# ÜBUNG 6

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 3. November bis 10 Uhr

Zusammenfassung unserer „Abzählformeln“:

| | **mit Reihenfolge** | **ohne Reihenfolge** |
|---|---|---|
| **mit Wiederholung** | $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-mal} = n^k$ | $\binom{n+k-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$ |
| **ohne Wiederholung** | $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ |

*Auswahl von $k$ Elementen aus einer Menge mit $n$ Elementen*

Nun zu den Aufgaben ...

### *Aufgabe 1*

In einer Losbude stehen drei Los-Eimer, ein großer und zwei kleine. In dem großen Eimer sind 100 Lose, davon 10 Gewinne. In jedem der kleinen Eimer sind 50 Lose, davon 5 Gewinne. Jemand kauft zwei Lose und möchte dabei mindestens einen Gewinn haben. Ist es dann günstiger, beide Lose aus dem großen Eimer zu kaufen, oder aus jedem der kleinen Eimer ein Los? Schätzen Sie bevor Sie rechnen!

### *Aufgabe 2*

Zwei Spieler werfen abwechselnd eine Münze, erst Spieler 1, dann Spieler 2. Der Spieler bekommt 2 Punkte, wenn Wappen (W) erscheint, und 1 Punkt, wenn Zahl (Z) erscheint. Wenn ein Spieler mindestens 3 Punkte erreicht hat, wird das Spiel sofort abgebrochen, und dieser Spieler hat gewonnen. Für welchen Spieler würden Sie sich entscheiden: Spieler 1 oder Spieler 2?

### *Aufgabe 3*

*Ein erstaunliches Phänomen*

In einer Urne liegen 4 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es werden gleichzeitig 2 Kugeln aus der Urne entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln verschiedene Farben haben.

Nachdem die beiden Kugeln wieder in die Urne zurückgelegt wurden, wird eine weitere schwarze Kugel in die Urne gelegt und anschließend wieder zwei Kugeln gegriffen. Bestimmen Sie wieder die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine der beiden Kugeln schwarz und die andere weiß ist.

Wenn Sie sich nicht verrechnet haben, erhalten Sie in beiden Versuchen dieselbe Wahrscheinlichkeit - das ist schon wunderbar, aber kein Wunder. Nun verallgemeinern wir die

Situation und kehren sie um, d.h. bearbeiten Sie nun die folgende Aufgabe: In einer Urne liegen weiße und schwarze Kugeln (Anfangs-Zustand). Jetzt wird eine zusätzliche schwarze Kugel in die Urne gelegt (veränderter Zustand). Die Wahrscheinlichkeit, bei gleichzeitigem Herausgreifen von zwei Kugeln zwei verschiedenfarbige zu bekommen, soll dabei in beiden Zuständen dieselbe sein. Man zeige: Beim veränderten Zustand liegen dann ebenso viele weiße wie schwarze Kugeln in der Urne.

### *Aufgabe 4*

a) Eine Urne enthält 4 schwarze, 4 weiße und 4 rote Kugeln, offenbar von jeder Sorte gleich viele. Es werden drei Kugeln mit einem Griff herausgegriffen. Man zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dabei von jeder Farbe eine Kugel zu bekommen, ist größer als $\frac{2}{9}$.

   Auch hier wollen wir eine Verallgemeinerung ansteuern.

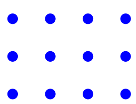
b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Urne enthält $n$ schwarze, $n$ weiße und $n$ rote Kugeln. Es werden drei Kugeln mit einem Griff herausgegriffen. Man zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dabei von jeder Farbe eine Kugel zu bekommen, ist dann auch größer als $\frac{2}{9}$.

c) Man zeige $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{6n^3}{3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-2)} \right\} = \dfrac{2}{9}$

### *Aufgabe 5*

Von den 12 abgebildeten Punkten in einem $4 \times 3$ Gitter werden 3 Punkte zufällig ausgewählt.

i) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die ausgewählten Punkte allesamt auf einer Geraden liegen.



ii) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit in einem $n \times m$ Gitter mit $n, m \in \mathbb{N}$ für das Ereignis, dass die ausgewählten Punkte auf einer horizontalen oder vertikalen Geraden liegen.