ÜBUNG 11

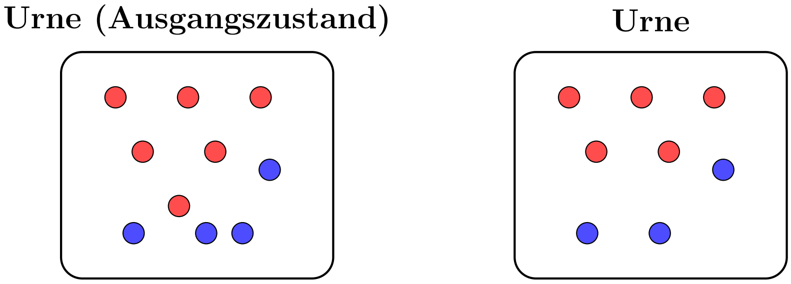
letzte Übung

AUFGABE 1

*Mit dieser Aufgabe zum Themenfeld **bedingte Wahrscheinlichkeit** möchten wir Sie Schritt für Schritt beim Lösungsweg begleiten. Dazu füllen Sie einfach die ...... durch passende Objekte aus. Wenn Sie die Aufgabe lieber eigenständig bearbeiten möchten, können Sie die Anleitung selbstverständlich auch überspringen. Aus didaktischer Sicht handelt es sich um das **Führen einer Aufgabe**. Diese vorliegende Form der Aufgabenführung basiert auf der Bereitstellung eines partiell prästrukturierten Lösungswegs, der durch gezielt gesetzte Auslassungen ergänzt wird. Aus mathematikdidaktischer Perspektive ist dieses Vorgehen jedoch nicht unproblematisch. Durch die Vorstrukturierung wird ein spezifischer Problemlösepfad normativ gesetzt, der potenziell divergente Denkprozesse der Lernenden kanalisiert. Dies kann zu einer Reduktion der grundsätzlichen Offenheit der Aufgabe bzw. Lösungsweges führen und damit sowohl die Generierung eigener heuristischer Strategien als auch die Entwicklung kreativer Problemlösekompetenzen limitieren. Die intendierte Unterstützung schlägt damit unter Umständen in eine Einschränkung des individuellen Lernraums um, da alternative Lösungswege, spontane Entdeckungen und subjektive Sinnkonstruktionen nur begrenzt möglich bleiben, aber entscheiden Sie selbst.*

Sei R eine Menge mit sechs roten Kugeln und B eine Menge mit vier blauen Kugeln. Alle Kugeln werden in eine Urne gelegt, anschließend werden zwei Kugeln gezogen und (unbesehen) weggelegt. Dann werden wieder zwei Kugeln gezogen. Diese beiden Kugeln haben die Farbe **BLAU**.

Hier ist eine Veranschaulichung für eine solche Ziehung



*In dieser Illustration wurde offensichtlich eine **rote** und eine **blaue** Kugel gezogen.*

Kommen wir jetzt zur

Aufgabenstellung:
Man definiere für dieses Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die weggelegten Kugeln beide die Farbe ROT hatten. Dazu definiere man die beiden involvierten Ereignisse, die man gut mit X und Y abkürzen kann.

Anleitung:

- In diesem Fall können wir sehr gut den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) bzw. das Experiment durch Mengen modellieren, d.h. Ω sollte das Ziehen zweier Kugeln beschreiben; wir wählen also

$$\Omega := \{T \mid T \subseteq R \cup \ldots,\ |\ldots| = \ldots\}$$

- Jetzt lassen sich damit die beiden zentralen Ereignisse X, Y definieren, es gilt also

$$X := \{\ldots \in \Omega \mid \ldots \subseteq \ldots\},$$

  die beiden weggelegten Kugeln sind rot.

  Und

$$Y := \{\ldots \in \Omega \mid \ldots \subseteq \ldots\},$$

  die beiden gezogenen Kugeln sind blau.

- Die gesuchte .... Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P_Y(X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

- Wir versuchen nun, die Wahrscheinlichkeit $P(X \cap Y)$ mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit zu bestimmen:
  - Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden weggelegten Kugeln ...... sind:

$$P(X) = \frac{\binom{\cdots}{2}}{\binom{\cdots}{2}} = \frac{\cdots}{\cdots}.$$

  - Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln ...... sind, lautet:

$$P_X(Y) = \frac{\binom{\cdots}{2}}{\binom{\cdots}{2}} = \frac{\cdots}{\cdots}.$$

  - Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden weggelegten Kugeln rot sind *und* die beiden gezogenen Kugeln blau sind, ergibt sich aus den vorherigen Überlegungen zu:

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P_X(Y) = \frac{1}{14}$$

- Wir versuchen nun, die Wahrscheinlichkeit $P(Y)$ mit Hilfe des Satzes über die *totale Wahrscheinlichkeit* zu berechnen; zur Berechnung werden wir drei Fälle unterscheiden müssen:
  - Fall 1: X: Die beiden weggelegten Kugeln sind rot.
  - Fall 2: X': Die beiden weggelegten Kugeln sind rot und blau.
  - Fall 3: X": Die beiden weggelegten Kugeln sind blau.
  - Die totale Wahrscheinlichkeit $P(Y)$ berechnet sich aus der Summe der drei zugehörigen Wahrscheinlichkeiten zu:

$$P(Y) = P_X(Y) \cdot P(\dots) + P_{X'}(Y) \cdot P(\dots) + P_{X''}(Y) \cdot P(\dots)$$

$$P(Y) = \frac{1}{14} + \frac{8}{105} + \frac{1}{35} = \frac{25}{105} = \frac{5}{21}$$

- Bilden wir nun den Quotienten der beiden ermittelten Wahrscheinlichkeiten $P(X \cap Y), P(X)$ folgt zusammenfassend die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P_Y(X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots \cdot \dots} = \frac{\dots}{25} = 56\%$$

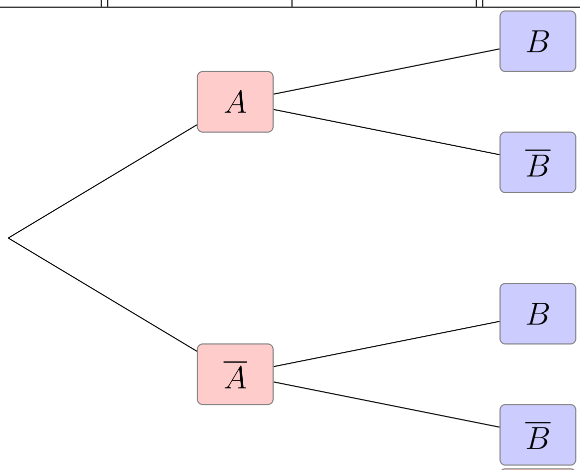
Aufgabe 2

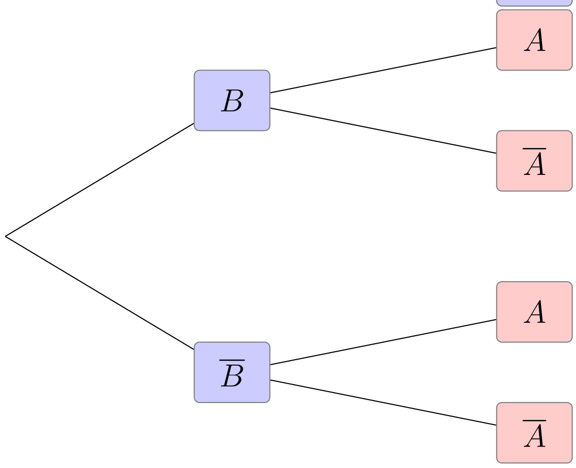
Vervollständigen Sie die u.a. Vierfeldertafel und erstellen Sie ein Baumdiagramm mit ***allen*** Wahrscheinlichkeiten

a) mit dem Ereignis A auf der ersten Stufe,

b) mit dem Ereignis B auf der ersten Stufe.

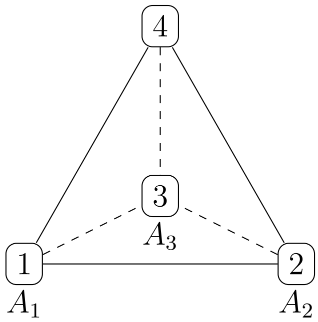
	A	$\overline{A}$	
B	$0,2$		
$\overline{B}$			$0,7$
		$0,4$	





Aufgabe 3

In drei verschiedenen Ecken eines Tetraeders sitzen drei Ameisen A_1, A_2 und A_3. Als die Kirchturmuhr 12 Uhr schlägt, bewegt sich jede Ameise mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf eine der drei benachbarten Ecken.
Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine zwei Ameisen dieselbe Ecke besetzen, nachdem die Glocke geschlagen hat.



Beispiel 1: Das Ereignis tritt ein.

- $A_1\colon 1 \to 3$
- $A_2\colon 2 \to 4$
- $A_3\colon 3 \to 1$

Beispiel 2: Das Ereignis tritt nicht ein.

- $A_1\colon 1 \to 2$
- $A_2\colon 2 \to 3$
- $A_3\colon 3 \to 2$

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, modellieren wir die Situation durch Mengen. Dazu sei i für jedes $i \in \{1,2,3\}$ die Ecke des Tetraeders, auf der die Ameise A_i ursprünglich sitzt, und 4 die vierte Ecke des Tetraeders. Dann beschreibt die Menge

$$\Omega = \{2,3,4\} \times \{1,3,4\} \times \{1,2,4\}$$

alle möglichen Positionen der Ameisen A_1, A_2 und A_3 nach dem Glockenschlag. Unsere Wahrscheinlichkeitsfunktion P sei laplace-artig.

a) Begründen Sie kurz, warum $|\Omega| = 27$ gilt.

Das Ereignis, dass keine zwei Ameisen in die gleiche Ecke gehen, beschreiben wir durch die Menge

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_1 \neq x_2 \text{ und } x_2 \neq x_3 \text{ und } x_3 \neq x_1\} \subseteq \Omega.$$

Es gilt $|E| = 11$.

b) Geben Sie die Menge E an, indem Sie ihre elf Elemente auflisten.

Nach der Formel von Laplace ist nun

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{11}{27}.$$

Ein Beobachter berichtet: „Die Ameise A_2 bewegt sich in die Ecke, in der zuvor A_3 gewesen ist.“
Wir möchten nun untersuchen, welchen Einfluss diese neue Information auf die soeben berechnete Wahrscheinlichkeit hat. Hat die Aussage des Beobachters die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E eintritt, erhöht oder verringert?
Dazu modellieren wir die Auskunft des Beobachters als eine Bedingung

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_2 = 3\} \subseteq \Omega.$$

Es gilt $|B| = 9$.

c) Geben Sie die Menge B an, indem Sie ihre neun Elemente auflisten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E unter der Voraussetzung B eintritt, ist die <u>bedingte Wahrscheinlichkeit</u>

$$P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}.$$

d) Zeigen Sie durch eine kurze Rechnung, dass nicht nur in diesem ameisenartigen, sondern in jedem laplace-artigen Wahrscheinlichkeitsraum gilt:

$$P_B(E) = \frac{|E \cap B|}{|B|}.$$

Es gilt $|E \cap B| = 4$.

e) Geben Sie die Menge $E \cap B$ an, indem Sie ihre vier Elemente auflisten.

Damit ist

$$P_B(E) = \frac{4}{9} = \frac{12}{27} > \frac{11}{27} = P(E).$$

Die Information des Beobachters hat die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E also erhöht.
Dieses Phänomen hängt mir der Abhängigkeit der Ereignisse E und B zusammen. Wir erinnern uns, dass zwei Ereignisse $X, Y \subseteq \Omega$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum <u>stochastisch unabhängig</u> heißen, falls $P(X) \cdot P(Y) = P(X \cap Y)$ gilt.

f) Zeigen Sie durch eine kurze Rechnung, dass zwei nicht-leere Ereignisse X und Y in einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn $P_Y(X) = P(X)$ gilt.

g) Beurteilen Sie, ob die Ereignisse E und B stochastisch unabhängig sind.

h) Beschreiben Sie die Ereignisse X und Y als Teilmengen von Ω, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_Y(X)$ und $P(X)$ und beurteilen Sie, ob X und Y stochastisch unabhängig sind:

- $X:$ Die Ameise A_1 geht zur Ecke 4.
- $Y:$ Die Ameise A_3 geht nicht zur Ecke 4.

AUFGABE 4

Bei einem geheimen Treffen spricht eine Gruppe von Zauberlehrlingen über ihre genialsten Zaubersprüche. Dabei stellt sich heraus, dass genau 70% von ihnen den Spruch Expelliarmus (der den Gegner mit einem roten Lichtstrahl entwaffnet) und genau 60% von ihnen den Spruch Levicorpus (der den Gegner kopfüber in der Luft hängen lässt) kennen. Jeder Zauberlehrling kennt mindestens einen der beiden Sprüche.

a) Ein Zauberlehrling wird zufällig ausgewählt. Man ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass er beide Zaubersprüche kennt.

b) Sind die Ereignisse, dass der ausgewählte Zauberlehrling Expelliarmus bzw. Levicorpus kennt, stochastisch unabhängig?