer und versucht nun dieses durch Übergeben eines Gegenstandes 'zu töten'. Das Spiel geht solange, bis nur noch eine Person 'am Leben', sprich nicht ausgeschieden ist. Diese gewinnt das Spiel. Leider kann beim Verteilen der Opfer am Anfang des Camps Einiges schiefgehen:
Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Namenszuteilungen. Dann bestimmen Sie die Anzahl an Namenszuteilungen, die garantiert dazu führen, dass niemand im Laufe des Spieles sich selbst als Opfer erhält (außer natürlich die letzte übrige Person).

AUFGABE 4

Pia räumt ihr Zimmer auf. Auf dem Fußboden liegen ein Puzzle, ein Spiel, ein Satz Bauklötze und ein Keyboard, die alle die Kommode gehören. Die Kommode hat drei Schubladen. Das Schubfachprinzip besagt nun, dass die vier Gegenstände nicht alle in unterschiedlichen Schubladen landen können, d.h. in mindestens einer Schublade müssen, egal wie Pia die Spielsachen platziert, mindestens zwei der vier Gegenstände zu liegen kommen.
Das Schubfachprinzip ist auch eine mathematische Beweismethode. Wir illustrieren die Methode an einer Beispielaufgabe: Es sei $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 20\}$ eine Teilmenge der Mächtigkeit $|M| = 11$. Man beweise, dass es dann zwei teilerfremde Elemente $a, b \in M$ geben muss.

Für den Beweis erstellen wir eine Kommode mit zehn Schubladen, die mit den Mengen $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, ..., $\{19,20\}$ beschriftet sein mögen. Nun verteilen wir die elf Elemente auf die zehn Schubladen, dabei kommt jedes Element $m \in M$ in die passende Schublade mit dem Label S mit $m \in S$. Nach dem Schubfachprinzip muss es eine Schublade geben, in der zwei Elemente aus M liegen. Hat die Schublade die Beschriftung $S = \{n, n+1\}$, so sind $n, n+1 \in M$ zwei Elemente aus M. Für die beiden benachbarten Zahlen gilt $\mathrm{ggT}(n+1, n) = 1$, was zu zeigen war.
Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen, indem Sie passende Schubfächer und Gegenstände finden.

a) Marvin hat eine Tüte mit gelben, grünen und roten sauren Gurken. Er nimmt vier saure Gurken aus der Tüte. Man zeige, dass es unter den vier sauren Gurken zwei Gurken der gleichen Farbe gibt.

b) 13 Menschen kommen zusammen. Man zeige, dass zwei Menschen im gleichen Monat Geburtstag haben.

c) Ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ heißt Gitterpunkt, falls die Koordinaten $x, y, z \in \mathbb{Z}$ alles ganze Zahlen sind. Es sei $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ eine Menge aus $|X| = 9$ Gitterpunkten. Man zeige, dass es zwei verschiedene Punkte $P, Q \in X$ gibt, deren Mittelpunkt ebenfalls ein Gitterpunkt ist.

d) Zehn Menschen spielen ein Tischtennisturnier. Es spielt jeder genau einmal gegen jeden anderen. Man zeige, dass es zu jedem Zeitpunkt des Turniers zwei Spieler gibt, die die gleiche Anzahl an Spielen gespielt haben.

e) Es sei $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 100\}$ der Teilmenge der Mächtigkeit $|M| = 51$. Man beweise, dass es zwei verschiedene Elemente $a, b \in M$ geben muss, für die $a \mid b$ gilt.

Aufgabe 5

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Das allgemeine Schubfachprinzip lautet: Wenn wir $m \cdot n + 1$ Spielsachen auf m Schubladen verteilen, so muss es am Ende eine Schublade geben, in der mindestens $n + 1$ Spielsachen liegen.

a) Begründen Sie das allgemeine Schubfachprinzip.

b) Füllen Sie die Lücken, sodass die Aussagen wahr werden und so scharf wie möglich sind.

- In einer Klasse sind 22 Kinder. Dann gibt es in der Klasse _____ Kinder, die in diesem Jahr am gleichen Wochentag Geburtstag haben.

- 51 Tauben setzen sich auf 6 Häuser. Dann gibt es ein Haus, auf dem mindestens _____ Tauben sitzen.
- 20 Bücher haben zusammen insgesamt 6625 Seiten. Dann gibt es darunter ein Buch, das mindestens _______ Seiten hat.

AUFGABE 6

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit unseren bekannten Permutationen – in der Analysis hatten wir Permutationen als spezielle Bijektionen auf endlichen Mengen kennengelernt – aus der letzten Vorlesung beschäftigen, wir hatten notiert:
Eine Permutation einer Menge unterschiedlicher Objekte ist eine geordnete Anordnung dieser Objekte, also gewisse n-Tupel. Wir interessierten uns auch für geordnete Anordnungen einiger Elemente aus einer n-elementigen Menge mit $0 \leq r \leq n$. Eine geordnete Anordnung von r Elementen einer Menge hatten wir als r-Permutation einer Menge bezeichnet. Die sogenannten Kombinationen einer Menge werden uns am kommenden Mittwoch begegnen.
Wir hatten u.a. als Beispiel die folgende Sachsituation:
Auf wie viele Arten können wir drei Schüler aus einer Gruppe von fünf Schülern auswählen, die sich für ein Foto in einer Reihe aufstellen sollen? Auf wie viele Arten können wir alle fünf Schüler für ein Foto in einer Reihe aufstellen?
Zunächst ist zu beachten, dass die Reihenfolge, in der wir die Schüler auswählen, eine Rolle spielt. Es gibt fünf Möglichkeiten, den ersten Schüler auszuwählen, der am Anfang der Reihe stehen soll. Sobald dieser Schüler ausgewählt wurde, gibt es vier Möglichkeiten, den zweiten Schüler in der Reihe auszuwählen. Nachdem der erste und der zweite Schüler ausgewählt wurden, gibt es drei Möglichkeiten, den dritten Schüler in der Reihe auszuwählen. Nach der Produktregel gibt es also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten, drei Schüler aus einer Gruppe von fünf Schülern auszuwählen, die sich für ein Foto in einer Reihe aufstellen sollen.
Um alle fünf Schüler für ein Foto in einer Reihe aufzustellen, wählen wir den ersten Schüler auf fünf Arten, den zweiten auf vier Arten, den dritten auf drei Arten, den vierten auf zwei Arten und den fünften auf eine Art aus. Folglich gibt es hierfür $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten, alle fünf Schüler für ein Foto in einer Reihe aufzustellen.
Schließlich hatten wir mit Hilfe der Produktregel den folgenden Satz mit Erweiterung formuliert:

Satz 0.1. *Wenn n eine positive ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $1 \leq r \leq n$ ist, dann gibt es*

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

r-Permutationen einer Menge mit n verschiedenen Elementen.

Für $n = r$ gilt offenbar $P(n) := P(n, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Satz 0.2. *Wenn n eine positive ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $1 \leq r \leq n$ ist, dann gilt*

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

So, jetzt lassen Sie uns einige Aufgaben formulieren.

a) Man modelliere beide Sachsituationen von oben mit Mengen (analog unserem Beispiel aus der Vorlesung (Buchseiten))

b) Man berechne $P(10, 1), P(4, 0), P(6, 6), P(11, 3)$ und $P(15, 14)$ an.

c) Man gebe eine kreative Sachsituation an, die die 2-Permutation $P(6, 2)$ einer 6-elementigen Menge beschreibt.

d) Man zeige die Gültigkeit von Satz 0.2 d.h.

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Es folgen jetzt einige kleine Aufgaben im Sachkontext der Permutationen. Es ist stets eine Modellierung anzugeben.

e) Anton tippt wahllos die acht Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H in seine Tastatur, z.B. $HEABCDFG$. Man bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, sodass die Buchstabenfolge ABC wie im Beispiel zusammenhängend ist.

f) Wir sehen ein – vereinfachtes - Kennzeichen, bestehend aus den ersten beiden Buchstaben SL, gefolgt von weiteren zwei Buchstaben LO und einer dreistelligen Zahl 121.

Bestimmen Sie die Anzahl der theoretisch möglichen Kennzeichen.

g) Man bestimme alle 4-stelligen, durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind.