ÜBUNG 2

Am kommenden Mittwoch (zukünftig in OSL 243) besprechen wir erneut das *Multiplikationsprinzip*, es besagt abstrakt:
Wenn ein kombinatorisches Objekt aus zwei Komponenten so besteht, dass die erste Komponente auf m Arten gewählt werden kann und die zweite unabhängig von der Wahl der ersten auf n Arten, dann gibt es insgesamt $m \cdot n$ Objekte.
Die mengentheoretische Grundlage dazu kennen Sie bereits:
Seien A, B zwei endliche Mengen, dann gilt

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Wir geben ein Beispiel für die Anwendung des Prinzips.
Wir wollen ein Kennzeichen bilden:

- Zuerst einen Buchstaben: $M = \{A, B, C\}$ (3 Wahlmöglichkeiten).
- Dann eine Ziffer: $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ (4 Wahlmöglichkeiten).
- Als Kennzeichnen kommen zum Beispiel $A3$ oder $B1$ in Frage.

Wie viele Kennzeichen gibt es insgesamt? Nach dem Multiplikationsprinzip von oben gilt:

$$|M \times Z| = |M| \cdot |Z| = 3 \cdot 4 = 12.$$

Die Menge aller Kennzeichen ist das kartesische Produkt:

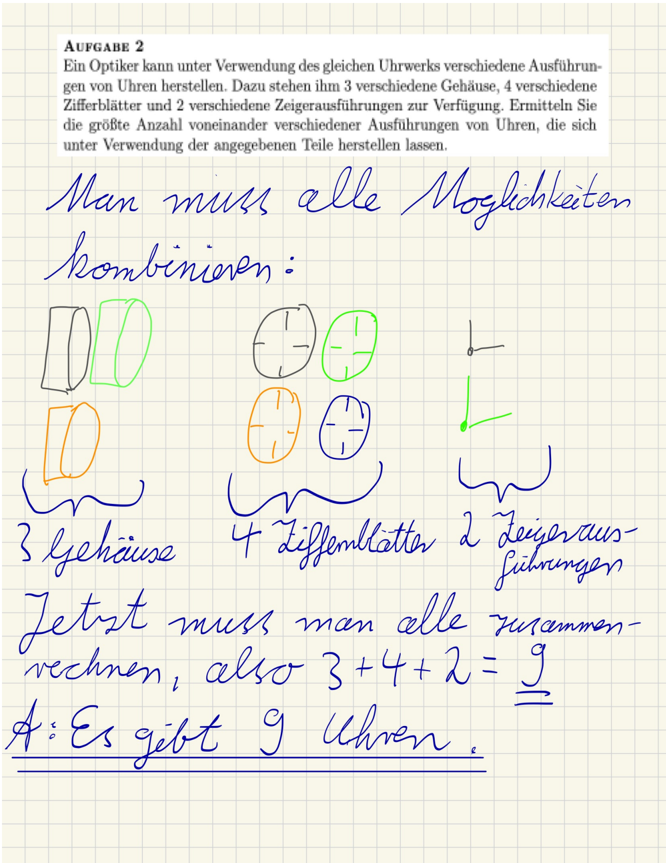
$$M \times Z =$$

$$\{(A,1),(A,2),(A,3),(A,4),(B,1),(B,2),(B,3),(B,4),(C,1),(C,2),(C,3),(C,4)\}.$$

Es gibt also 12 mögliche Kennzeichen.

Aufgabe 1

Begeistert von der Stochastik-Vorlesung beschließen Sie, in Ihrer Mathe-AG für die Klassenstufe 5 Kombinatorik zu machen. Dort bearbeiten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 2 des ersten Zettels und geben Ihnen ihre Lösungen ab. Hier eine der Lösungen:



Aufgabe 2

Ein Optiker kann unter Verwendung des gleichen Uhrwerks verschiedene Ausführungen von Uhren herstellen. Dazu stehen ihm 3 verschiedene Gehäuse, 4 verschiedene Zifferblätter und 2 verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung. Ermitteln Sie die größte Anzahl voneinander verschiedener Ausführungen von Uhren, die sich unter Verwendung der angegebenen Teile herstellen lassen.

a) Beschreiben Sie Fehler in der Schülerlösung.

b) Verfassen Sie einen kurzen an den Schüler adressierten Text, der diesem die richtige Lösung erklärt.

AUFGABE 2

In einem Freizeitpark gibt es ein Mittagsangebot. Jede Besucherin und jeder Besucher kann sich dabei ein Menü zusammenstellen. Zur Auswahl stehen:

- **Getränke**: Wasser, Cola oder Apfelsaft
- **Hauptgerichte**: Pizza, Burger, Salat oder Nudeln
- **Beilagen**: Pommes, Gemüse oder Reis
- **Desserts**: Eis, Muffin oder Obstsalat
- **Extras**: Ketchup oder Mayonnaise

Jede Person wählt als Menü genau ein Getränk, ein Hauptgericht, eine Beilage, ein Dessert und ein Extra.

a) Man gebe einige Beispielmenüs explizit an.

b) Man gebe die Anzahl aller verschiedener Menü-Kombinationen an.

c) Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn man beim Dessert statt nur einer auch keins oder zwei wählen darf?

AUFGABE 3

In einer Schachtel sind genau 100 Kugeln. Diese Kugeln sind jeweils beginnend mit 00, dann 01, 02, ... bis 99 durchnummeriert. Sei dabei A die erste, B die zweite Ziffer.
Man bestimme die Anzahl der Möglichkeiten beim zufälligen Ziehen einer Kugel aus der Schachtel, wenn

a) die erste Ziffer eine 3 ist,

b) die zweite Ziffer durch 4 teilbar ist,

c) die erste Ziffer von der zweiten Ziffer verschieden ist,

d) die Summe der beiden Ziffern ungleich 7 sind.

AUFGABE 4

Bei einem geheimen Treffen sprechen 100 Zauberlehrlinge über ihre genialsten Zaubersprüche. Dabei stellt sich heraus, dass genau 70 von ihnen den Spruch Expelliarmus (der den Gegner mit einem roten Lichtstrahl entwaffnet) und genau 60 von ihnen den Spruch Levicorpus (der den Gegner kopfüber in der Luft hängen lässt) kennen. Jeder Zauberlehrling kennt mindestens einen der beiden Sprüche.

a) Ermitteln Sie, wie viele Zauberlehrlinge beide Sprüche kennen, und stellen Sie Ihren Lösungsweg möglichst anschaulich dar.

Wir abstrahieren die Situation und betrachten nun eine endliche Menge A (der Zauberlehrlinge, die den ersten Zauberspruch beherrschen) und eine endliche Menge B (der Zauberlehrlinge, die den zweiten Zauberspruch beherrschen). Dann ist $A \cup B$ die Vereinigungsmenge (aller Zauberlehrlinge, die mindestens einen der Zaubersprüche beherrschen).

b) Illustrieren Sie die Gleichung

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \tag{1}$$

mit Hilfe eines Venndiagramms.

c) Eine algebraische Möglichkeit, Gleichung (1) zu beweisen, ist eine Modellierung des Geschehens durch passende Variablen.

Zu diesem Zweck sei $a \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zauberlehrlinge, die nur den ersten Spruch kennen, $b \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zauberlehrlinge, die nur den zweiten Spruch kennnen, und $c \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zauberlehrlinge, die beide Sprüche kennen.

(i) Geben die die Mächtigkeiten der folgenden vier Mengen an:

$|A| =$ __________ $\qquad |A \cap B| =$ __________

$|B| =$ __________ $\qquad |A \cup B| =$ __________

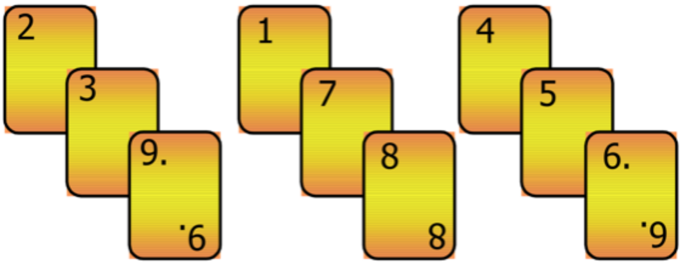
(ii) Beweisen Sie anhand des Modells die Gleichung (1) sowie die Gleichung

$$|A \cap B| \cdot |A \cup B| = |A| \cdot |B| - \left|\overline{A}\right| \cdot \left|\overline{B}\right| ; \tag{2}$$

hierbei bezeichne $\overline{A}$ die Menge aller Zauberlehrlinge, die nur den ersten Zauberspruch beherrschen, und $\overline{B}$ die Menge aller Zauberlehrlinge, die nur den zweiten Zauberspruch beherrschen.

Aufgabe 5

Neun Karten mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ werden in drei Haufen so ausgelegt wie in der folgenden Abbildung.



Zwei Spieler A, B wählen nacheinander einen Kartenhaufen. Jeder Spieler mischt seinen Kartenhaufen verdeckt und zieht daraus zufällig eine Karte. Gewonnen hat derjenige, dessen Karte eine höhere Zahl zeigt.
Wählt beispielsweise A Haufen 1 und B Haufen 3, dann könnte A die Karte mit der Zahl 3 ziehen und B die Karte mit der Zahl 4 und hätte damit gewonnen.
Für ein neues Spiel wird die Karte in den jeweiligen Haufen zurückgelegt. Die beiden Spieler A, B wählen nacheinander erneut einen Kartenhaufen. Es wird erneut gemischt und wieder je eine Karte aus dem Haufen gezogen.

a) Spielen Sie das Spiel einige Runden und notieren Sie einige Spielabläufe.

b) Notieren Sie alle möglichen Spielverläufe und kennzeichnen Sie wer wann gewinnt und wer wann verliert.

c) Beschreiben Sie einige Besonderheiten des Spiels.