Übung 7

Bei vielen Zufallsexperimenten – so haben wir Mittwoch diskutiert – existieren nur eine endliche Anzahl von Ergebnissen, wie beispielsweise beim Würfeln zweier Würfel, beim Münzwurf, bei vielen Kartenspielen. Wir hatten definiert: Ist die Grundmenge oder Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes endlich, so nennen wir das Paar (Ω, P) einen *endlichen Wahrscheinlichkeitsraum*.
Unter diesen endlichen „Voraussetzungen“ werden wir dann solche Zufallsexperimente bzw. dazu modellierte Wahrscheinlichkeitsräume am kommenden Mittwoch kennenlernen (bzw. kennen Sie natürlich aus der Schule schon), in denen jedes Ergebnis **dieselbe** Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Solche Wahrscheinlichkeiten (auf endlichen Mengen) nennen wir *Laplace-Wahrscheinlichkeiten* bzw. den zugehörigen Raum *Laplaceartig* oder *Laplace-Raum*. Noch einmal:
Definition.
Sei Ω eine (nichtleere) endliche Menge. Eine Wahrscheinlichkeit(sfunktion) P heißt *Laplace-Wahrscheinlichkeit* genau dann, wenn für alle (Elementar-)Ergebnisse $\omega \in \Omega$ bzw. Ereignisse $\{\omega\} \subseteq \Omega$ gilt:

- $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$, wobei $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente der Grund- oder Ergebnismenge, sprich die Anzahl der Elementarergebnisse bezeichnet.

Für jedes Ereignis $T \subseteq \Omega$ kann man in diesen endlichen Fällen offenbar die Wahrscheinlichkeit leicht ausrechnen, denn hier gilt die berühmte Laplace-Formel (warum?):

- $P(T) = \dfrac{|T|}{|\Omega|}$, wobei man die Elemente aus T auch als *günstige Fälle* bezeichnet und die Laplace-Formel als die *Wahrscheinlichkeit der Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl aller möglichen Fälle* ausspricht.

Wir geben nun eine kleine Aufgabe als Anwendung an.

Aufgabe.
Es wird ein Würfel geworfen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass dabei eine Primzahl erscheint.
Als Ergebnismenge wählen wir schlicht

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

oder mathematisch etwas hübscher

$$\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 6\}.$$

Für die Mächtigkeit der Menge gilt wohl $|\Omega| = 6$.
Uns interessieren die Ergebnisse 2, 3 und 5, es gilt offenbar $2, 3, 5 \in \Omega$.
Als passende Wahrscheinlichkeitsfunktion P könnte die folgende gewählt werden.

$P : Pot(\Omega) \to R$ mit

$\{1\} \mapsto \frac{1}{6}$, *also* $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$

$\{2\} \mapsto \frac{1}{6}$,

$\{3\} \mapsto \frac{1}{6}$,

$\{4\} \mapsto \frac{1}{6}$,

$\{5\} \mapsto \frac{1}{6}$,

$\{6\} \mapsto \frac{1}{6}$.

Da alle möglichen Ergebnisse beim einmaligen Würfeln gleich wahrscheinlich sind, gilt für jedes Einzelergebnis

$$P(\{1\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dieser Eigenschaft wird nach oben als Laplace-Wahrscheinlichkeit bezeichnet.
Betrachten wir nun ein Ereignis, also eine Teilmenge T der Ergebnismenge Ω, die durch eine konkrete Fragestellung festgelegt wird (Primzahl).
Wir wählen treffenderweise

$$T := \{2, 3, 5\}$$

Offenbar gilt $T = \{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ und $|T| = 3$.
Damit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisse T den Wert

$$P(T) = \frac{|T|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ziemlich viel Aufwand, oder?
Intuitiv würde man sofort sagen, dass die Hälfte der möglichen Würfelergebnisse Primzahlen sind und daher die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt. Diese Überlegung führt zwar zum richtigen Ergebnis, ersetzt jedoch keine systematische Herleitung. Gerade in der Stochastik kommt es darauf an, **reale Zufallssituationen präzise zu modellieren**, hierüber haben wir in der letzten Vorlesung ziemlich ausführlich diskutiert. Nur wenn die zugrunde liegende Modellstruktur klar beschrieben ist – also die *Ergebnismenge*, die *Ereignisse* und die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* P –, lassen sich komplexere Situationen später nachvollziehbar und korrekt analysieren.

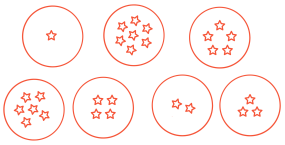
Das obige Beispiel mit dem Würfel zeigt exemplarisch, wie aus einer Alltagssituation (na ja ungefähr jedenfalls) ein **mathematisches Modell** entsteht:

- Zunächst wird die Ergebnismenge festgelegt: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Danach wird eine Wahrscheinlichkeitsfunktion P (hier laplace-artig) definiert, das jedem Einzelergebnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zuordnet.
- Schließlich kann für jedes Ereignis $T \subseteq \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $P(T)$ berechnet werden.

Auch wenn dieser Weg im einfachen Würfelbeispiel etwas umständlich erscheint, bildet er die **Grundlage für das Verständnis stochastischer Prozesse**.
In komplexeren Anwendungen – etwa bei Zufallsexperimenten mit mehreren Schritten oder bei ähnlichen Simulationen - ist eine saubere Modellierung unverzichtbar, um Ergebnisse interpretieren und begründen zu können, wir werden dies noch an zahlreichen Beispielen besprechen und üben.

So, kommen wir jetzt zu den Aufgaben.

Aufgabe 1



Die drei Schüler:innen der 4a der Drachenschule Andarna, Smaug und Alduin finden beim Spielen in der großen Pause sieben orange glitzernde Kugeln, auf denen ein bis 7 Sterne sind (jede Zahl genau einmal). Um zu entscheiden, wer sie bekommt, beschließen Sie, ein Spiel zu spielen: Jeder sucht sich eine Zahl von zwei bis vierzehn aus (Nur die Glückszahl 8 ist verboten, weil sie dauernd gewinnt). Danach werden immer wieder zwei der Kugeln mit Zurücklegen aus einem blickdichten Beutel gezogen. Wessen Zahl dabei zuerst als Summe der Sterne auf beiden gezogenen Kugeln auftritt, gewinnt die 7 Kugeln. Als Herr Fuchur vom Spiel erfährt, beschließt er, das Spiel als Lerngelegenheit zu nutzen, und bittet die Schüler aufzuschreiben, welche Zahl sie warum gewählt haben.

Alduin: 'Ich habe die 5 gewählt. Ich habe eine Liste mit allen möglichen Ergebnissen gemacht: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14. Eines davon muss ja kommen, man weiß aber nicht welches, deswegen ist es eigentlich egal und ich habe meine Lieblingszahl 5 genommen.'

Smaug:

'$2 = 1 + 1$
$3 = 2 + 1$
$4 = 2 + 2 = 3 + 1$
$5 = 3 + 2 = 4 + 1$
$6 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$
$7 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$
$8 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1$
$9 = 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2$
$10 = 5 + 5 = 6 + 4 = 7 + 3$
$11 = 6 + 5 = 7 + 4$
$12 = 6 + 6 = 7 + 5$
$13 = 7 + 6$
$14 = 7 + 7$
$6, 7, 9$ sind am größten. $\underline{\underline{6}}$

Andarna: '8 ist wegen 49:7=7' am besten und 7 und 9 sind dicht dran und haben zumindest noch 6 und mehr als die anderen. Also nehme ich 7 und ich gewinne.'

a) Schreiben Sie eine kurze Lösungsskizze als Korrigierhilfe für Herrn Fukur.

b) Nennen Sie alle Fehler im Aufschrieb der drei Drachenkinder.

c) Korrigieren Sie die Fehler jeweils in einem an die Kinder gerichteten Text.

d) Nun wollen wir Ihre kurze Lösungsskizze zu einer vollständigen Musterlösung erweitern, die auch die mathematische Modellierung umfasst. Dazu entwickeln wir ein mathematisches Modell, mit dessen Hilfe wir die Gewinnwahrscheinlichkeit der einzelnen Drachenkinder bestimmen.

   Um einen Leitfaden für zukünftige Modellierungsaufgaben zu erarbeiten, gehen wir dabei Schritt für Schritt gemeinsam vor:

   (i) Schreiben Sie dazu die Ausgänge einer Ziehung als Liste (ggf. mit ...) in eine passende Ergebnismenge:

   $$D = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

   (ii) Weil es so recht unhandlich ist, geben Sie eine Darstellung als Beschreibungsmenge an:

   $$D = \{\ldots\ldots \in \ldots\ldots \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

(iii) Nennen Sie ein Element von D und schreiben ganz kurz, wie man es in Bezug auf die Ausganssituation lesen soll:

Es ist z.B. ..... $\in D$. Das steht für den möglichen Ausgang, dass ...

(iv) Fassen Sie in den Ereignissen 'AL', 'S' und 'AN' jeweils die Ergebnisse zusammen, bei denen Alduin, Smaug oder Andarna gewinnt und geben diese jeweils einmal als Aufzählungs- und einmal als Beschreibungsmenge an:

$$\begin{aligned} AL &= \{ \\ &= \{ \\ S &= \{ \\ &= \{ \\ AN &= \{ \\ &= \{ \end{aligned}$$

Es fehlt nur noch eine eine passende Wahrscheinlichkeitsfunktion! Da gibt es theoretisch viele von. Aber weil wir falls möglich Möglichkeiten zählen wollen, ist die Laplacefunktion oft eine gute Wahl.

(v) Definieren Sie die Laplacefunktion formal: Sei P eine Funktion, die jedem Ereignis A

$$P(A) =$$

zuordnet.

(vi) Erklären Sie kurz, warum diese Wahl sinnvoll ist:

Jetzt haben wir alles Nötige definiert und können die Wahrscheinlichkeiten ganz formal innermathematisch, also ohne Argumente aus der Interpretation in die Rechnung einfließen zu lassen, bestimmen.

(vii) Berechnen Sie:

$$P(AL) =$$
$$P(S) =$$
$$P(AN) =$$

(viii) Interpretieren Sie die Ergebnisse kurz im Sachzusammenhang:

Aufgabe 2

Mia hat von ihrer Oma eine undurchsichtige Papiertüte mit 10 gleich großen, runden Bonbons bekommen: 5 Erdbeerbonbons, ihre Lieblingssorte, und 5 Zitronenbonbons. In der Pause greift sie, ohne hinzusehen, in die Tüte und nimmt 4 Bonbons heraus.

a) Modellieren Sie das Experiment als Laplace-Raum (Ω_1, P_1), wobei Mia die vier Bonbons in einem Griff herausnimmt. Geben Sie $|\Omega_1|$ an.

b) Modellieren Sie das Experiment als Laplace-Raum (Ω_2, P_2), wobei Mia die vier Bonbons nacheinander ohne Zurücklegen herausnimmt. Geben Sie $|\Omega_2|$ an.

c) Beschreiben Sie in beiden Modellen die folgenden Ereignisse als Teilmengen des jeweiligen Ergebnisraums und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:

A: Alle vier Bonbons sind Zitronenbonbons.

B: Unter den Bonbons sind mindestens zwei Erdbeerbonbons.

C: Unter den Bonbons sind höchstens drei Erdbeerbonbons.

D: Es sind genau zwei Erdbeer- und zwei Zitronenbonbons.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse beider Modelle und begründen Sie, warum sie übereinstimmen.

e) Erläutern Sie, warum der Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (Anzahl der Erdbeerbonbons) kein Laplace-Raum ist.

Aufgabe 3

Denken Sie sich ein beliebiges Kartenspiel mit 34 Karten, darunter genau zwei Joker. Nach dem Mischen wird das Kartenspiel in zwei gleich große Stapel geteilt. Bestimmen Sie, indem Sie eine geeignete Modellierung benutzen, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die beiden Joker im selben Stapel befinden.

Aufgabe 4

Tercos hat vier kleine Tafeln Schokolade in einer Tüte: eine Tafel mit Mandeln, eine Tafel mit Haselnüssen und zwei Tafeln mit Erdbeergeschmack. Um sie zu essen, nimmt Tercos die vier Schokoladentafeln nacheinander aus der Tüte, ohne in die Tüte zu schauen.
Man modelliere das Schokoladenspektakel durch einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum und berechne anhand des Modells die Wahrscheinlichkeit, dass Tercos die Mandelschokolade erst nach den beiden Erdbeerschokoladen bekommt.

Aufgabe 5

Dorothea hat eine Playlist mit zwanzig Lieblingsliedern erstellt. Fünf Songs sind von Taylor Swift. Dorothea mischt die Liste durch, indem sie die Zufallstaste drückt. Danach hört sie sich die ersten vier Titel der zufällig sortierten Wiedergabeliste an.

a) Man berechne anhand eines passenden Modells die Wahrscheinlichkeit, dass Dorothea keinen Song von Taylor Swift zu hören bekommt.

b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Dorothea mindestens einen Song von Taylor Swift zu hören bekommt.