Übung 4

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit unseren bekannten Permutationen – in der Analysis hatten wir Permutationen als spezielle Bijektionen auf endlichen Mengen kennengelernt – aus der letzten Vorlesung beschäftigen, wir hatten notiert:
Eine Permutation einer Menge unterschiedlicher Objekte ist eine geordnete Anordnung dieser Objekte, also gewisse n-Tupel. Wir interessierten uns auch für geordnete Anordnungen einiger Elemente aus einer n-elementigen Menge mit $0 \leq r \leq n$. Eine geordnete Anordnung von r Elementen einer n-elementigen Menge hatten wir als r-Permutation einer Menge mit n Elementen bezeichnet. Hierbei soll es keine Wiederholungen geben.
Wir hatten u.a. als Beispiel die folgende Sachsituation:
Auf wie viele Arten können wir drei Schüler aus einer Gruppe von fünf Schülern auswählen, die sich für ein Foto in einer Reihe aufstellen sollen? Auf wie viele Arten können wir alle fünf Schüler für ein Foto in einer Reihe aufstellen?
Zunächst ist zu beachten, dass die Reihenfolge, in der wir die Schüler auswählen, eine Rolle spielt. Es gibt fünf Möglichkeiten, den ersten Schüler auszuwählen, der am Anfang der Reihe stehen soll. Sobald dieser Schüler ausgewählt wurde, gibt es vier Möglichkeiten, den zweiten Schüler in der Reihe auszuwählen. Nachdem der erste und der zweite Schüler ausgewählt wurden, gibt es drei Möglichkeiten, den dritten Schüler in der Reihe auszuwählen. Nach der Produktregel gibt es also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten, drei Schüler aus einer Gruppe von fünf Schülern auszuwählen, die sich für ein Foto in einer Reihe aufstellen sollen.
Um alle fünf Schüler für ein Foto in einer Reihe aufzustellen, wählen wir den ersten Schüler auf fünf Arten, den zweiten auf vier Arten, den dritten auf drei Arten, den vierten auf zwei Arten und den fünften auf eine Art aus. Folglich gibt es hierfür $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten, alle fünf Schüler für ein Foto in einer Reihe aufzustellen.
Schließlich hatten wir mit Hilfe der Produktregel den folgenden Satz mit Erweiterung formuliert:

Satz 0.1. *Wenn n eine positive ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $1 \leq r \leq n$ ist, dann gilt für die Anzahl $P(n,r)$ von r-Permutationen einer Menge mit n verschiedenen Elementen:*

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

P(n,r) gibt also die Anzahl aller Permutationen einer n-elementigen Menge der Länge r an.

Für $n = r$ gilt offenbar $P(n) := P(n,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Für eine Menge M mit n Elementen gilt $|P(n,r)| = |\{(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mid x_i \in M, x_i \text{ paarweise verschieden}\}|$

Satz 0.2. *Wenn n eine positive ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $1 \leq r \leq n$ ist, dann gilt*

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

So, jetzt lassen Sie uns einige Aufgaben formulieren.

a) Man modelliere beide Sachsituationen von oben mit Mengen (analog unserem Beispiel aus der Vorlesung (Buchseiten))

b) Man berechne $P(10,1), P(4,2), P(6,6), P(11,3)$ und $P(15,14)$.

c) Man gebe eine kreative Sachsituation an, die die 2-Permutation $P(6,2)$ einer 6-elementigen Menge beschreibt.

d) Man zeige die Gültigkeit von Satz 0.2 d.h.

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Es folgen jetzt einige kleine Aufgaben im Sachkontext der Permutationen. Es ist stets eine Modellierung anzugeben.

e) Anton tippt wahllos die acht Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H in seine Tastatur, z.B. $HEABCDFG$. Man bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, sodass die Buchstabenfolge ABC wie im Beispiel zusammenhängend ist.

f) Wir sehen ein – vereinfachtes - Kennzeichen, bestehend aus den ersten beiden Buchstaben AB, gefolgt von weiteren zwei Buchstaben CD und einer dreistelligen Zahl 123.



Bestimmen Sie die Anzahl der theoretisch möglichen Kennzeichen, wenn sowohl alle vier Buchstaben als auch alle drei Ziffern immer paarweise verschieden sind.

g) Man bestimme alle 4-stelligen, durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade und paarweise verschieden sind.

AUFGABE 2

Wir wollen uns nun mit unseren *Kombinationen ohne Wiederholung* aus der letzten Vorlesung beschäftigen, d.h. mit dem Zählen von Teilmengen T von einer gegebenen Menge M. Aus früheren Vorlesungen wissen wir bereits, dass die Anzahl aller Teilmengen T – also die Mächtigkeit der Potenzmenge von M – einer gegebenen n-elementigen Menge M durch

$$|P(M)| = 2^n$$

berechnet werden kann.

Die Anzahl der r-Kombinationen einer Menge mit n verschiedenen Elementen hatten wir mit $C(n, r)$ bezeichnet. Wir hatten nun

$$\binom{n}{r} := C(n, r)$$

gesetzt und den Ausdruck $\binom{n}{r}$ (lies: *n über r*) als *Binomialkoeffizient* bezeichnet.
Wir sehen, dass $C(4, 2) = 6$ gilt, da die 2-Kombinationen (oder die 2-elementigen Teilmengen) von $\{a, b, c, d\}$ die sechs Teilmengen $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ und $\{c, d\}$ sind. Wir erinnern uns, dass die Anzahl aller Paare von S, also die Zahl $P(4, 2) = 12$ gilt.
Schließlich hatten wir uns den folgenden Satz hergeleitet:

Satz 0.3. *Die Anzahl der r-Kombinationen einer Menge mit n Elementen, wobei n eine nicht negative ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $0 \leq r \leq n$ ist, entspricht*

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Wenden wir uns nun einigen Aufgaben zu.

a) Man berechne ausführlich den Wert der Binomialkoeffizienten $\binom{7}{3}$, $\binom{14}{4}$, $\binom{5}{5}$ und $\binom{n}{n-1}$.

b) Man gebe alle Teilmengen T_i der Menge $R = \{+, -, \cdot, :\}$ an und bestimme dann die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von R.

c) In einer Gruppe sind 5 Männer und 4 Frauen. Man bestimme die Anzahl möglicher Teilgruppen mit genau 3 Personen. Wie viele dieser Teilgruppen besteht nur aus Männern (nur aus Frauen)?

d) Ein Ausschuss mit 6 Personen soll aus 10 Männern und 15 Frauen gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn der Ausschuss mehr Frauen als Männer enthalten soll?

e) In einem Verein gibt es 7 Männer und 5 Frauen. Wie viele 4-köpfige Teams kann man bilden, wenn genau 2 Frauen dabei sein sollen?

f) Eine Lehrerin möchte 3 Schüler:innen für eine Präsentation auswählen, die sich aus 5 Jungen und 4 Mädchen zusammensetzt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn mehr Mädchen als Jungen gewählt werden sollen?

Aufgabe 3

Permutationen und Kombinationen spielen auch in Mathematikaufgaben der Grundschule eine große Rolle. Wir sehen zwei Beispiele aus der Schulrunde der Mathematik-Olympiade.
Lösen Sie die Aufgaben und kreuzen Sie in der Tabelle an, um welche Aufgabenarten es sich handelt.

	Zirkus a)	Zirkus b)	Rudern a)	Rudern b)	Rudern c)
Permutation	☐	☐	☐	☐	☐
Kombination	☐	☐	☐	☐	☐

620315 Zirkus
Lea hat drei Freikarten für den Zirkus geschenkt bekommen. Lea hat fünf Freundinnen: Anna, Bea, Carla, Dana und Emma. Sie kann nur zwei von ihnen mit in den Zirkus nehmen.

a) Gib alle Möglichkeiten an, wie Lea zwei Freundinnen mit in den Zirkus nehmen kann.

Nun hat Lea fünf Freikarten.

b) Gib alle Möglichkeiten an, wie Lea vier Freundinnen mit in den Zirkus nehmen kann.

590524 Rudern
Alexander, Bernd, Cedric und Dirk sind in einem Ruderverein. Der Ruderverein hat folgende vier Boote: einen blauen Vierer ohne Steuermann (vier Sitze), einen weißen Zweier mit Steu ermann (drei Sitze) und einen grünen und einen blauen Zweier ohne Steuermann (jeweils zwei Sitze).

a) Diese vier Jungen trainieren im Vierer ohne Steuermann. Dabei ist es wichtig, wer an welcher Stelle im Boot sitzt. Wie viele verschiedene Besetzungen lassen sich aus diesen Jungen zusammenstellen?

b) Nun bekommen diese Jungen Lust, im Zweier mit Steuermann zu trainieren. Wie viele Besetzungen lassen sich jetzt aus den vier Jungen bilden? Es kommt wieder auf die Sitzpositionen an!

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Jungen auf die beiden Zweier ohne Steuermann zu verteilen? Hier kommt es nicht auf die Sitzpositionen in den Booten an.

Aufgabe 4

Pia räumt ihr Zimmer auf. Auf dem Fußboden liegen ein Puzzle, ein Spiel, ein Satz Bauklötze und ein Keyboard, die alle die Kommode gehören. Die Kommode hat drei Schubladen. Das Schubfachprinzip besagt nun, dass die vier Gegenstände nicht alle in unterschiedlichen Schubladen landen können, d. h. in mindestens einer Schublade müssen, egal wie Pia die Spielsachen platziert, mindestens zwei der vier Gegenstände zu liegen kommen.
Das Schubfachprinzip ist auch eine mathematische Beweismethode. Wir illustrieren die Methode an einer Beispielaufgabe: Es sei $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 20\}$ eine Teilmenge der Mächtigkeit $|M| = 11$. Man beweise, dass es dann zwei teilerfremde Elemente $a, b \in M$ geben muss.
Für den Beweis erstellen wir eine Kommode mit zehn Schubladen, die mit den Mengen $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{19, 20\}$ beschriftet sein mögen. Nun verteilen wir die elf Elemente auf die zehn Schubladen, dabei kommt jedes Element $m \in M$ in die passende Schublade mit dem Label S mit $m \in S$. Nach dem Schubfachprinzip muss es eine Schublade geben, in der zwei Elemente aus M liegen. Hat die Schublade die Beschriftung $S = \{n, n + 1\}$, so sind $n, n + 1 \in M$ zwei Elemente aus M. Für die beiden benachbarten Zahlen gilt $\mathrm{ggT}(n + 1, n) = 1$, was zu zeigen war.
Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen, indem Sie passende Schubfächer und Gegenstände finden.

a) Marvin hat eine Tüte mit gelben, grünen und roten sauren Gurken. Er nimmt vier saure Gurken aus der Tüte. Man zeige, dass es unter den vier sauren Gurken zwei Gurken der gleichen Farbe gibt.

b) 13 Menschen kommen zusammen. Man zeige, dass zwei Menschen im gleichen Monat Geburtstag haben.

c) Ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ heißt Gitterpunkt, falls die Koordinaten $x, y, z \in \mathbb{Z}$ alles ganze Zahlen sind. Es sei $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ eine Menge aus $|X| = 9$ Gitterpunkten. Man zeige, dass es zwei verschiedene Punkte $P, Q \in X$ gibt, deren Mittelpunkt ebenfalls ein Gitterpunkt ist.

d) Zehn Menschen spielen ein Tischtennisturnier. Es spielt jeder genau einmal gegen jeden anderen. Man zeige, dass es zu jedem Zeitpunkt des Turniers zwei Spieler gibt, die die gleiche Anzahl an Spielen gespielt haben.

e) Es sei $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 100\}$ der Teilmenge der Mächtigkeit $|M| = 51$. Man beweise, dass es zwei verschiedene Elemente $a, b \in M$ geben muss, für die $a \mid b$ gilt.

Aufgabe 5

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Das allgemeine Schubfachprinzip lautet: Wenn wir $m \cdot n + 1$ Spielsachen auf m Schubladen verteilen, so muss es am Ende eine Schublade geben, in der mindestens $n + 1$ Spielsachen liegen.

a) Begründen Sie das allgemeine Schubfachprinzip.

b) Füllen Sie die Lücken, sodass die Aussagen wahr werden und so scharf wie möglich sind.

- In einer Klasse sind 22 Kinder. Dann gibt es in der Klasse _____ Kinder, die in diesem Jahr am gleichen Wochentag Geburtstag haben.
- 51 Tauben setzen sich auf 6 Häuser. Dann gibt es ein Haus, auf dem mindestens _____ Tauben sitzen.
- 20 Bücher haben zusammen insgesamt 6625 Seiten. Dann gibt es darunter ein Buch, das mindestens _____ Seiten hat.