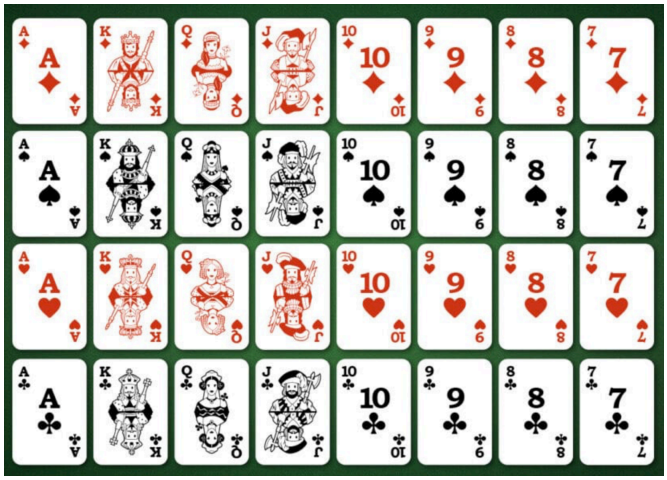
Übung 8

Aufgabe 1

In dieser Aufgaben möchten wir zwei Modellierungen zu einer Aufgabenstellung angeben.



Dazu haben wir ein gewöhnliches Skatblatt.
Ein gewöhnliches Skatblatt besteht aus **32 Spielkarten** in den vier **Farben** Kreuz (♣), Pik (♠), Herz (♡) und Karo (♢). Jede Farbe enthält die Karten

7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass.

Das Skatblatt wird vor allem für das Kartenspiel *Skat* verwendet, das mit **drei Spielern** gespielt wird. In dieser Aufgabe spielt aber nur eine Person.

Kommen wir jetzt zur Aufgabenstellung:

> Ein Spieler besitzt zu Beginn zwei Asse auf der Hand.
> Aus den noch vorhandenen 30 Karten werden drei Karten zufällig gezogen.
> Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach insgesamt vier Asse unter den fünf Handkarten befinden.

Entlang des nun folgenden Lesetextes befinden sich einige kleine Arbeitsaufträge in blau, die Sie bitte bearbeiten.

Wir wollen nun zwei vollständige Modellierungen angeben, fangen wir mit der Modellierung der **Grundmenge** Ω an. Grundsätzlich haben wir zwei Möglichkeiten,

Modellierung mit Mengen oder Modellierung mit Tupeln. Wir beginnen mit einer Tupel-Modellierung und beantworten die Aufgabenstellung in diesem Modell. Danach modellieren wir mithilfe von Mengen und hoffen, dasselbe Ergebnis zu erhalten. Im Hinterkopf behalten wir unsere Strategie der Vorlesung: wenn möglich, modelliere stets laplace-artig!

Modell (Tupel)
Wir beginnen mit

$$\Omega := \{(a, b, c) \mid \dots\}$$

und stellen uns nun die Frage, aus welcher Menge eigentlich das Tripel (a, b, c) gewählt werden soll? Hm, ja irgendwie aus den verbliebenen 30 Karten, oder? Wir müssen also für die Karten irgendwelche Buchstaben erfinden. Wir schlagen die selbsterklärenden Variablen $7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 8_1, \dots, B_1, B_2, \dots, A_1, A_2$ vor und ergänzen, dass die beiden Asse auf der Hand des Spielers o.B.d.A. A_3 und A_4 waren. Nun können wir komplettieren

$$\Omega := \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \{7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 8_1, \dots, B_1, B_2, \dots, D_1, \dots, K_1, \dots, A_1, A_2\}\}$$

Alles gut? Nicht so ganz, denn wir müssen schon schauen, dass die drei Karten paarweise verschieden (p.v.) sind, also ergänzen wir in der Grundmenge

$$\Omega_1 := \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \{7_1, \dots, 8_1, \dots, B_1, \dots, D_1, \dots, K_1, \dots, A_1, A_2\}, a, b, c \text{ p.v.}\}$$

Es gibt natürlich sehr viele Varianten zu dieser Grundmenge, auch ohne die $\dots$. Wir geben mal eine an: Sei K die Menge aller 28 Karten (halt ohne die Asse) und sei A die Menge der zwei Asse. Dann könnten wir die Grundmenge auch folgendermaßen modellieren

$$\Omega_2 := \{(a, b, c) \mid a, b, c \in K \cup A, a \neq b, a \neq c, b \neq c\}$$

Die letzte Aufzählung $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ ist äquivalent zur Aussage a, b, c *sind paarweise verschieden*.

- Warum reicht eigentlich nicht $a \neq b \neq c$

Im nächsten Schritt der Modellierung möchten wir das betreffende **Ereignis** - wir nennen es hier V - mit Hilfe der Grundmenge beschreiben. Wir modellieren also nun die zufällige Wahl der drei Karten so, dass wir auch die beiden letzten Asse auf der Hand halten.
Benutzen wir die Grundmenge Ω_1 so erhalten wir

$$V = \{(a, b, c) \in \Omega_1 \mid a, b \in \{A_1, A_2\} \textit{ oder } a, c \in \{A_1, A_2\} \textit{ oder } b, c \in \{A_1, A_2\}\}$$

Man könnte diese Ereignismenge V auch in drei Teilmengen aufsplitten, etwa so

$$V_1 = \{(a,b,c) \in \Omega_1 \mid a,b \in \{A_1, A_2\}\}$$

$$V_2 = \{(a,b,c) \in \Omega_1 \mid a,c \in \{A_1, A_2\}\}$$

$$V_3 = \{(a,b,c) \in \Omega_1 \mid b,c \in \{A_1, A_2\}\}$$

Es ergeben Sie die Mächtigkeiten

$$\mid V_i \mid = 2 \cdot 28$$

- Erklären Sie die Rechung!
- Gilt dann eigentlich $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ und sind dann auch alle drei Schnitte $V_1 \cap V_2, V_1 \cap V_3, V_2 \cap V_3$ leer?

Jetzt wollen wir einmal mit der anderen Grundmenge Ω_2 die betreffende Teilmenge V (wir nennen sie einfach auch V) angeben, etwa so

$$V = \{(a,b,c) \in \Omega_2 \mid \{a,b\} = A \textit{ oder } \{a,c\} = A \textit{ oder } \{b,c\} = A\}$$

Entscheiden Sie selbst, welche der beiden Ereignismengen Ihnen am besten gefällt. Wollen wir noch einmal ausrechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit eigentlich ist? Ja! Zunächst konstatieren wir, das wir laplace-artige Modelle gewählt haben. Die Elementarereignisse oder die Ergebnisse sind jeweils die drei gezogenen Karten, die wir nacheinander die Reihenfolge berücksichtigend vor uns aufreihen. Für jedes Ergebnis $E \in \Omega$ beträgt die Wahrscheinlichkeit damit $P(\{E\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. Für die Mächtigkeit der Grundmenge gilt nach unseren Kombinatorik-Lehrgang

$$\mid \Omega_1 \mid = \mid \Omega_2 \mid = 30 \cdot 29 \cdot 28$$

- Erklären Sie kurz die obige Rechnung.

Nun berechnen wir die Mächtigkeit des Ereignisses V, es gilt

$$\mid V \mid = 2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 + 2 \cdot 28$$

- Erklären Sie auch dieses Produkt.

Insgesamt ergibt sich damit eine Wahrscheinlichkeit $P(V) = \dfrac{\mid V \mid}{\mid \Omega \mid} = \dfrac{6 \cdot 28}{30 \cdot 29 \cdot 28}$.

Man könnte noch kürzen, dann ergibt sich

$$P(V) = \frac{1}{145}$$

Modell (Mengen)

So, und nun wollen wir – aber etwas schneller – eine zweite Modellierung vornehmen und zwar eine Modellierung, die Mengen als Objekte der Grundmenge haben.

Sei K die Menge eines Skatspiels ohne die vier Asse. Sei A die Menge der zwei verbliebenen Asse. Dann gilt offenbar $\mid K \mid = 32 - 4 = 28$ und $\mid A \mid = 4 - 2 = 2$. Damit können wir schon die Grundmenge Ω definieren (wir nehmen jetzt teilweise dieselben Variablen wie oben, das ist in Ordnung). Es gilt

$$\Omega := \{T \subseteq K \cup A \mid |T| = 3\}$$

- Erklären Sie kurz, warum diese Menge tatsächlich das Ziehen der drei Karten modelliert.

Jetzt wollen wir gleich die Mächtigkeit der Grundmenge bestimmen, bevor uns jemand später daran erinnert.

Es gilt

$$|\Omega| = \binom{30}{3}$$

- Das müssen Sie kurz erläutern!
- Erklären Sie auch den Unterschied zwischen den beiden Mächtigkeiten der Grundmengen *Tupel vs Menge*.

So, nun wollen wir wieder unser Ereignis V als Teilmenge der Grundmenge in diesem Modell entwickeln, besser gesagt spezifizieren.

Der Anfang ist leicht, es gilt $V := \{T \in \Omega \mid \dots\}$. Nun müssen wir irgendwie für $\dots$ beschreiben, wie wir das Ziehen der zwei Asse und einer beliebige Karte aus K formalisieren. Was halten Sie von $A \subset K$? Wir spüren, Sie sind einverstanden. Denn unsere Menge T waren **alle** dreielementigen Teilmenge aus den 28+2 Karten. Mit dem Slogan $A \subset K$ spezifizieren wir die Menge T, indem wir fordern, dass immer die zwei Asse in T liegen müssen, sauber! Wie schreiben also

$$V := \{T \in \Omega \mid \ A \subset T\}$$

Jetzt bestimmen wir nur noch die Mächtigkeit von V. Es gibt nur eine einzige Menge A, damit haben wir - da T ja dreielementig sein soll - noch $|K| = 28$ Möglichkeiten der Kombinationen, es gilt nun $|V| = 1 \cdot 28 = 28$ Somit erhalten wir nun für die Wahrscheinlichkeit, nach dem Ziehen dreier weiterer Karten, vier Asse auf der Hand zu haben

$$P(V) = \frac{|V|}{|\Omega|} = \frac{28}{\binom{30}{3}} = \frac{28}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{30 \cdot 29} = \frac{1}{5 \cdot 29}$$

Und wenn jetzt noch $5 \cdot 29 = 145$ ist, freuen wir uns wirklich, denn beide Modelle liefern dasselbe Ergebnis - es ist unwahrscheinlich, dass dies ein Zufall ist :).

- Erklären Sie ausführlich die letzte Rechnung.

So, nun dürfen Sie endlich in diesen Modellen eine Problemstellung mit anderer Fragestellung erarbeiten und lösen, sie lautet:

> Ein Spieler besitzt wie oben zu Beginn zwei Asse auf der Hand.
> Aus den noch vorhandenen 30 Karten werden drei Karten zufällig gezogen.
> Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass danach der Spieler ein ***Full House*** auf seiner Hand hat.

Ein Full House liegt genau dann vor, wenn eine **Dreierkombination (Drilling)** und ein **Paar** gleichzeitig vorhanden sind. Also zum Beispiel

$$ASS\heartsuit,\ ASS\clubsuit,\ ASS\diamondsuit,\ 10\spadesuit,\ 10\heartsuit$$

- Geben Sie zunächst eine Schätzung ab!
- Modellieren Sie die Situation mit Tupeln und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Full House'!
- Modellieren Sie die Situation mit Mengen und bestätigen Sie ihre in Teil b) errechnete Wahrscheinlichkeit.

Nicht weiter sagen: Die Wahrscheinlichkeit eines Full House' ist in dieser Spielkonstellation tatsächlich genau viermal so groß!

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe möchten wir einsehen, wie wir Textaufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung modellieren und lösen können. Wir betrachten ein Beispiel:

- Die `Paw Patrol` besteht aus dem Jungen `Ryder` und seinen acht Fellfreunden `Chase`, `Marshall`, `Skye`, `Rocky`, `Rubble`, `Zuma`, `Everest` und `Tracker`. Für eine Mission wird aus der Paw Patrol zufällig ein Team aus vier Mitgliedern ausgesucht.

  Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden weiblichen Paw Patrol-Mitglieder (Skye und Everest) beide an der Mission teilnehmen.

Zur Lösung der Aufgabe modellieren wir das Geschehen durch einen Wahrscheinlichkeitsraum. Zunächst sei $P = \{01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 11\}$ die Menge aller

Mitglieder der Paw Patrol.[1] Die möglichen Auswahlen eines vierköpfigen Teams T fassen wir in der Grundmenge

$$\Omega = \{T \mid T \subseteq P \text{ und } |T| = 4\}$$

zusammen. Die Ergebnismenge Ω besteht also aus allen vierelementigen Teilmengen einer neunelementigen Menge. Folglich ist $|\Omega| = C(9,4) = \binom{9}{4}$.
Da die Nummern 04 und 09 für Skye und Everest stehen, interessieren wir uns für das Ereignis

$$E = \{T \in \Omega \mid 04 \in T \text{ und } 09 \in T\}\,.$$

Ein Team $T \in \Omega$, das sowohl Skye als auch Everest beinhaltet, enthält noch genau zwei weitere Teammitglieder. Folglich ist $|E| = C(7,2) = \binom{7}{2}$.
Nach der Formel von Laplace ist die Wahrscheinlichkeit, dass Skye und Everest beide der Mission zugeteilt werden, gleich

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

a) Berechnen Sie $|\Omega|$, $|E|$ und $P(E)$.

b) Für eine zweite Mission teilt sich die Paw Patrol nach dem Zufallsprinzip in ein Dreierteam und ein Sechserteam. Bestimmen Sie anhand eines passenden Modells die Wahrscheinlichkeit, dass Marshall und Chase im gleichen Team sind.

Aufgabe 3

In den Lebenswissenschaften betrachtet man Folgen mit Elementen aus der Menge $\{\texttt{A}, \texttt{C}, \texttt{T}, \texttt{G}\}$. Eine solche Folge der Länge 3 nennt man Codon. Beispiele für Codons sind: `GGA`, `CTG` und `CCC`.

a) Geben Sie einen weiteren Codon an: _____.

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Codon die Buchstaben `C` und `A` gleich oft enthält. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, modellieren wir den Sachverhalt durch einen laplace-artigen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Grundmenge Ω.

[1] Hierbei benennen wir die Freunde durch ihre Kennnummern: Ryder: 01, Chase: 02, Marshall: 03, Skye: 04, Rocky: 05, Rubble: 06, Zuma: 07, Everest: 09, Tracker: 11.

b) Geben Sie in mathematischen Formeln eine Grundmenge an, die die Situation beschreibt.

$\Omega =$

c) Berechnen Sie die Mächtigkeit der Grundmenge.

$|\Omega| =$

Das Ereignis $E \subseteq \Omega$ beschreibe die Menge aller Codons, in denen der Buchstabe `C` genau so oft vorkommt wie der Buchstabe `A`. Wir stratifizieren das Ereignis als $E = E_0 \cup E_1$, wobei E_0 die Menge aller Codons sei, in denen die Buchstaben `C` und `A` gar nicht vorkommen, und E_1 die Menge aller Codons, in denen die Buchstaben `C` und `A` jeweils genau einmal vorkommen.

d) Vervollständigen Sie die Formalisierungen.

(i) $E_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid _____\}$

(ii) $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid \{\texttt{A}, \texttt{C}\} \subseteq \{x_1, x_2, x_3\} \text{ und } _____\}$

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$.

Aufgabe 4

In einer Urne liegen 9 Kugeln beschriftet mit den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9. Pia zieht nacheinander (ohne Zurücklegen!) drei Kugeln aus der Urne und bildet damit eine dreistellige Zahl und zwar so, dass die zuerst gezogene Kugel die Hunderter-, die zweite Kugel die Zehner- und die zuletzt gezogene Kugel die Einerziffer darstellt. Zieht Pia also nacheinander die Kugeln mit den Ziffern 5, 4 und 9 in dieser Reihenfolge, so lautet ihre Zahl 549.

a) Geben Sie an: Die kleinste Zahl, die Pia ziehen kann, lautet [ ][ ][ ], die größte [ ][ ][ ].

b) Man modelliere das Kugelziehspektakel durch einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Sei B das Ereignis, dass Pia eine Zahl erhält, die größer als 700 ist. Man formalisiere im Modell das Ereignis B und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.

c) Pia hat beispielsweise die Zahl 235 gelegt. In umgekehrter Reihenfolge erhält sie die größere Zahl 532. Sei C das Ereignis, dass die umgedrehte Zahl größer ist als die ursprünglich gezogene Zahl ist. Man formalisiere im Modell das Ereignis C und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

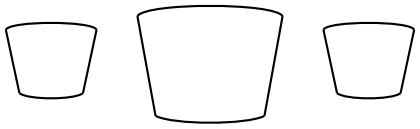
d) Nun kommt Alex hinzu. Pia sagt zu Alex: *Notiere bitte nur solche Zahlen, bei denen die Einerziffer die Summe der beiden anderen Ziffern ist.*
Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Alex eine Zahl aufschreibt, die die Ziffer 2 enthält.

Aufgabe 5

In einer Losbude stehen drei Los-Eimer, ein großer und zwei kleine. In dem großen Eimer sind 100 Lose, davon 10 Gewinne. In jedem der kleinen Eimer sind 50 Lose, davon 5 Gewinne. Jemand kauft **zwei** Lose und möchte dabei mindestens einen Gewinn haben.

a) Geben Sie alle grundsätzlich verschiedenen Möglichkeiten an, die Eimer für beide Loskäufe zu wählen.

b) Bestimmen Sie für jede dieser Möglichkeiten die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des oben erwähnten Ereignisses. Geben Sie zu einer dieser Möglichkeiten eine vollständige Modellierung an. Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege.



Aufgabe 6

Ein Zufallszahlengenerator erzeugt eine Folge von Nullen und Einsen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{0, 1\}$$

der Länge 6.

a) Man ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass $a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 = 1$ gilt.

b) Man ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass $a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 = 2$ gilt.