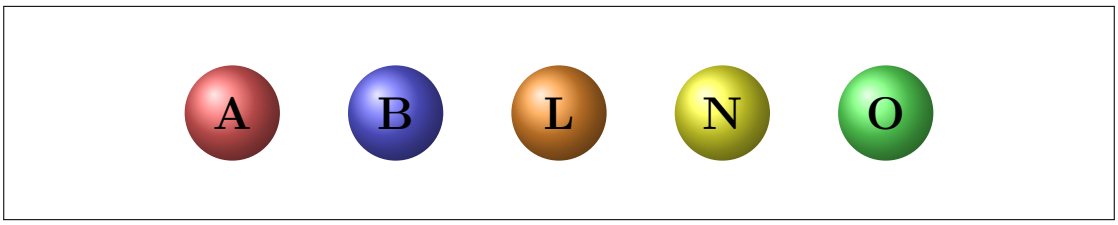
Übung 5

Aufgabe 1

In der Vorlesung hatten wir auch die *Permutationen mit Wiederholung* behandelt. Wir gehen noch einmal gemeinsam durch ein Beispiel für diesen Aufgaben- bzw. Zähltyp.

In einer Schachtel liegen Kugeln mit den Aufschriften A, B, L, N, O. Es werden nacheinandner 7 Buchstaben aus der Schachtel herausgenommen. Nach jedem Zug wird die Kugel wieder zurück in die Schachtel gelegt.



Wir können die Situation durch die Angabe folgender Menge modellieren:

$$M = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \mid X_i \in \{A, B, L, N, O\}, 1 \leq i \leq 7\}$$

a) Wie viele 7-Tupel liegen in M? Für die erste Komponeten X_1 haben wir fünf Buchstaben zur Auswahl. Da wir die Kugel stets wieder zurück legen, haben wir auch für die zweite Komponente fünf Kugeln zur Auswahl, usw. Insgesamt gilt also für die Mächtigkeit der Menge M:

$$|M| = 5 \cdot \ldots$$

b) Man bestimme die Anzahl der folgenden Teilmenge T von M

$$T = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \mid X_i = X_j, 1 \leq i, j \leq 7\}.$$

Was beschreibt die Menge?

c) Offenbar ist das 7-Tupel $(A, B, B, A, L, A, O) \in M$. Wir erkennen den Namen der Band *ABBA*. Sie war eine schwedische Popgruppe, die 1972 in Stockholm gegründet wurde. Die Mitglieder sind Agnetha Fältskog, Björn Ulvaeus, Benny Andersson und Anni-Frid (Frida) Lyngstad – ihre Anfangsbuchstaben ergeben den Bandnamen *ABBA*. Mit ihren eingängigen Melodien, mehrstimmigem Gesang und fröhlich-melancholischem Sound wurde *ABBA* in den 1970er-Jahren zu einer der erfolgreichsten Popgruppen der

Welt. Zu ihren bekanntesten Hits gehören „Waterloo“, „Dancing Queen“, „Mamma Mia“, „Fernando“ und „Take a Chance on Me“.
Man bestimme die Anzahl der 7-Tupel, die den Namen der Band *ABBA* enthalten, also die diese Buchstabenfolge beinhalten.

d) Das Wort *BALLOON* besteht auch aus insgesamt 7 Buchstaben und ist offenbar auch ein Element von M, genauer ist das Tupel (B, A, L, L, O, O, N) natürlich Element von M.
Aus den Buchstaben des Wortes *BALLOON* sollen alle verschiedenen Buchstabenanordnungen gebildet werden. Wie viele unterschiedliche Anordnungen sind möglich?
Wer Lust hat, kann sie zählen :-) ...

ABLLNOO ABLLONO ABLLOON ABLNLOO ABLNOLO ABLNOOL ABLOLNO ABLOLON ABLONLO ABLONOL
ABLOOLN ABLOONL ABNLLOO ABNLOLO ABNLOOL ABNOLLO ABNOLOL ABNOOLL ABOLLNO ABOLLON
ABOLNLO ABOLNOL ABOLOLN ABOLONL ABONLLO ABONLOL ABONOLL ABOOLLN ABOOLNL ABOONLL
ALBLNOO ALBLONO ALBLOON ALBNLOO ALBNOLO ALBNOOL ALBOLNO ALBOLON ALBONLO ALBONOL
ALBOOLN ALBOONL ALLBNOO ALLBONO ALLBOON ALLNBOO ALLNOBO ALLNOOB ALLOBNO ALLOBON
ALLONBO ALLONOB ALLOOBN ALLOONB ALNBLOO ALNBOLO ALNBOOL ALNLBOO ALNLOBO ALNLOOB
ALNOBLO ALNOBOL ALNOLBO ALNOLOB ALNOOBL ALNOOLB ALOBLNO ALOBLON ALOBNLO ALOBNOL
ALOBOLN ALOBONL ALOLBNO ALOLBON ALOLNBO ALOLNOB ALOLOBN ALOLONB ALONBLO ALONBOL
ALONLBO ALONLOB ALONOBL ALONOLB ALOOBLN ALOOBNL ALOOLBN ALOOLNB ALOONBL ALOONLB
ANBLLOO ANBLOLO ANBLOOL ANBOLLO ANBOLOL ANBOOLL ANLBLOO ANLBOLO ANLBOOL ANLLBOO
ANLLOBO ANLLOOB ANLOBLO ANLOBOL ANLOLBO ANLOLOB ANLOOBL ANLOOLB ANOBLLO ANOBLOL
ANOBOLL ANOLBLO ANOLBOL ANOLLBO ANOLLOB ANOLOBL ANOLOLB ANOOBLL ANOOLBL ANOOLLB
AOBLLNO AOBLLON AOBLNLO AOBLNOL AOBLOLN AOBLONL AOBNLLO AOBNLOL AOBNOLL AOBOLLN
AOBOLNL AOBONLL AOLBLNO AOLBLON AOLBNLO AOLBNOL AOLBOLN AOLBONL AOLLBNO AOLLBON
AOLLNBO AOLLNOB AOLLOBN AOLLONB AOLNBLO AOLNBOL AOLNLBO AOLNLOB AOLNOBL AOLNOLB
AOLOBLN AOLOBNL AOLOLBN AOLOLNB AOLONBL AOLONLB AONBLLO AONBLOL AONBOLL AONLBLO
AONLBOL AONLLBO AONLLOB AONLOBL AONLOLB AONOBLL AONOLBL AONOLLB AOOBLLN AOOBLNL
AOOBNLL AOOLBLN AOOLBNL AOOLLBN AOOLLNB AOOLNBL AOOLNLB AOONBLL AOONLBL AOONLLB
BALLNOO BALLONO BALLOON BALNLOO BALNOLO BALNOOL BALOLNO BALOLON BALONLO BALONOL
BALOOLN BALOONL BANLLOO BANLOLO BANLOOL BANOLLO BANOLOL BANOOLL BAOLLNO BAOLLON
BAOLNLO BAOLNOL BAOLOLN BAOLONL BAONLLO BAONLOL BAONOLL BAOOLLN BAOOLNL BAOONLL
BLALNOO BLALONO BLALOON BLANLOO BLANOLO BLANOOL BLAOLNO BLAOLON BLAONLO BLAONOL
BLAOOLN BLAOONL BLLANOO BLLAONO BLLAOON BLLNAOO BLLNOAO BLLNOOA BLLOANO BLLOAON
BLLONAO BLLONOA BLLOOAN BLLOONA BLNALOO BLNAOLO BLNAOOL BLNLAOO BLNLOAO BLNLOOA
BLNOALO BLNOAOL BLNOLAO BLNOLOA BLNOOAL BLNOOLA BLOALNO BLOALON BLOANLO BLOANOL
BLOAOLN BLOAONL BLOLANO BLOLAON BLOLNAO BLOLNOA BLOLOAN BLOLONA BLONALO BLONAOL
BLONLAO BLONLOA BLONOAL BLONOLA BLOOALN BLOOANL BLOOLAN BLOOLNA BLOONAL BLOONLA
BNALLOO BNALOLO BNALOOL BNAOLLO BNAOLOL BNAOOLL BNLALOO BNLAOLO BNLAOOL BNLLAOO
BNLLOAO BNLLOOA BNLOALO BNLOAOL BNLOLAO BNLOLOA BNLOOAL BNLOOLA BNOALLO BNOALOL
BNOAOLL BNOLALO BNOLAOL BNOLLAO BNOLLOA BNOLOAL BNOLOLA BNOOALL BNOOLAL BNOOLLA
BOALLNO BOALLON BOALNLO BOALNOL BOALOLN BOALONL BOANLLO BOANLOL BOANOLL BOAOLLN
BOAOLNL BOAONLL BOLALNO BOLALON BOLANLO BOLANOL BOLAOLN BOLAONL BOLLANO BOLLAON
BOLLNAO BOLLNOA BOLLOAN BOLLONA BOLNALO BOLNAOL BOLNLAO BOLNLOA BOLNOAL BOLNOLA
BOLOALN BOLOANL BOLOLAN BOLOLNA BOLONAL BOLONLA BONALLO BONALOL BONAOLL BONLALO
BONLAOL BONLLAO BONLLOA BONLOAL BONLOLA BONOALL BONOLAL BONOLLA BOOALLN BOOALNL
BOOANLL BOOLALN BOOLANL BOOLLAN BOOLLNA BOOLNAL BOOLNLA BOONALL BOONLAL BOONLLA
LABLNOO LABLONO LABLOON LABNLOO LABNOLO LABNOOL LABOLNO LABOLON LABONLO LABONOL
LABOOLN LABOONL LALBNOO LALBONO LALBOON LALNBOO LALNOBO LALNOOB LALOBNO LALOBON
LALONBO LALONOB LALOOBN LALOONB LANBLOO LANBOLO LANBOOL LANLBOO LANLOBO LANLOOB
LANOBLO LANOBOL LANOLBO LANOLOB LANOOBL LANOOLB LAOBLNO LAOBLON LAOBNLO LAOBNOL
LAOBOLN LAOBONL LAOLBNO LAOLBON LAOLNBO LAOLNOB LAOLOBN LAOLONB LAONBLO LAONBOL
LAONLBO LAONLOB LAONOBL LAONOLB LAOOBLN LAOOBNL LAOOLBN LAOOLNB LAOONBL LAOONLB
LBALNOO LBALONO LBALOON LBANLOO LBANOLO LBANOOL LBAOLNO LBAOLON LBAONLO LBAONOL
LBAOOLN LBAOONL LBLANOO LBLAONO LBLAOON LBLNAOO LBLNOAO LBLNOOA LBLOANO LBLOAON
LBLONAO LBLONOA LBLOOAN LBLOONA LBNALOO LBNAOLO LBNAOOL LBNLAOO LBNLOAO LBNLOOA
LBNOALO LBNOAOL LBNOLAO LBNOLOA LBNOOAL LBNOOLA LBOALNO LBOALON LBOANLO LBOANOL
LBOAOLN LBOAONL LBOLANO LBOLAON LBOLNAO LBOLNOA LBOLOAN LBOLONA LBONALO LBONAOL
LBONLAO LBONLOA LBONOAL LBONOLA LBOOALN LBOOANL LBOOLAN LBOOLNA LBOONAL LBOONLA
LLABNOO LLABONO LLABOON LLANBOO LLANOBO LLANOOB LLAOBNO LLAOBON LLAONBO LLAONOB
LLAOOBN LLAOONB LLBANOO LLBAONO LLBAOON LLBNAOO LLBNOAO LLBNOOA LLBOANO LLBOAON
LLBONAO LLBONOA LLBOOAN LLBOONA LLNABOO LLNAOBO LLNAOOB LLNBAOO LLNBOAO LLNBOOA
LLNOABO LLNOAOB LLNOBAO LLNOBOA LLNOOAB LLNOOBA LLOABNO LLOABON LLOANBO LLOANOB
LLOAOBN LLOAONB LLOBANO LLOBAON LLOBNAO LLOBNOA LLOBOAN LLOBONA LLONABO LLONAOB
LLONBAO LLONBOA LLONOAB LLONOBA LLOOABN LLOOANB LLOOBAN LLOOBNA LLOONAB LLOONBA
LNABLOO LNABOLO LNABOOL LNALBOO LNALOBO LNALOOB LNAOBLO LNAOBOL LNAOLBO LNAOLOB
LNAOOBL LNAOOLB LNBALOO LNBAOLO LNBAOOL LNBLAOO LNBLOAO LNBLOOA LNBOALO LNBOAOL
LNBOLAO LNBOLOA LNBOOAL LNBOOLA LNLABOO LNLAOBO LNLAOOB LNLBAOO LNLBOAO LNLBOOA
LNLOABO LNLOAOB LNLOBAO LNLOBOA LNLOOAB LNLOOBA LNOABLO LNOABOL LNOALBO LNOALOB

LNOAOBL LNOAOLB LNOBALO LNOBAOL LNOBLAO LNOBLOA LNOBOAL LNOBOLA LNOLABO LNOLAOB
LNOLBAO LNOLBOA LNOLOAB LNOLOBA LNOOABL LNOOALB LNOOBAL LNOOBLA LNOOLAB LNOOLBA
LOABLNO LOABLON LOABNLO LOABNOL LOABOLN LOABONL LOALBNO LOALBON LOALNBO LOALNOB
LOALOBN LOALONB LOANBLO LOANBOL LOANLBO LOANLOB LOANOBL LOANOLB LOAOBLN LOAOBNL
LOAOLBN LOAOLNB LOAONBL LOAONLB LOBALNO LOBALON LOBANLO LOBANOL LOBAOLN LOBAONL
LOBLANO LOBLAON LOBLNAO LOBLNOA LOBLOAN LOBLONA LOBNALO LOBNAOL LOBNLAO LOBNLOA
LOBNOAL LOBNOLA LOBOALN LOBOANL LOBOLAN LOBOLNA LOBONAL LOBONLA LOLABNO LOLABON
LOLANBO LOLANOB LOLAOBN LOLAONB LOLBANO LOLBAON LOLBNAO LOLBNOA LOLBOAN LOLBONA
LOLNABO LOLNAOB LOLNBAO LOLNBOA LOLNOAB LOLNOBA LOLOABN LOLOANB LOLOBAN LOLOBNA
LOLONAB LOLONBA LONABLO LONABOL LONALBO LONALOB LONAOBL LONAOLB LONBALO LONBAOL
LONBLAO LONBLOA LONBOAL LONBOLA LONLABO LONLAOB LONLBAO LONLBOA LONLOAB LONLOBA
LONOABL LONOALB LONOBAL LONOBLA LONOLAB LONOLBA LOOABLN LOOABNL LOOALBN LOOALNB
LOOANBL LOOANLB LOOBALN LOOBANL LOOBLAN LOOBLNA LOOBNAL LOOBNLA LOOLABN LOOLANB
LOOLBAN LOOLBNA LOOLNAB LOOLNBA LOONABL LOONALB LOONBAL LOONBLA LOONLAB LOONLBA
NABLLOO NABLOLO NABLOOL NABOLLO NABOLOL NABOOLL NALBLOO NALBOLO NALBOOL NALLBOO
NALLOBO NALLOOB NALOBLO NALOBOL NALOLBO NALOLOB NALOOBL NALOOLB NAOBLLO NAOBLOL
NAOBOLL NAOLBLO NAOLBOL NAOLLBO NAOLLOB NAOLOBL NAOLOLB NAOOBLL NAOOLBL NAOOLLB
NBALLOO NBALOLO NBALOOL NBAOLLO NBAOLOL NBAOOLL NBLALOO NBLAOLO NBLAOOL NBLLAOO
NBLLOAO NBLLOOA NBLOALO NBLOAOL NBLOLAO NBLOLOA NBLOOAL NBLOOLA NBOALLO NBOALOL
NBOAOLL NBOLALO NBOLAOL NBOLLAO NBOLLOA NBOLOAL NBOLOLA NBOOALL NBOOLAL NBOOLLA
NLABLOO NLABOLO NLABOOL NLALBOO NLALOBO NLALOOB NLAOBLO NLAOBOL NLAOLBO NLAOLOB
NLAOOBL NLAOOLB NLBALOO NLBAOLO NLBAOOL NLBLAOO NLBLOAO NLBLOOA NLBOALO NLBOAOL
NLBOLAO NLBOLOA NLBOOAL NLBOOLA NLLABOO NLLAOBO NLLAOOB NLLBAOO NLLBOAO NLLBOOA
NLLOABO NLLOAOB NLLOBAO NLLOBOA NLLOOAB NLLOOBA NLOABLO NLOABOL NLOALBO NLOALOB
NLOAOBL NLOAOLB NLOBALO NLOBAOL NLOBLAO NLOBLOA NLOBOAL NLOBOLA NLOLABO NLOLAOB
NLOLBAO NLOLBOA NLOLOBA NLOOABL NLOOALB NLOOBAL NLOOBLA NLOOLAB NLOOLBA
NOABLLO NOABLOL NOABOLL NOALBLO NOALBOL NOALLBO NOALLOB NOALOBL NOALOLB NOAOBLL
NOAOLBL NOAOLLB NOBALLO NOBALOL NOBAOLL NOBLALO NOBLAOL NOBLLAO NOBLLOA NOBLOAL
NOBLOLA NOBOALL NOBOLAL NOBOLLA NOLABLO NOLABOL NOLALBO NOLALOB NOLAOBL NOLAOLB
NOLBALO NOLBAOL NOLBLAO NOLBLOA NOLBOAL NOLBOLA NOLLABO NOLLAOB NOLLBAO NOLLBOA
NOLLOAB NOLLOBA NOLOABL NOLOALB NOLOBAL NOLOBLA NOLOLAB NOLOLBA NOOABLL NOOALBL
NOOALLB NOOBALL NOOBLAL NOOBLLA NOOLABL NOOLALB NOOLBAL NOOLBLA NOOLLAB NOOLLBA
OABLLNO OABLLON OABLNLO OABLNOL OABLOLN OABLONL OABNLLO OABNLOL OABNOLL OABOLLN
OABOLNL OABONLL OALBLNO OALBLON OALBNLO OALBNOL OALBOLN OALBONL OALLBNO OALLBON
OALLNBO OALLNOB OALLOBN OALLONB OALNBLO OALNBOL OALNLBO OALNLOB OALNOBL OALNOLB
OALOBLN OALOBNL OALOLBN OALOLNB OALONBL OALONLB OANBLLO OANBLOL OANBOLL OANLBLO
OANLBOL OANLLBO OANLLOB OANLOBL OANLOLB OANOBLL OANOLBL OANOLLB OAOBLLN OAOBLNL
OAOBNLL OAOLBLN OAOLBNL OAOLLBN OAOLLNB OAOLNBL OAOLNLB OAONBLL OAONLBL OAONLLB
OBALLNO OBALLON OBALNLO OBALNOL OBALOLN OBALONL OBANLLO OBANLOL OBANOLL OBAOLLN
OBAOLNL OBAONLL OBLALNO OBLALON OBLANLO OBLANOL OBLAOLN OBLAONL OBLLANO OBLLAON
OBLLNAO OBLLNOA OBLLOAN OBLLONA OBLNALO OBLNAOL OBLNLAO OBLNLOA OBLNOAL OBLNOLA
OBLOALN OBLOANL OBLOLAN OBLOLNA OBLONAL OBLONLA OBNALLO OBNALOL OBNAOLL OBNLALO
OBNLAOL OBNLLAO OBNLLOA OBNLOAL OBNLOLA OBNOALL OBNOLAL OBNOLLA OBOALLN OBOALNL
OBOANLL OBOLALN OBOLANL OBOLLAN OBOLLNA OBOLNAL OBOLNLA OBONALL OBONLAL OBONLLA
OLABLNO OLABLON OLABNLO OLABNOL OLABOLN OLABONL OLALBNO OLALBON OLALNBO OLALNOB
OLALOBN OLALONB OLANBLO OLANBOL OLANLBO OLANLOB OLANOBL OLANOLB OLAOBLN OLAOBNL
OLAOLBN OLAOLNB OLAONBL OLAONLB OLBALNO OLBALON OLBANLO OLBANOL OLBAOLN OLBAONL
OLBLANO OLBLAON OLBLNAO OLBLNOA OLBLOAN OLBLONA OLBNALO OLBNAOL OLBNLAO OLBNLOA
OLBNOAL OLBNOLA OLBOALN OLBOANL OLBOLAN OLBOLNA OLBONAL OLBONLA OLLABNO OLLABON
OLLANBO OLLANOB OLLAOBN OLLAONB OLLBANO OLLBAON OLLBNAO OLLBNOA OLLBOAN OLLBONA
OLLNABO OLLNAOB OLLNBAO OLLNBOA OLLNOAB OLLNOBA OLLOABN OLLOANB OLLOBAN OLLOBNA
OLLONAB OLLONBA OLNABLO OLNABOL OLNALBO OLNALOB OLNAOBL OLNAOLB OLNBALO OLNBAOL
OLNBLAO OLNBLOA OLNBOAL OLNBOLA OLNLABO OLNLAOB OLNLBAO OLNLBOA OLNLOAB OLNLOBA
OLNOABL OLNOALB OLNOBAL OLNOBLA OLNOLAB OLNOLBA OLOABLN OLOABNL OLOALBN OLOALNB
OLOANBL OLOANLB OLOBALN OLOBANL OLOBLAN OLOBLNA OLOBNAL OLOBNLA OLOLABN OLOLANB
OLOLBAN OLOLBNA OLOLNAB OLOLNBA OLONABL OLONALB OLONBAL OLONBLA OLONLAB OLONLBA
ONABLLO ONABLOL ONABOLL ONALBLO ONALBOL ONALLBO ONALLOB ONALOBL ONALOLB ONAOBLL
ONAOLBL ONAOLLB ONBALLO ONBALOL ONBAOLL ONBLALO ONBLAOL ONBLLAO ONBLLOA ONBLOAL
ONBLOLA ONBOALL ONBOLAL ONBOLLA ONLABLO ONLABOL ONLALBO ONLALOB ONLAOBL ONLAOLB
ONLBALO ONLBAOL ONLBLAO ONLBLOA ONLBOAL ONLBOLA ONLLABO ONLLAOB ONLLBAO ONLLBOA
ONLLOAB ONLLOBA ONLOABL ONLOALB ONLOBAL ONLOBLA ONLOLAB ONLOLBA ONOABLL ONOALBL
ONOALLB ONOBALL ONOBLAL ONOBLLA ONOLABL ONOLALB ONOLBAL ONOLBLA ONOLLAB ONOLLBA
OOABLLN OOABLNL OOABNLL OOALBLN OOALBNL OOALLBN OOALLNB OOALNBL OOALNLB OOANBLL
OOANLBL OOANLLB OOBALLN OOBALNL OOBANLL OOBLALN OOBLANL OOBLLAN OOBLLNA OOBLNAL
OOBLNLA OOBNALL OOBNLAL OOBNLLA OOLABLN OOLABNL OOLALBN OOLALNB OOLANBL OOLANLB
OOLBALN OOLBANL OOLBLAN OOLBLNA OOLBNAL OOLBNLA OOLLABN OOLLANB OOLLBAN OOLLBNA
OOLLNAB OOLLNBA OOLNABL OOLNALB OOLNBAL OOLNBLA OOLNLAB OOLNLBA OONABLL OONALBL
OONALLB OONBALL OONBLAL OONBLLA OONLABL OONLALB OONLBAL OONLBLA OONLLAB OONLLBA

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe möchten wir einsehen, wie Binomialkoeffizienten uns helfen können, Abzählprobleme zu lösen.
Wir betrachten eine Beispielaufgabe: Mara hat drei Weintrauben und vier Brombeeren. Man berechne anhand eines passenden Modells die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen, in denen sie die Früchte essen kann.
Wir strukturieren unsere Lösung in drei Teile.

- **Antwort:** Es gibt genau 35 verschiedene Reihenfolgen, die Früchte zu essen.
- **Modellierung:** Wir modellieren die Slots, an denen Mara eine Weintraube essen kann, durch die Menge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ferner beschreibt die Menge

$$W = \{A \mid A \subseteq S \text{ und } |A| = 3\}$$

  die möglichen Auswahlen von drei Slots, an denen sie die Weintrauben isst. Ist beispielsweise $A = \{2, 4, 5\}$, so isst Mara zu den Zeitpunkten 2, 4 und 5 Weintrauben (und damit zu den Zeitpunkten 1, 3, 6 und 7 Brombeeren), so dass ihre Menüfolge Beere-Traube-Beere-Traube-Traube-Beere-Beere lautet.
- **Rechnung:** Es gilt $|S| = 7$, so dass die Anzahl der möglichen Reihenfolgen $|W| = C(7, 3)$ ist. Es gilt daher

$$|W| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35.$$

Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben mit Hilfe geeigneter Modelle.

a) Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen Ziehungen beim Lotto „3 aus 10“.

b) Alex hat eine Tüte mit elf Jelly Beans, und zwar

- sechs rote mit den Geschmacksrichtungen Zimt, Granatapfel, roter Apfel, Kirsche, Erdbeermarmelade und Cranberry
- und fünf orangefarbene mit den Geschmacksrichtungen Mandarine, Pfirsich, Grapefruit, Honigmelone und Passionsfrucht.

Er nimmt drei Jelly Beans aus der Tüte, ohne sie anzuschauen, und schenkt sie seinem Freund Bert. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Sets an Jelly Beans, die Bert erhalten kann. Berechnen Sie zudem, wie viele dieser Sets komplett rot sind.

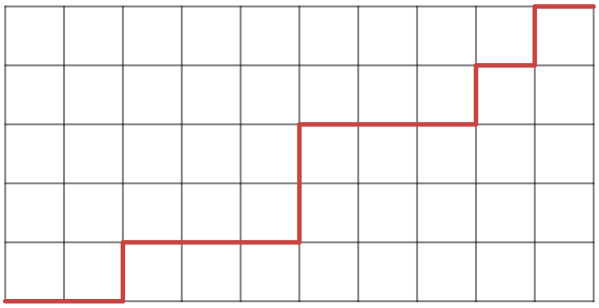
c) Ein Binom ist ein zweiteiliger Ausdruck, zum Beispiel $x + y$. Wir multiplizieren die siebte Potenz

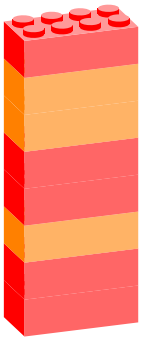
$$(x+y)^7 = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$$

des Binoms $x + y$ aus und fassen gleichartige Terme zusammen. Berechnen Sie den Koeffizienten, der vor dem Monom x^4y^3 entsteht.

d) Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Türme, die Oleg aus drei orangen und fünf roten Legosteinen bauen kann.

e) Ermitteln Sie die Anzahl der Gitterwege von $(0, 0)$ nach $(10, 5)$, die in jedem Schritt entweder eine Einheit nach oben oder eine Einheit nach rechts gehen.



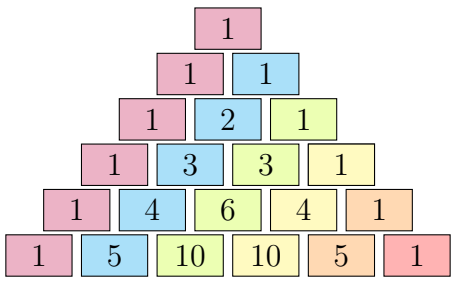


AUFGABE 3

Das Pascal'sche Dreieck ist eine Zahlenmauer. Die dritte und die vierte Zeile des Dreiecks bestehen beispielsweise aus den Zahlen

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1;$$
$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1.$$

Es entsteht ein dreieckiges Schema, indem wir die Zahlen einer Zeile zentriert in einer Reihe schreiben. Das Bild zeigt die Zeilen 0, 1, 2, 3, 4 und 5.



a) Lesen Sie aus dem Bild die Werte $\binom{2}{1}$, $\binom{5}{2}$ und $\binom{5}{3}$ ab.

b) Ergänzen Sie die sechste, siebte und achte Zeile.

Wir versuchen nun, in der Anordnung der Zahlen Muster zu identifizieren und zu erklären (ein Prozess, den manche Leute number crunching nennen). Beispiel:

- **Phänomen:** Jede Zahl in einem Mauerstein im Inneren des Pascal'schen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Zahlen in den darüber liegenden Mauersteinen.
- **Instanz:** Es gilt $\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$.
- **Anschauliche Erklärung:** Sina ist eine von 7 Studierenden. Es soll ein Studierendenausschuss aus 3 Studierenden gebildet werden. Dann gibt es $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten, den Ausschuss zu bilden, da aus der Menge der 7 Studierenden eine Teilmenge aus 3 Studierenden auszuwählen ist.

  Sina selbst kann in dem Auschuss sein oder nicht.

  Es gibt $\binom{6}{3}$ mögliche Ausschüsse, in denen Sina nicht vertreten ist, da in dem Fall aus der Menge der restlichen 6 Studierenden eine Teilmenge aus 3 Studierenden auszuwählen ist.

  Ferner gibt es $\binom{6}{2}$ mögliche Ausschüsse mit Sina, da in dem Fall neben Sina noch 2 der 6 anderen Studierenden in den Ausschuss kommen müssen.

  Folglich muss die Anzahl $\binom{7}{3}$ aller möglichen Ausschüsse gleich der Summe aus $\binom{6}{3}$ und $\binom{6}{2}$ sein.

Wir laden nun die Studierenden ein, das Pascal'sche Dreieck zu explorieren, und weitere Beobachtungen zu formulieren und zu erklären.

c) Wir betrachten das folgende Phänomen: Die Summe der Zahlen in der Zeile n des Pascal'schen Dreiecks ist stets 2^n. Schreiben Sie auf, was dieses Phänomen im Fall $n = 6$ bedeutet, und geben Sie eine anschauliche Erklärung für diesen Fall.

d) Wir betrachten die Formel

$$\binom{8}{3} = \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

Geben Sie eine anschauliche Erklärung der Formel und versuchen Sie, das Phänomen allgemeiner zu beschreiben.

e) Formulieren Sie ein eigenes Phänomen.

Aufgabe 4

Diese kurzen Aufgaben dienen dazu, die grundlegenden Zählprinzipien der Kombinatorik (Additionsregel, Multiplikationsregel, Permutationen, Kombinationen) anzuwenden und ihre didaktische Struktur zu reflektieren.

Beachten Sie bei jeder Aufgabe:

- Welches Zählprinzip wenden Sie an?
- Wie lässt sich die Aufgabe für Lernende verständlich darstellen oder visualisieren?

a) Bestimmen Sie, auf wie viele verschiedene Arten fünf Läuferinnen ein Rennen beenden können, wenn keine Gleichstände erlaubt sind.

b) Ermitteln Sie, auf wie viele verschiedene Arten die Namen von sechs Kandidatinnen und Kandidaten für das Amt der Bürgermeisterin bzw. des Bürgermeisters auf einem Stimmzettel angeordnet werden können.

c) Eine Münze wird zehnmal geworfen, wobei jedes Mal entweder „Kopf“ oder „Zahl“ auftreten kann.

   (i) Bestimmen Sie die Gesamtzahl aller möglichen Ausgänge.

   (ii) Ermitteln Sie die Anzahl der Ausgänge, die genau zwei Köpfe enthalten.

   (iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Ausgänge, die höchstens drei Zahlen enthalten.

   (iv) Ermitteln Sie, wie viele Ausgänge gleich viele Köpfe wie Zahlen enthalten.

d) Bestimmen Sie, wie viele Permutationen der Buchstaben $ABCDEFG$ jeweils folgende Teilstrings – also Teilbuchstabenfolgen vgl. Aufgabe 2– enthalten:

   (i) den String BCD

   (ii) den String $CFGA$

   (iii) die Strings BA und GF

   (iv) die Strings ABC und DE

   (v) die Strings ABC und CDE

   (vi) die Strings CBA und BED

e) Bestimmen Sie, auf wie viele Arten acht Männer und fünf Frauen sich in einer Reihe aufstellen können, sodass keine zwei Frauen nebeneinanderstehen.

f) Ein Verein hat 25 Mitglieder.

   (i) Bestimmen Sie, auf wie viele Arten vier Mitglieder ausgewählt werden können, um im Vorstand mitzuwirken.

   (ii) Ermitteln Sie, auf wie viele Arten ein Vorstand mit den Ämtern Präsidentin, Vizepräsidentin, Schriftführerin und Kassenwartin besetzt werden kann, wobei jede Person nur ein Amt übernehmen darf.

Aufgabe 5

Wir wollen jetzt Alltagssituationen *mathematisch modellieren*. Geben Sie zu den folgenden Situationen jeweils eine Menge an, die alle Möglichkeiten, die in der Situation auftreten können, beschreibt und außerdem eine Teilmenge, die die für uns interessanten Möglichkeiten beschreiben. Bestimmen Sie dann die Mächtigkeiten von den von Ihnen genannten Mengen und deuten die Ergebnisse im Sachzusammenhang.
Orientieren Sie sich bei der Modellierung an den Beispielen der vorigen Aufgaben und an den Anleitungen zum Modellieren auf der vorigen Serie.

a) Sie haben beim Kniffeln nach zwei Würfen ⚀⚀⚁⚄⚅ und wollen mit dem letzten Wurf einen Kniffel werfen. Zu diesem Zweck behalten Sie die beiden Einsen und werfen die anderen drei Würfel erneut.

b) Sie spielen Siedler von Catan. Sie sind am Zug und brauchen unbedingt Getreide. Mit ihren Siedlungen erhalten sie dieses genau, wenn bei ihrem Wurf mit zwei Würfeln die Augensumme 8 oder 11 geworfen wird.

c) Sie spielen Skat und haben nur das Kreuz-Ass und kein weiteres Ass auf der Hand. Sie hoffen, dass sich das Pik-Ass im Skat befindet. (Anmerkung für Leute, die die Skatregeln nicht kennen: Jeder der 3 Spielenden bekommt 10 Handkarten aus den 32 Karten eines üblichen Kartenspiels, die restlichen 2 Karten sind der für alle unbekannte Skat.)

d) Sie spielen Skat und haben nur das Kreuz-Ass und kein weiteres Ass auf der Hand. Sie hoffen, dass sich irgendein Ass im Skat befindet

e) Alle 5.648 Studierende der EUF machen einen Wettlauf. Sie sind hochmotiviert und hoffen, unter die Top-10 zu kommen.

f) Ihr Mitbewohner hängt netterweise Ihre 12 Socken auf. Leider einfach in der Reihenfolge, wie er sie aus dem Korb nimmt und nicht extra nach Paaren sortiert. Sie hoffen, das bei der entstehenden Reihenfolge trotzdem eine Sortierung nach Paren entsteht.

g) Sie befinden sich in Ihrem Hotel (P) in Manhattan und Ihre Freundin hat einen Ihnen nicht bekannten Weg zum Eingang des Empire-State-Buildings (Q) herausgesucht. Weil Sie noch müde sind, hoffen Sie sehr, dass der herausgesuchte Weg am markierten Kaffeeladen vorbeiführt.

