# Übung 6

**Aufgabe 1**

Sie kennen vermutlich das im Folgenden beschriebene Phänomen, das wir nun in einen historischen Zusammenhang einordnen. Füllen Sie dabei die mit ... markierten Stellen aus.

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts wurde der italienische Naturforscher Galileo Galilei von seinem Landesherrn, dem Großherzog der Toskana, mit einer ungewöhnlichen Frage konfrontiert.

Der Fürst, der gerne Würfelspiele spielte, wollte wissen, warum beim *Wurf von zwei Würfeln* in der Spielpraxis die *Augensumme 9* häufiger zu fallen scheint als die *Augensumme 10*, während sich beim *Wurf von drei Würfeln* das Verhältnis offenbar umkehrt – hier tritt die *Augensumme 10* öfter auf als die *Augensumme 9*, so die Aussage des Fürsten.

Auf den ersten Blick schien dies widersprüchlich. Betrachtet man nur die Anzahl der *Zerlegungen in Summanden* (ohne Beachtung der Reihenfolge), mit denen eine bestimmte Summe erzielt werden kann, so ergibt sich kein Unterschied zwischen den beiden Augensummen 9 und 10, wenn man mit zwei Würfeln spielt, denn

- für die Zahl 9 ergeben sich: $9 = 3 + 6 = \ldots$
- für die Zahl 10 ergeben sich auch: $10 = 4 + 6 = \ldots$
- Insgesamt ergeben sich jeweils für die beiden Zahlen ... Möglichkeiten, sie als Summe darzustellen.

Auch bei drei Würfeln ergibt sich dieselbe Anzahl von Möglichkeiten der Summendarstellung, es gilt

- für die Zahl 9 ergeben sich: $9 = 1 + 2 + 6 = \ldots$

  $= \ldots$
- für die Zahl 10 ergeben sich auch: $10 = 1 + 3 + 6 = \ldots$

  $= \ldots$
- Insgesamt ergeben sich jeweils für die beiden Zahlen ... Möglichkeiten, sie als Summe darzustellen.

Für beide Summen gibt es also auch beim Wurf von drei Würfeln jeweils gleich viele Zerlegungen, und nach rein rechnerischer Analyse – so das Argument des Fürsten – müssten die beiden Summen 9 und 10 daher gleich oft auftreten, sowohl mit zwei als auch mit drei Würfeln.

Galilei begann daraufhin, das Problem systematisch zu untersuchen. Er stellte zunächst alle möglichen Spielkombinationen in einer Tabelle zusammen und analysierte, auf wie viele verschiedene Arten die jeweiligen Augensummen entstehen können.
Eine Tabelle wollen wir hier nicht erstellen; stattdessen modellieren Sie nun die beiden Spielsituationen selbst. Wir entwerfen dabei bewusst zwei *unterschiedliche* Modelle, die jeweils die Gesamtspielsituation darstellen sollen. Im nächsten Schritt reduzieren wir die Gesamtsituation dann auf die beiden Augensummen, betrachten also nur gewisse Teilmengen der $Z_i$ bzw. $D_i$.
Zwei Mengen $Z_1, Z_2$ – als Modelle für das *Würfeln mit zwei Würfeln* – könnten so gewählt werden:

a) $Z_1 = \{(w_1, w_2) \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

b) $Z_2 = \{\{w_1, w_2\} \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

c) Ein Spieler wirft zwei Fünfen (einen *Pasch*). In $Z_1$ wird dieser Wurf durch das Element ..... beschrieben, in $Z_2$ durch die Menge ..... . Man schreibe diese Menge in aufzählender Form auf – was fällt auf? Wie viele Elemente hat sie? .....

Als Teilmengen $S_9, S_{10} \subseteq Z_1$ und $T_9, T_{10} \subseteq Z_2$, die die zu untersuchende Spielsituation beschreiben, könnten die folgenden Mengen dienen:

d) $S_9 = \{(w_1, w_2) \in Z_1 \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

e) $S_{10} = \{(w_1, w_2) \in Z_1 \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

f) $T_9 = \{\{w_1, w_2\} \in \cdots \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

g) .....

Berechnen Sie nun die jeweiligen Mächtigkeiten der vier Teilmengen. Es gilt:

h) $|S_9| =$ .....

i) $|S_{10}| =$ .....

j) $|T_9| =$ .....

k) $|T_{10}| =$ .....

Modellieren Sie nun die Situation analog zum Werfen mit zwei Würfeln für den *Wurf dreier Würfel*. Zwei Mengen $D_1, D_2$ – als Modelle für das *Würfeln mit drei Würfeln* – könnten so gewählt werden:

l) $D_1 = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

m) $D_2 = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Als Teilmengen $U_9, U_{10} \subseteq D_1$ und $V_9, V_{10} \subseteq D_2$, die die zu untersuchende Spielsituation beschreiben, könnten die folgenden Mengen dienen:

n) $U_9 = \{(w_1, w_2, w_3) \in D_1 \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

o) $U_{10} = \{(w_1, w_2, w_3) \in D_1 \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

p) $V_9 = \{\{w_1, w_2, w_3\} \in \cdots \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

q) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Berechnen Sie nun die jeweiligen Mächtigkeiten der vier Teilmengen. Es gilt:

r) $|U_9| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

s) $|U_{10}| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

t) $|V_9| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

u) $|V_{10}| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Schreiben Sie nun im Sinne von Galileo Galilei einen Antwortsatz an den Fürsten, der dessen Dilemma aufklärt.

v) Durchlaucht, ...

## Aufgabe 2

Eine Matrix der Größe $m \times n$ ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten. In dieser Aufgabe möchten wir die Formeln der Kombinatorik, die wir in den letzten Wochen kennengelernt haben, verwenden, um Matrizen zu zählen.
Wir betrachten eine typische Fragestellung: Man berechne die Anzahl aller möglichen Matrizen der Größe $2 \times 7$ mit Einträgen aus der Menge $\{0, 1\}$, bei der die erste Zeile die Summe 2 und die zweite Zeile die Summe 3 hat, wie in dem Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir strukturieren unsere Lösung in drei Teile:

- **Antwort**: Es gibt $\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{3} = 21 \cdot 35 = 735$ Matrizen dieser Art.
- **Modellierung:** Es sei $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ die Menge der sieben möglichen Spaltenindizes. Wir modellieren eine 0-1-Matrix mit einer ersten Zeile der Summe 2 und einer zweiten Zeile der Summe 3 durch die Menge $Z_1 \times Z_2$ mit

  $$Z_1 = \{X_1 \mid X_1 \subseteq I \text{ und } |X_1| = 2\}, \quad Z_2 = \{X_2 \mid X_2 \subseteq I \text{ und } |X_2| = 3\},$$

  wobei $X_1$ die Menge die Spalten beschreiben möge, die in der ersten Zeile einen Eintrag 1 haben, und $X_2$ die Menge der Spalten, die in der zweiten Zeile einen Eintrag 1 haben. Im Beispiel ist $X_1 = \{2, 4\}$ und $X_2 = \{1, 4, 6\}$.
- **Rechnung:** Die Anzahl aller möglichen Matrizen ist daher

  $$\begin{aligned} |Z_1 \times Z_2| &= |Z_1| \cdot |Z_2| = C(7,2) \cdot C(7,3) = \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{3} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 5) = 21 \cdot 35 = 735. \end{aligned}$$

Wir laden nun die Studierenden ein, die folgenden Aufgaben mit Hilfe der erlernten Formeln anhand passender Modelle zu lösen.

a) Man berechne die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, eine Matrix der Größe $3 \times 3$ mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9$ zu befüllen, wenn keine Zahl doppelt vorkommen darf.

   Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Man berechne die Anzahl der verschiedenen Matrizen der Größe $3 \times 4$ mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei der jede Spalte (von oben nach unten gelesen) streng monoton steigend ist.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Man berechne die Anzahl der verschiedenen Matrizen der Größe $2 \times 6$ mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, 3\}$, bei der jede Zeile (von links nach rechts gelesen) monoton steigend ist.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Man berechne die Anzahl der verschiedenen Matrizen der Größe $2 \times 4$ mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, 3\}$, bei der jede Zeilensumme und jede Spaltensumme durch 3 teilbar ist.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) Ein Vierersudoku ist eine $4\times4$-Matrix mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, sodass folgende Regeln gelten:

- In jeder Zeile kommt jede der vier Zahlen genau einmal vor.
- In jeder Spalte kommt jede der vier Zahlen genau einmal vor.
- In jedem Block kommt jede der vier Zahlen genau einmal vor. (Mit Blöcken sind hier die vier $2 \times 2$-Unterquadrate gemeint, die entstehen, wenn man die Tabelle vertikal und horizontal halbiert.)

Berechnen Sie die Anzahl der Vierersudokus.

Beispiel:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 3 |

**Aufgabe 3**

Im Praktikum führen Sie in den Klassen 3a und 3b eine Umfrage durch: „Was isst du meistens in der großen Pause?“ Zur Wahl stehen **O**bst, **B**rot, **S**üßes und **N**ichts. Füllen Sie im Folgenden die mit ... markierten Stellen aus.
In der Klasse 3a ($n_a = 20$ Kinder) ergibt sich die folgende *Urliste*:

O B S O B N O S B O O N B S O B N S O B

a) Übertragen Sie die Urliste in eine Strichliste und zählen Sie aus:

| Kategorie | Obst | Brot | Süßes | Nichts |
|---|---|---|---|---|
| Strichliste | ... | ... | ... | ... |
| absolute Häufigkeit $h_j$ | 7 | ... | ... | ... |

b) Berechnen Sie die *relativen* Häufigkeiten $r_j = \frac{h_j}{n_a}$ – als Bruch, Dezimalzahl und in Prozent. Die erste Spalte ist vorgemacht:

| Kategorie | Obst | Brot | Süßes | Nichts |
|---|---|---|---|---|
| relative Häufigkeit $r_j$ | $\frac{7}{20} = 0{,}35 = 35\,\%$ | ... | ... | ... |

c) Kontrolle: $h_O + h_B + h_S + h_N = \cdots = n_a$ und $r_O + r_B + r_S + r_N = \ldots$ .
Warum muss das so sein? .....

Für die Klasse 3b ($n_b = 25$ Kinder) liegt die Auszählung bereits vor. Ergänzen Sie die relativen Häufigkeiten:

d)

| Kategorie | Obst | Brot | Süßes | Nichts |
|---|---|---|---|---|
| absolute Häufigkeit $h_j$ | 8 | 10 | 5 | 2 |
| relative Häufigkeit $r_j$ | $\frac{8}{25} = \cdots = \ldots\,\%$ | ... | ... | ... |

Die Schulleiterin sagt: „In der 3b essen mehr Kinder Obst als in der 3a – Obst ist in der 3b also beliebter.“ Prüfen Sie diese Aussage in zwei Schritten:

e) *Absolut:* In der 3b essen ... Kinder Obst, in der 3a ... Kinder – mit den absoluten Häufigkeiten hat die Schulleiterin also ...

f) *Relativ:* Der Obst-Anteil beträgt in der 3a ... %, in der 3b ... % – gemessen am Anteil ist Obst also in der Klasse ... beliebter. Der scheinbare Widerspruch löst sich auf, weil die beiden Klassen .....

g) Betrachten Sie nun die Kategorie *Süßes*: relativ gilt ... % = ... %, absolut dagegen ... $\neq$ .... Für den Vergleich verschieden großer Klassen eignen sich daher die ..... Häufigkeiten, denn .....

*Grafische Darstellungen.*

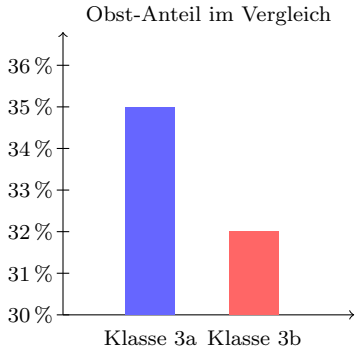
h) Zeichnen Sie ein gruppiertes Säulendiagramm der *absoluten* Häufigkeiten beider Klassen (je Kategorie zwei Säulen nebeneinander).

i) Für den Klassenvergleich kann dieses Diagramm in die Irre führen, weil ..... Zeichnen Sie daneben dasselbe Diagramm mit *relativen* Häufigkeiten (in Prozent) und vergleichen Sie den Eindruck.

j) Die Klasse 3a soll als Kreisdiagramm dargestellt werden. Berechnen Sie die Mittelpunktswinkel $\alpha_j = r_j \cdot 360°$; der erste ist vorgemacht:
$\alpha_O = 0{,}35 \cdot 360° = 126°, \quad \alpha_B = \ldots, \quad \alpha_S = \ldots, \quad \alpha_N = \ldots$
Kontrolle: $\alpha_O + \alpha_B + \alpha_S + \alpha_N = \ldots$

k) Zeichnen Sie das Kreisdiagramm.

*Vorsicht, Manipulation!* In der Schülerzeitung erscheint zum Obst-Anteil beider Klassen das folgende Diagramm:




l) Das Diagramm erweckt den Eindruck, der Obst-Anteil der 3a sei etwa ...-mal so groß wie der der 3b. Tatsächlich beträgt das Verhältnis aber nur $35 : 32 \approx \ldots$ . Die „Täuschung“ besteht darin, dass .....

m) Zeichnen Sie ein Diagramm (Achse beginnt bei 0 %) und vergleichen Sie. Notieren Sie ein Beispiel aus Medien oder Werbung, in dem dieselbe Täuschung verwendet wird: .....

*Zusammenlegen der Klassen.* Wie groß ist der Obst-Anteil im gesamten Jahrgang (3a und 3b zusammen)?

n) Es gilt $r = \dfrac{h_{O,a} + h_{O,b}}{n_a + n_b} = \dfrac{\cdots + \ldots}{\ldots} = \ldots \approx \ldots\,\%$.

o) Ein Kommilitone rechnet stattdessen $\frac{35\,\%+32\,\%}{2} = 33{,}5\,\%$. Vergleichen Sie: 33,5 % ... ... % – die Rechnung ist also .....

p) Begründen Sie allgemein: Wegen $h = n \cdot r$ gilt

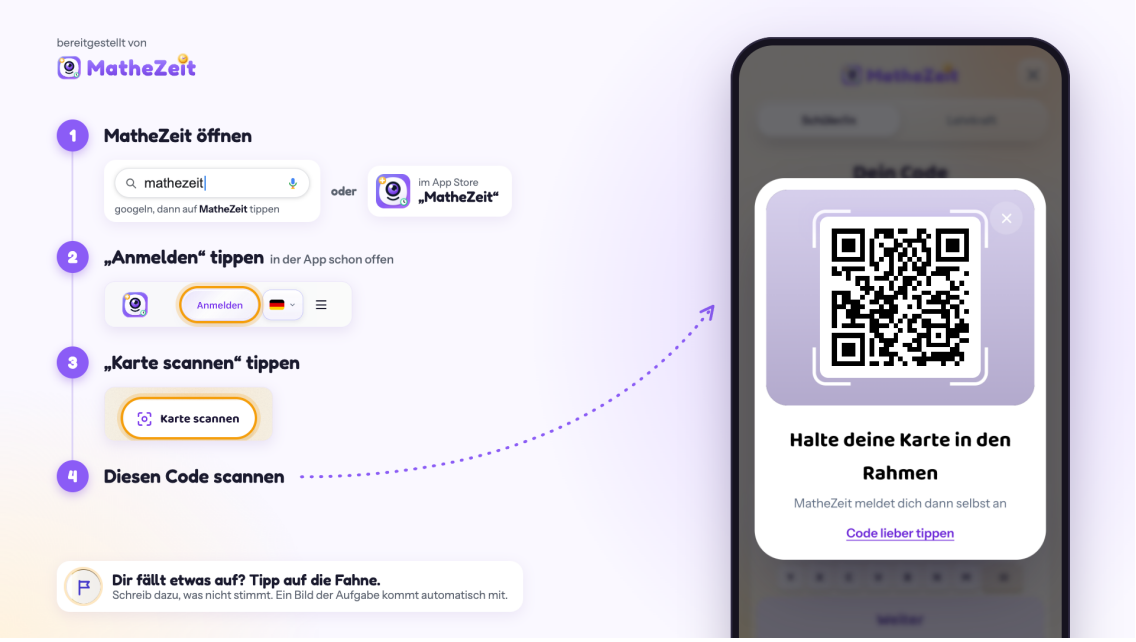
$$r = \frac{h_a + h_b}{n_a + n_b} = \frac{n_a \cdot \cdots + n_b \cdot \ldots}{n_a + n_b},$$

die relative Häufigkeit der Gesamtstichprobe ist also ein *gewichtetes Mittel* der beiden Klassenwerte – mit den Gewichten ... und ....

q) Die Rechnung des Kommilitonen stimmt genau dann, wenn .....

## Aufgabe 4

*Zum stöbern und ausprobieren: Daten in der MatheZeit*



## Aufgabe 5

*Eine Aufgabe aus der 55. Mathematik-Olympiade, 6. Klasse*

Lucie hat vier blaue, vier rote und vier gelbe gleich große, quadratische Spielsteine. Sie wählt immer vier Spielsteine aus, legt sie in einer Reihe hintereinander und erhält dadurch ein 4×1-Rechteck. Dabei gilt: Anordnungen, die nach einer Spiegelung übereinstimmen, gelten als gleich. Beispielsweise sind die Rechtecke „blau-blau-rot-blau“ (bbrb) und „blau-rot-blau-blau“ (brbb) keine verschiedenen Anordnungen.

a) Lucie legt die vier gelben Steine beiseite und will aus vier der restlichen acht Steine ein 4×1-Rechteck legen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, jeweils vier aus allen zwölf Steinen auszuwählen und zu einem 4×1-Rechteck zusammenzulegen, wobei genau zwei Farben in diesem Rechteck auftauchen sollen?