ÜBUNG 5

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 20. Oktober bis 10 Uhr

Wir haben am letzten Montag folgende Zählstrategien (bis auf Versuch 4) besprochen: Betrachten wir einen Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum mit seiner (endlichen) Ergebnismenge Ω und ein Ereignis T. Sehr häufig müssen wir in diesen Fällen gewisse Anzahlen (auch Möglichkeiten) ausrechnen bzw. kombinieren. Dabei können wir uns gewisser *Regeln* und *Zählprinzipien* bedienen, die wir kurz wiederholen wollen. Eine Art *Summenregel* in Verbindung des Axioms 2 haben wir schon kennengelernt, sie besagt: Sind $T_1, T_2, \ldots, T_n$ paarweise disjunkte Ereignisse eines Zufallsexperimentes, dann gilt

$$|T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \ldots \cup T_n| = |T_1| + |T_2| + \ldots + |T_n| = \sum_{i=1}^{n} |T_i|.$$

Auch die *Produktregel* haben wir schon oft in Aufgaben benutzt: Besitzen die Ereignisse T_i jeweils m_i Ausgänge (also $|T_i| = m_i$), dann hat das Zufallsexperiment $\prod m_i = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ Ausgänge, so gibt es z.B. bei einer in diesem Kontext zu erwartenden Fragestellung bei 4 Schuhen, 3 Hosen und 5 Hemden insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 5$ mögliche Anzieh-Kombinationen, als Ausgänge eines (eigentlich mehrstufigen) Versuchs. Diese beiden Regeln helfen nun, gewisse Zählprinzipien in endlichen W.-Räumen zu analysieren. Wir modellieren dabei stets einen gegebenen Zufallsversuch durch eine Schachtel oder Urne, in der unterscheidbare Kugeln liegen (z.B. Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, ..., n beschriftet sind), es gilt also, dass die Ergebnismenge Ω genau n Elemente enthält. Grundsätzlich gibt es nun zwei Fragestellung beim Ziehen einer gewissen Anzahl von Kugeln (wobei dies - wie gesagt - am Montag in der Vorlesung ausführlich behandelt wird):

- Spielt die *Reihenfolge* der gezogenen Kugeln eine Rolle? *Ja* oder *Nein*.
- Wird die gezogene Kugel nach dem Ziehen wieder zurück in die Schachtel gelegt, kann sich also beim Ziehen ein und dieselbe Kugel *Wiederholen* ? *Ja* oder *Nein*. (Man spricht auch von *mit/ohne Zurücklegen*.)

Offenbar existieren nach diesen Fragestellungen vier mögliche Fälle (Versuch 1 bis Versuch 4), die wir hier kurz zusammenfassen wollen (und die Sie an anderer Stelle unter den Stichworten Kombinationen und Variationen mit und ohne Wiederholung finden können). Dabei werden wir stets k Kugeln aus einer Schachtel mit n Kugeln ziehen.

Versuch 1 (Reihenfolge JA - Wiederholung JA)

Wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt, können wir die Anzahl der Möglichkeiten offenbar gut mit Hilfe unserer Produktregel und dem Wesen von Tupeln modellieren, denn für die erste Kugel haben wir n Möglichkeiten, für zweite wieder n Möglichkeiten (da die erste Kugel wieder zurück gelegt wurde) etc, also haben wir nach obiger Produktregel insgesamt $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ Möglichkeiten und dies genau k-mal (wir haben ja k Kugeln gezogen), also insgesamt n^k Möglichkeiten.

	mit Reihenfolge	**ohne Reihenfolge**
mit Wiederholung	Versuch 1 n^k	Versuch 4 $\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholung	Versuch 2 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$	Versuch 3 $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Tabelle 1: Auswahl von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen

Versuch 2 (Reihenfolge JA - Wiederholung NEIN)

Na, dieser Versuch ist recht ähnlich, lediglich werden die gezogenen Kugeln nicht in die Schachtel zurückgelegt. Damit haben wir für die erste Kugel n zur Auswahl, für die zweite eine weniger also $n-1$ Möglichkeiten der Auswahl, etc. bis wir k Kugel gezogen haben, d.h. bis $n-(k-1)$ Möglichkeiten. Insgesamt ergibt sich für diesen Versuch nach obiger Produktregel $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ Möglichkeiten. Wenn tatsächlich alle Kugeln gezogen werden, also wenn $k = n$ ist, dann bleibt im letzten Zug eine einzige Kugel übrig, was dann zu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ führt - dieses Produkt wird bekanntlich mit $n!$ abgekürzt.

Versuch 3 (Reihenfolge NEIN - Wiederholung NEIN)

Wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt (zum Beispiel ist es beim Lotto ja unerheblich, an welcher Stelle die Zahl gezogen wird), haben wir offenbar aus der Schachtel mit einem Griff (das symbolisiert das Nicht-Zurücklegen) k Kugeln zu ziehen. Wenn wir diese gesuchte Anzahl einfach mit $\binom{n}{k}$ bezeichnen, dann gibt sie offenbar die Anzahl der k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge $\{1, \ldots, n\}$ an. Dass der Binomialkoeffizient tatsächlich das leistet, was er verspricht, zeigt folgende Überlegung: Im Versuch 2 haben wir die Anzahlformel $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ entwickelt. Spielt die Reihenfolge wie in diesem Versuch keine Rolle, müssen wir diesen Ausdruck durch die Möglichkeiten aller Anordnungen von k Kugeln dividieren, also durch $k!$. Wir haben nun den für diesen Versuch gültigen Ausdruck $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}$. Nun könnte man für diesen Ausdruck den Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ einführen.

Versuch 4 (Reihenfolge NEIN - Wiederholung JA)

Hier gilt die Anzahlformel $\binom{n+k-1}{k}$, welche wir natürlich auch besprechen werden.

Wenden wir uns nun wieder einigen Aufgaben auch aus diesem Kontext zu, wobei - wenn nicht erwähnt - stets eine passende Menge Ω angegeben werden soll. Modellieren Sie die Aufgaben so, dass gewisse Zählstrategien deutlich werden, die Anzahlformeln brauchen dabei (noch) nicht explizit benutzt werden.

Aufgabe 1

Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Es gilt $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$ und $P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = 2 \cdot P(\{\omega_1\})$. Man bestimme $P(\{\omega_1, \omega_3\})$.

Aufgabe 2

a) Eine Zahl a wird beliebig aus der Menge der ersten 20 natürlichen Zahlen, also aus $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ gezogen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass a durch 6 oder 8 teilbar ist.

b) Eine Zahl b wird beliebig aus der Menge der ersten 200 natürlichen Zahlen gezogen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass b durch 6 oder 8 teilbar ist.

c) Eine Zahl c wird beliebig aus der Menge der ersten 2000 natürlichen Zahlen gezogen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass c durch 6 oder 8 teilbar ist.

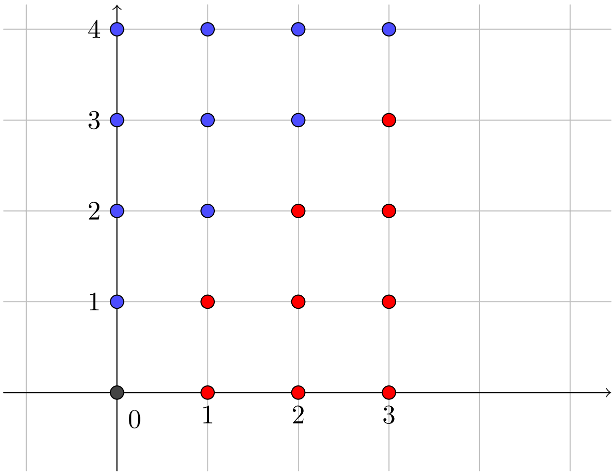
d) Die Ergebnisse aus a), b) und c) lassen einen allgemeinen Satz vermuten. Man formuliere und beweise ihn. [Sie dürfen auch nur Teil d) machen :-)]

Aufgabe 3

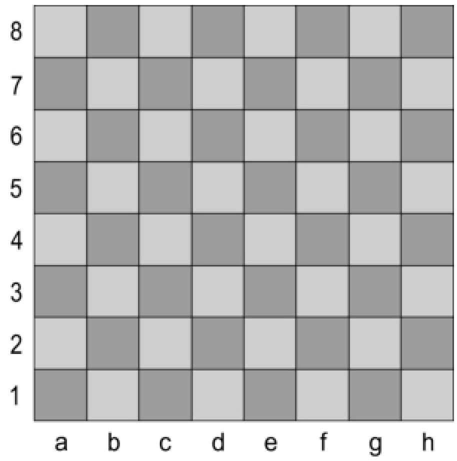
In zwei Urnen befinden sich Kugeln, die weiß oder schwarz sind. In der ersten Urne sind gleichviel weiße wie schwarze Kugeln, und in der zweiten Urne ist die Verteilung beliebig. Urmel zieht zunächst aus der ersten Urne eine beliebige Kugel und dann aus der zweiten. Lässt sich aus diesen Informationen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: "Urmel zieht zwei verschiedene Kugeln" berechnen?

Aufgabe 4

Es fand eine Wahl statt und zwar zwischen Kandidat B und Kandidat T. Insgesamt wurden 7 gültige Stimmen abgegeben, die Auszählung erfolgt dabei Stimme für Stimme. B erhielt 4 Stimmen, T genau 3 Stimmen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kandidat B bei dem Auszählungsvorgang stets mehr Stimmen als Kandidat T hat.
Bringen Sie folgendes Bild im Zusammenhang mit der obigen Aufgabe.



Aufgabe 5
Auf einem Schachbrett steht der schwarze König auf dem Feld a8 (bzw. e3). Die weiße Dame, die sich von ihrem Feld aus horizontal, vertikal und diagonal bewegen darf, wird zufällig auf eines der restlichen 63 Felder gestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der schwarze König dann im Schach, d.h. auf einem von der Dame zu erreichenden Feld?



***Aufgabe 6* [nicht schriftlich]**
Auf den folgenden Seiten finden Sie eine Spielidee/Anleitung/Arbeitsblätter (für Schülerinnen und Schüler) zum Memory (allerdings sehr eingeschränkt, es sind nur 3 Paare). Spielen Sie in den vorbereitenden Übungen dieses Spiel und analysieren Sie es vollständig gemäß der zentralen Frage: Welche Gewinnchance ist höher: die des Anziehenden oder die des Nachziehenden, wobei man stets die Voraussetzung geltend machen muss, dass *mit Intelligenz, d.h. z.B. ohne Vergessen* gespielt wird!

Das Drei-Paar-Memory

Spielregeln:
Das Drei-Paar-Memory wird zu zweit gespielt mit dem Ziel, möglichst viele Paare zu gewinnen. Eine Person beginnt (im Folgenden Anzieher genannt) mit dem Aufdecken der ersten Karte. Deckt sie mit der zweiten Karte ein Paar auf, so gewinnt sie dieses Paar und darf fortfahren. Andernfalls werden die Karten wieder umgedreht und die zweite Person (im Folgenden Nachzieher genannt) ist an der Reihe. Es gewinnt derjenige, der die meisten Paare aufdeckt und gewinnt. Sind alle Karten vom Tisch, so ist eine Partie beendet.

1. Ohne sich darüber zu unterhalten, geben Sie bitte einen ersten Eindruck wieder: Hat einer der Spieler einen Vorteil? Machen Sie vorne in der Liste einen Strich.

2. Spielen sie dieses Spiel zu zweit insgesamt zehnmal und füllen sie die Tabelle unten aus. Reden Sie vorher nicht miteinander über vermutete Strategien. Nach fünf Partien wechseln sie die Rollen zwischen Anzieher und Nachzieher. Verwenden Sie für den Sieger nur das Kürzel **A** (Anzieher) oder **N** (Nachzieher). Notieren Sie in der dritten Zeile der Tabelle die Anzahl der gewonnenen Paare für den Anzieher.

Partie	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Sieger										
Paare										

3. Hat sich an Ihrer Meinung etwas geändert? Machen Sie wiederum vorne einen Strich, welcher Spieler nun Ihrer Meinung nach einen Vorteil hat.

4. Entwickeln Sie gemeinsam Strategien. Wie muss man vorgehen, um beim Drei-Paar-Memory möglichst erfolgreich zu sein?

5. Spielen Sie jetzt noch einmal zehn Partien gegeneinander unter Verwendung der entwickelten Strategien. Wechseln Sie wieder nach fünf Partien die Rollen.

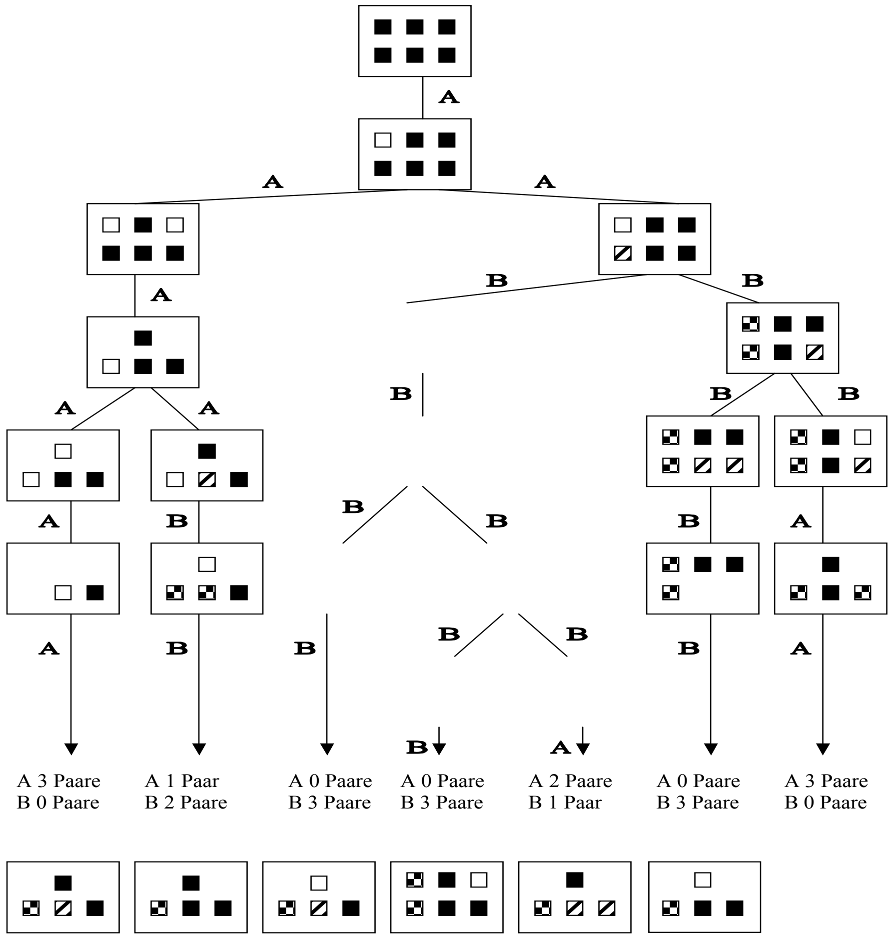
Partie	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Sieger										
Paare										

6. Stellen Sie gemeinsam begründet Vermutungen auf. Hat einer der Spieler einen Vorteil? Welcher Ausgang ist, was die Verteilung der gewonnenen Paare angeht, am wahrscheinlichsten? Machen Sie vorne wieder einen Stich, welcher Spieler nun Ihrer Meinung nach im Vorteil ist.

Das Drei-Paar-Memory (Baumdiagramm und Pfadregel) (Lorenzen/Mallas)

Legende

Unbekannte, verdeckte Karte — Offene Karte — Offene, aber bisher unbekannte Karte — Bekannte, aber verdeckte Karte — A Spieler A ist am Zug



Aufgaben:

1. Versuchen Sie das Baumdiagramm (eventuell auch mithilfe der Spielkarten) nachzuvollziehen. Ergänzen Sie dann die unten stehenden sechs Kästchen im mittleren Abschnitt des Baumdiagramms.

2. Ergänzen Sie im Baumdiagramm die einzelnen Zweigwahrscheinlichkeiten.

3. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für alle sieben Ausgänge an.

4. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Anzieher gewinnt.