ÜBUNG 12

AUFGABE 1

Um auf den Campus der EUF zu gelangen, nimmt Bjarne morgens immer einen Bus vom ZOB. Er nimmt entweder

- die Linie 5A, die morgens stündlich um 0, 20 und 40 Minuten nach der vollen Stunde (also zum Beispiel um 8:00, 8:20 und 8:40 Uhr) abfährt,
- oder die Linie 8A, die morgens stündlich um 15, 35 und 55 Minuten nach der vollen Stunde (also zum Beispiel um 8:15, 8:35 und 8:55 Uhr) abfährt.

Beispiele: Wenn Bjarne um 9:27 Uhr am ZOB ankommt, nimmt er den nächsten Bus der Linie 8A um 9:35 Uhr und hat eine Wartezeit von 8 Minuten. Kommt er dagegen genau um 9:40 Uhr am ZOB an, erreicht er die Linie 5A um 9:40 Uhr, ohne warten zu müsssen.

a) Bjarne erreicht den ZOB um 7:23 Uhr. Man gebe an, welche Linie er nimmt und wie lange er auf den Bus warten muss.

Wir möchten die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass Bjarne mit der Linie 5A fährt. Bjarnes zufälliges Eintreffen am ZOB beschreiben wir durch die Minutenzahl auf seiner Uhr, also durch die Zahlen 0, 1, 2, . . . , 59.

b) (i) Beschreiben Sie formal die Grundmenge dieses Zufallsexperimentes:

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \underline{\hspace{4cm}}\}.$$

(ii) Geben Sie ihre Mächtigkeit an:

$$|\Omega| = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Das Ereignis, dass Bjarne die Linie 5A nimmt, beschreiben wir durch eine Menge $E_{5A} \subseteq \Omega$ von passenden Minutenzahlen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion wählen wir laplace-artig.

c) (i) Beschreiben Sie die Menge E_{5A}, indem Sie alle ihre Elemente auflisten:

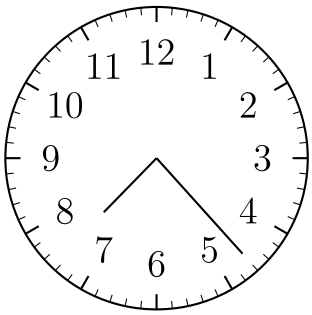
$$E_{5A} = \{\underline{\hspace{3cm}}, 18, 19, 20, \underline{\hspace{5cm}}\}.$$

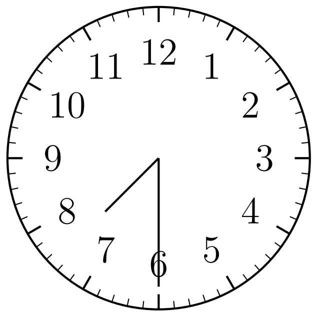
(ii) Geben Sie die Mächtigkeit sowie die Wahrscheinlichkeit an:

$$|E_{5A}| = \underline{\hspace{1.5cm}}, \qquad P(E_{5A}) = \frac{|E_{5A}|}{|\Omega|} = \underline{\hspace{1.5cm}} = \underline{\hspace{1.5cm}}.$$

Bjarne sagt: „Heute habe ich nicht mehr als drei Minuten auf den Bus warten müssen. Ich habe mir aber nicht gemerkt, mit welcher Linie ich gefahren bin.“
Wir möchten wissen, ob diese neue Information Einfluss auf die Frage hat, welche Linie Bjarne heute bekommen hat. Zu diesem Zweck beschreiben wir Bjarnes Wartezeit von höchstens drei Minuten als eine Teilmenge $B \subseteq \Omega$.

d) (i) Stellen Sie auf der ersten Uhr die Intervalle, in denen Bjarne die Linien 5A und 8A nimmt, in verschiedenen Farben dar. Visualisieren sie auf der zweiten Uhr die Menge B.





(ii) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. Geben Sie zu jedem Eintrag eine kurze Erklärung.

	E_{5A}	$\overline{E_{5A}}$	
B			
$\overline{B}$			

(iii) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(E_{5A})$.

(iv) Beurteilen Sie, ob die Ereignisse B und E_{5A} stochastisch unabhängig sind. Interpretieren Sie Ihre Antwort im Sachzusammenhang.

(v) Visualisieren Sie das Geschehen durch zwei verschiedene Baumdiagramme, wobei ein Baum sich zuerst nach B verzweigt und ein Baum sich zuerst nach E_{5A} verzweigt.

Aufgabe 2

Am Abend vor der Klausur beginnen die Studierenden X. und Y. zu lernen. In der kurzen Zeit können sie sich aber die Abzählformeln für die Zählprinzipien nicht merken. Also schleichen sie in die Uni und verstecken unter einigen der 100 möglichen Sitzplätze im Klausurraum Spickzettel. Weil das Druckerpapier genauso knapp bemessen wie die Lernzeit ist, reicht es nur für 20 Spickzettel.

a) Geben Sie einen Term an für die Anzahl an Möglichkeiten die Zettel auf die Plätze zu verteilen, wenn beide maximal einen Zettel pro Platz verstecken.

b) Die beiden merken, dass ihre Chancen nicht allzu gut stehen. Also beschließen Sie in den 20 Fünferreihen die Plätze etwas strategischer zu bestücken. Sie hoffen, dass sie, weil ihre Namen alphabetisch nebeneinander sind, nebeneinander sitzen. Dann reicht es, dass einer einen Spickzettel hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer von Ihnen einen Spickzettel erhält, wenn Sie die Zettel optimal verteilen (Darüber wo sie genau sitzen, haben sie natürlich weiterhin keine Infos).

c) Während der Klausur merkt X., dass er leider einen Platz ohne Spickzettel abbekommen hat und auch nicht neben Y. sitzt. Y. hat aber Glück bei der Platzwahl gehabt. Um X. zu helfen, geht Y. auf Toilette und schreibt seine vermeidlichen Lösungen hastig von innen auf die Tür der Kabine. X. schaltet schnell und geht direkt nach Y. auf Toilette. Und tatsächlich findet er dort drei von Y. aufgeschriebene Zahlen. Nur kann er nicht erkennen, welches Ergebnis zu welcher Aufgabe gehört. Außerdem hat die Klausur vier und nicht drei Aufgaben! Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für X. die Zahlen zu den Aufgaben zu schreiben! (Wir nehmen an, jede Aufgabe hat als Lösung genau eine Zahl und wir nehmen an X benutzt jede Zahl nur einmal)

d) Nach der Klausur beschwert sich X. bei Y. darüber, dass nur drei statt 4 Lösungen und die auch noch unsortiert auf der Tür standen und X. also eine Aufgabe weglassen musste. Y. entgegnet daraufhin: 'Es kam bei zwei der Aufgaben dasselbe Ergebnis raus!' Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X. mindestens die Hälfte der Aufgaben richtig beantwortet und somit bestanden hat.

AUFGABE 3

Tick, Trick und Track bekommen zu Weihnachten Mützen mit ihren Namen geschenkt. Als Ihr Onkel Donald die Geschenke am Abend vor Weihnachten hastig einpackt, vergisst er leider, sich zu merken, für wen welchen Geschenk ist. Weil er die drei ohne beschriftete Mützen sowieso nicht auseinanderhalten kann, drückt er am Weihnachtsmorgen einfach wahllos jedem eines der Pakete in die Hand.

a) Bestimmen Sie mithilfe einer Modellierung die Wahrscheinlichkeiten, dass

   (i) keiner
   (ii) einer
   (iii) zwei
   (iv) drei

   der Neffen die richtige Mütze bekommen.

b) Berechnen Sie mithilfe Ihrer Modellierung die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei die richtige Mütze zu bekommen, wenn Trick die richtige Mütze bekommt.

c) Bestimmen Sie, ob die Ereignisse, dass Trick die richtige Mütze bekommt und, dass Track die Mütze von Tick bekommt, unabhängig sind.

AUFGABE 4

a) Schneewittchen und die 7 Zwerge spielen Fußball (4 gegen 4). Wegen Ihres Größenvorteils gewinnt eigentlich immer das Viererteam von Schneewittchen. Bestimmen Sie mithilfe eines geeigneten Modells die Wahrscheinlichkeit, dass Zwerg Nummer 1 mit seinem Team die Partie gewinnt.

b) In der Slowakei ist das Märchen etwas anders überliefert. Man kennt es dort als Schneewittchen und die 12 Bergknaben. Nehmen wir an, in der slowakischen Variante wird ebenfalls Fußball gespielt, jetzt gezwungenermaßen 6 gegen 7. Nehmen wir weiter an, dass das Siebenerteam gewinnt, außer sowohl Schneewittchen als auch der besonders fußballbegabte Bergknabe Hamsik spielen im Sechserteam. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, dass Schneewittchen das Spiel gewinnt.

c) Bestimmen Sie im Setting der vorigen Teilaufgabe, ob die Ereignisse, dass Bergknabe Mintal gewinnt und, dass Schneewittchen und Hamsik zusammen im Sechserteam spielen unabhängig sind.