ÜBUNG 7

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 10. November bis 10 Uhr

Es folgt eine kurze Zusammenfassung

Definition. Sei B ein Ereignis eines Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω,P) mit $P(B) > 0$. Dann heißt für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B eingetreten ist*, kurz die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B oder Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.*
Auch haben wir im Zusammenhang mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit die Gültigkeit folgender Beziehung für paarweise disjunkte Ereignisse A_i angedeutet:

$$P_B\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P_B(A_i).$$

Folgende Sätze wurden bewiesen bzw. werden wir jetzt am kommenden Montag in der Vorlesung beweisen:

Satz (*Produktsatz*)
Für zwei Ereignisse A, B eines Wahrscheinlichkeitsraumes gilt stets

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

$(*)$ Erweiterung auf weitere Ereignisse C, D durch

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C) \cdot P_{A\cap B\cap C}(D),$$

usw.

Satz (*von der totalen Wahrscheinlichkeit*)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien B_i paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(B_i) \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{B_i}(A) \cdot P(B_i).$$

Zweimalige Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit führen uns zum
Satz (*von Bayes oder die Bayes-Formel*)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien B_i paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(B_i) \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Sei A ein weiteres Ereignis mit $P(A) \neq 0$.
Dann gilt für jedes $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P_{B_k}(A) \cdot P(B_k)}.$$

Aufgabe 1
Unter den letzten vier Spielerinnen eines Tennis-Turniers stehen zwei deutsche und zwei spanische Spielerinnen. Es werden zwei Halbfinal-Begegnungen ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines rein deutschen und rein spanischen Halbfinales? Schätzen Sie zunächst!

Aufgabe 2
Eine Münze wird n-mal geworfen, die beiden Ergebnisse sind die Bilder Wappen (W) oder Zahl (Z).

a) Man gebe für dieses Experiment einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum an.

b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-ten Wurf das Bild Wappen fällt.

c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-ten Wurf das Bild Wappen fällt, wenn zuvor immer das Bild die Zahl war.

Aufgabe 3
In einer Urne liegen 3 weiße und 3 schwarze Kugeln, in einer zweiten 4 weiße und 4 schwarze. Jeder Urne entnehmen Sie jeweils genau eine Kugel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei gleichfarbige Kugeln ziehen. Nicht nur der gesunde Menschenverstand sondern auch eine seriöse Rechnung bestätigt schnell eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ für das Eintreten des Ereignisses. Haben Sie es? Prima...
Nun legen Sie in die zweite Urne drei weitere schwarze Kugeln, ziehen wie eben und berechnen wieder die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei gleichfarbige Kugeln ziehen, Donnerwetter: ich bekomme wieder $\frac{1}{2}$ als Wahrscheinlichkeit, Sie auch? Wissen Sie, wie der Hase läuft?
Geben Sie nun ein möglichst allgemeines Experiment im obigen Sinne so an, das als Wahrscheinlichkeit stets $\frac{1}{2}$ liefert.

Aufgabe 4
Sei $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. In einer Urne liegen x rote und $5 - x$ grüne Kugeln. Wie viele Kugeln liegen dann in der Urne? - nein, dass ist nicht die Frage :-)
Der unschuldige Schüler Antonius zieht aus der Urne eine Kugel und Franzi soll erraten, welche Farbe die Kugel hat. Rät sie die Farbe hat sie natürlich gewonnen, andernfalls verloren. Dabei verfolgt sie unterschiedliche Rate-Strategien, nämlich

1. *Strategie:* Sie rät, dass Antonius eine rote Kugel zieht.

# rote Kugel in der Urne	Gewinnwahrscheinlichkeit für Strategie ...				
	1.Stategie	2.Stategie	3.Stategie	4.Stategie	5.Stategie
0	0	1	1	1	1
1				0,74	
2		0,60			
3			0,52		
4					0,80
5	1	0	1	1	1

2. *Strategie:* Sie rät, dass Antonius eine grüne Kugel zieht.

3. *Strategie:* Sie zieht zuerst eine Kugel aus der Urne und legt diese zurück, dann rät sie, dass Antonius eine Kugel mit derselben Farbe zieht, also wenn sie eine rote Kugel zieht, so rät sie, dass auch Antonius eine rote Kugel zieht.

4. *Strategie:* Sie zieht zuerst eine Kugel aus der Urne und legt diese zurück, dann zieht sie erneut die Kugel und legt auch diese zurück. Wenn die beiden Kugeln von derselben waren, dann rät sie, dass auch Antonius eine Kugel mit der entsprechenden Farbe zieht. Wenn die beiden Kugeln unterschiedliche Farben hatten, zieht Franzi erneut eine Kugel aus der Urne, ist sie rot, dann rät sie, dass Antonius eine rote Kugel zieht, andernfalls rät sie, dass Antonius eine grüne Kugel zieht.

5. *Strategie* Wie die vierte Strategie mit dem Unterschied, dass die erste Kugel vor dem Ziehen der zweiten nicht zurückgelegt wird. Ist ferner das Ziehen einer dritten Kugel nötig, so sollen die beiden gezogenen Kugeln vorher nicht zurückgelegt werden.

Natürlich fragt sich Antonius, welche der fünf Strategien die höchste Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt, aber diese ist sicher von der Verteilung der roten und grünen Kugeln abhängig und sicher auch nicht eindeutig. Ergänzen Sie die Tabelle als Dokumentation Ihrer Lösungen. Auf eine Dokumentation Ihrer Lösungswege kann verzichtet werden, vielleicht malen Sie ein paar Bäume ...

Aufgabe 5

Es gibt drei Eimer mit jeweils zwei Münzen. Im ersten Eimer sind 1ct Münzen, im zweiten 2ct Münzen, im dritten eine 1ct und eine 2ct Münze. Jemand entscheidet sich zufällig für einen Eimer und nimmt eine Münze heraus. Es ist eine 1ct Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze in diesem Eimer auch eine 1ct Münze ist?

Aufgabe 6

In einer Urne liegen eine weiße und eine schwarze Kugel. Eine Kugel wird gezogen und anschließend zurück in die Urne gelegt, wobei gleichzeitig eine weitere Kugel von der zuerst gezogenen Farbe der Urne hinzugefügt wird. Nun wird wieder eine Kugel aus der Urne gezogen und zusammen mit einer weiteren derselben Farbe zurückgelegt. Diese Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen, jedenfalls theoretisch.

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die erste (zweite, dritte, vierte) Kugel schwarz ist.

b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist, wenn die erste Kugel schwarz war.

c) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei Ziehungen aus lauter schwarzer Kugeln besteht.

d) Eine Verallgemeinerung: Seien nun w weiße und s schwarze Kugeln in der Urne und es werden nun z Kugeln gemäß der gezogenen Farbe anschließend zurück in die Urne gelegt. Man beantworte dieselben Fragestellungen wie in Teil a),b) und c).