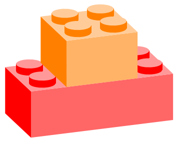
ÜBUNG 3

AUFGABE 1

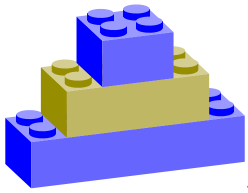
a) Oleg baut einen Turm aus Lego-Steinen.

(i) Man berechne, wie viele verschiedene Türme der Form



Oleg aus einem 4×2- und einem 2×2-Stein bauen kann, wenn er nur die Farben rot, orange und gelb zur Verfügung hat.

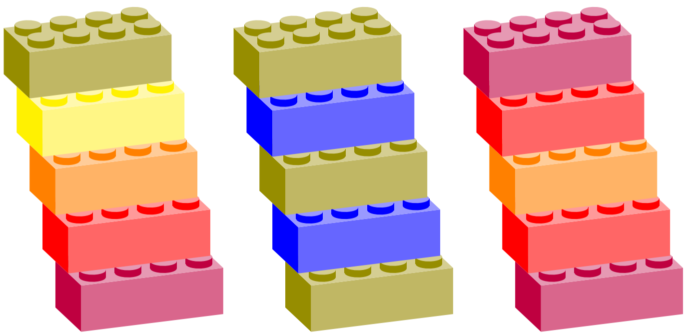
(ii) Man skizziere alle möglichen Türme der Form



,

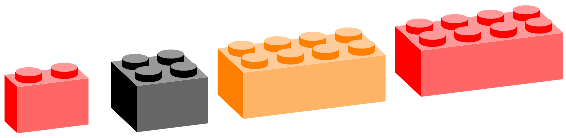
die Oleg aus einem 6×2-, einem 4×2- und einem 2×2-Stein bauen kann, wenn er nur die Farben blau und grün zur Verfügung hat.

(iii) Man berechne, wie viele verschiedene Treppen mit fünf Stufen Oleg bauen kann, wenn er sechs Farben zur Verfügung hat, aber benachbarte Stufen nicht die gleiche Farbe haben sollen.



b) Es sei B eine Menge von verschiedenen Lego-Steinen. Ferner sei A eine Menge von Farben. Die Funktion $f\colon B \to A$ möge jedem Lego-Stein seine Farbe zuordnen.

(i) Wir betrachten die Menge $B = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ aus den folgenden vier Steinen:



Ferner betrachten wir die Farbmenge $A = \{\texttt{rot}, \texttt{orange}, \texttt{schwarz}\}$. Man beschreibe die Abbildung f als Relation (also als Menge von Paaren). Ferner prüfe man, ob die Funktion f injektiv bzw. surjektiv ist.

Weiterhin betrachten wir auf der Menge B die Relation

$$R = \{(b_1, b_2) \in B \times B \mid f(b_1) = f(b_2)\}.$$

(ii) Man formuliere in Worten, was die Relation $b_1 \, R \, b_2$ für zwei Lego-Steine $b_1, b_2 \in B$ bedeutet.

(iii) Man überprüfe, ob die Relation R eine Äquivalenzrelation auf B ist.

(iv) Oleg hat 5 lila, 7 blaue und 8 grüne Steine. Man berechne die Mächtigkeiten $|B|$ und $|R|$ in diesem Fall.

(v) Es gelte $|F| = 3$. Man beweise:

$$|F| \cdot |R| \geq |B|^2.$$

AUFGABE 2

a) Im Finale der Basketball EM standen sich letzte Woche Deutschland und die Türkei gegenüber. Am Anfang des Spieles gaben die fünf Startspieler von Deutschland, Obst, Schröder, Wagner, Theis und Bonga jeweils jedem der fünf Startspieler der Türkei Larkin, Hazer, Osman, Sengun und Osmani die Hand. Wie oft wurde sich dabei insgesamt die Hände geschüttelt?

b) Geben Sie die Mächtigkeit der Menge

$$\{Obst,\ Schröder,\ Wagner,\ Theis,\ Bonga\} \times \{Larkin,\ Hazer,\ Osman,\ Sengun,\ Osmani\}$$

an.

c) Geben Sie an, wie viele Summanden der Term hat, der entsteht, wenn man das folgende Produkt ausmultipliziert:

$$(O_1 + S_1 + W + T + B) \cdot (L + H + O_2 + S_2 + O_3)$$

Aufgabe 3

Es wird Ihnen folgende Aussage mit Begründung vorgelegt:

Aussage. Seien A, B, C Mengen, wobei $A \neq \emptyset$ ist. Dann gilt

$$A \times B = A \times C \Rightarrow B = C.$$

Begründung. Es gelte $A \times B = A \times C$. Nun verwenden wir eine aus der Schule bekannte Regel für reelle Zahlen a, b, c, nämlich:

> Aus $a \cdot b = a \cdot c$ und $a \neq 0$ folgt nach Division durch a
>
> $$\frac{a \cdot b}{a} = \frac{a \cdot c}{a}$$
>
> und damit die Gleichheit $b = c$.

Nun wenden wir diese Regel auf die obige Situation an. Da nun ebenfalls $A \neq \emptyset$ ist, folgt also entsprechend dem Schulbeispiel aus

$$\frac{A \times B}{A} = \frac{A \times C}{A}$$

die Mengengleichheit $B = C$. Damit ist der Beweis für die obige Aussage erbracht.

a) Ist die obige *Aussage* wahr oder falsch? Ein Wort als Antwort genügt!

b) Bewerten Sie kurz die oben gegebene *Begründung*. Vielleicht sind einige der folgenden Begriffe hilfreich: Struktur, Methode, Korrektheit, Variableneinführung, ..., korrigieren Sie ggf.

Aufgabe 4

Man gebe zu jeder der 6 angegebenen Mengen A, B, C, D, E, F jeweils zwei verschiedene Elemente an. Dann bestimmen man jeweils die Mächtigkeit der 6 Mengen.

a) $A = \{X \mid X \subseteq \{1,2,3\}\}$,
   z.B. wäre hier $X_1 = \{1,3\}$ ein Element der Menge A.

b) $B = \{Y \subseteq \{1,2,3,4,5\} \mid \ |Y| = 2\}\}$

c) $C = \{1,2,3\} \times \{4,5,6\}$

d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$

   Erinnerung: Für eine Menge A gilt $A^3 := A \times A \times A$

e) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \{1,2,3,4,5\}^3 \mid x_1 < x_2 < x_3\}$

f) $F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \times \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \mid A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{1,2,3\}\}$

Aufgabe 5

Definition. Sei M eine Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ und $P(M)$ ihre Potenzmenge. Bekanntlich gilt dann $|P(M)| = 2^n$.

Wir geben eine erstes Beispiel. Sei $M = \{1,2\}$, dann sind die Mengen $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ allesamt Teilmengen von M. Es gilt daher

$$|P(M)| = |\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}| = 4 = 2^2.$$

Es folgt eine weitere Begriffsbildung.
Definition. Wir nennen ein Element X der Potenzmenge *geradelementig*, wenn $|X| \in 2\mathbb{Z}$ und *ungeradelementig*, wenn $|X| \in 2\mathbb{Z} - 1$.

Im obigen Beispiel sind die beiden Mengen $\{1\}, \{2\}$ einelementig, also können wir sie ungeradelementig nennen. Dagegen hat die Teilemnge $\{1,2\}$ offenbar zwei Elemente, und da $2 \in 2\mathbb{Z}$ gilt, können wir diese Menge geradelementig nennen.
Für die leere Menge gilt: $|\emptyset| = 0 \in 2\mathbb{Z}$, also ist die leere Menge auch geradelementig.

a) Es sei nun $M := \{a, b, c, d, e, f\}$ eine 6-elementige Menge.

(i) Man gebe einige Teilmengen von M an und bestimme die Anzahl aller Teilmengen von M, also die Mächtigkeit von der Potenzmenge von M.

(ii) Man gebe zwei ungeradelementige Mengen $X, Y \in P(M)$ mit $|X| \neq |Y|$ so an, dass $X \cup Y = M$ gilt.

(iii) Man gebe die Anzahl der geradelementigen und die Anzahl der ungeradelementigen Mengen von $P(M)$ an.

(iv) Man zeige, dass es zu jeder geradelementigen Menge $X \in P(M)$ eine geradelementige Menge $X' \in P(M)$ mit $X \cap X' = \emptyset$ und $X \cup X' = M$ gibt.

b) Sei M eine Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, also $|M| = n$.

(i) Man gebe
$|\{X \in P(M) \mid X \textit{ ist geradelementig}\}|$ und
$|\{X \in P(M) \mid X \textit{ ist ungeradelementig}\}|$ an.

(ii) Man berechne $|\{X \in P(M) \mid X \textit{ ist geradelementig}\}| + |\{X \in P(M) \mid X \textit{ ist ungeradelementig}\}|$ und analysiere das Resultat.

Aufgabe 6

Pauline und Sophie spielen Kniffel.

a) Als Pauline dran ist, hat sie nach zwei Würfen ⚀ ⚀ ⚂ ⚄ ⚅ vor sich liegen. In der Hoffnung, Full-House uder einen Viererpasch zu werfen, entscheidet sie sich, alles bis auf ⚀ ⚀ noch einmal zu werfen. Untersuchen Sie, ob Pauline eher mit einem Full-House oder einem Viererpasch rechnen kann.

b) Nach zwei ihrer drei Würfe hat Sophie ⚀ ⚂ ⚃ ⚄ ⚄ vor sich liegen und überlegt, welche Würfel sie in ihrem dritten und letzten Wurf noch einmal werfen sollte. Entscheiden Sie, ob Sophie im dritten Wurf ⚀ und eine ⚄ oder nur ⚄ noch einmal werfen sollte, wenn sie eine große Straße bekommen möchte.