ÜBUNG 10

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 1. Dezember bis 10 Uhr

Folgende Definitionen haben wir am letzten Montag fachlich und fachdidaktisch umfassend diskutiert:

Definitionen (Zufallsgröße oder Zufallsvariable/Verteilung/Erwartungswert)
Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, dann nennen wir eine Funktion

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } \omega \mapsto X(\omega) = \mathrm{r}$$

eine *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* auf Ω.
X(ω) heißt *Wert von X zum Ausgang* ω oder kurz der Wert der Zufallsgröße.

Eine (reellwertige) Funktion

$$W : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto W(x) = P(\{X = x\}) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\})$$

nennen wir eine *Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X* oder kurz eine *Verteilung von X*. Es ist also $P(\{X = x\})$ (oder kurz $P(X = x)$) die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X bzgl. ω den Wert x annimmt.

Eine Zufallsgröße X habe die reelle Wertemenge $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W(x_i)$ bzw. $P(X = x_i)$. Dann heißt die Zahl

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot W(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

der *Erwartungswert der Zufallsgröße X*.

In diesem Zusammenhang sind nun die folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1
An einer Jahrmarktsbude wird für 1€ Einsatz folgendes Spiel angeboten: Aus 6 verdeckt liegenden Karten, von denen 3 rot und 3 schwarz sind, zieht der Spieler nacheinander und ohne Zurücklegen Karten, und zwar so lange, bis er entweder eine schwarze Karte zieht oder freiwillig aufhört. Im ersten Fall erhält er nichts (hat also 1€ verloren), und im zweiten Fall erhält er 2^n€ (hat also $2^n - 1$€ gewonnen), wobei n die Anzahl der gezogenen (ausschließlich roten) Karten sei. Wie ist das optimale Verhalten des Spielers und wie groß ist sein Gewinn-Erwartungswert bei diesem optimalen Verhalten?

Aufgabe 2

Auf einem Jahrmarkt steht ein Glücksrad, dessen 10 Felder mit gleicher Wahrscheinlichkeit erscheinen, wenn man es in Bewegung setzt. Für eines der Felder erhält man 3 Punkte Gutschrift, für zwei andere je 1 Punkt, sonst 0 Punkte. Hat man mindestens 4 Punkte erspielt, so erhält man einen Teddybären im Wert von €10. Der Einsatz beträgt pro Spiel €1.

Wie groß ist der Erwartungswert des Spiels für einen Spieler, der sofort aufhört, wenn er mindestens 4 Punkte gesammelt hat, und der höchstens dreimal spielt?

Aufgabe 3

Ein Spieler würfelt dreimal nacheinander mit einem Würfel. Nach dem zweiten Wurf muss er sich entscheiden, ob die beiden bisherigen Augenzahlen addieren und dann später mit der dritten Augenzahl multiplizieren will, oder ob er erst multiplizieren und dann addieren will.

Wie soll er sich verhalten, um im Mittel eine möglichst große Endzahl zu erhalten und wie groß ist dann der Erwartungswert für die Endzahl bei diesem optimalen Verhalten?

Aufgabe 4

Beim Würfelspiel „Hohe Hausnummer“ geht es darum, durch zweimaliges Würfeln mit einem Würfel eine möglichst hohe zweistellige Zahl zu erzielen:

Nach dem ersten Wurf bestimmt der Spieler, ob die gefallene Augenzahl die Einerziffer oder die Zehnerziffer sein soll; die im zweiten Wurf fallende Augenzahl gibt dann die andere Ziffer. Wie sollte sich der Spieler verhalten, um eine möglichst hohe „Hausnummer“ zu bekommen, und wie groß ist der Erwartungswert für die Hausnummer bei diesem Verhalten?

Diese Aufgabe wurde als Klausuraufgabe auch in eine online-Variante zu folgender sehr ähnlichen Aufgabe umgewandelt:

Beim Würfelspiel „Große Zahl“ geht es darum, durch zweimaliges Würfeln mit einem Würfel eine möglichst hohe zweistellige Zahl zu erzielen: Nach dem ersten Wurf bestimmt der Spieler, ob die gefallene Augenzahl die Einerziffer oder die Zehnerziffer sein soll; die im zweiten Wurf fallende Augenzahl gibt dann die andere Ziffer. Wie sollte sich der Spieler verhalten, um eine möglichst große Zahl im Spiel zu bekommen, und wie groß ist der Erwartungswert (ein Term genügt) dieser Zahl bei diesem Verhalten? Für die Beantwortung der Fragen ist folgende Tabelle hilfreich (allerdings wurde in ihr die Kopfzeile gelöscht).

1	36	13,5
2	37	23,5
3	38	33,5
4	39	43,5
5	40	53,5
6	41	63,5

Aufgabe 5
Ein Würfelspiel für zwei Personen findet mit drei ungewöhnlichen Würfeln statt:

- der erste Würfel trägt die Zahlen $1, 1, 5, 5, 5, 5$,
- der zweite Würfel die Zahlen $2, 2, 2, 2, 6, 6$,
- der dritte Würfel die Zahlen $3, 3, 4, 4, 4, 4$.

Ihr Gegenspieler greift sich zufällig einen Würfel, und dann dürfen Sie von den verbleibenden beiden Würfeln einen auswählen. Jetzt würfelt jeder mit seinem Würfel, und wer die höhere Augenzahl geworfen hat, erhält vom anderen €1.

a) Wie ist Ihre optimale Strategie bei der Würfel-Wahl?

b) Wie groß ist Ihr Erwartungswert, wenn Sie sich nach dieser Strategie verhalten?

Aufgabe 6
Man zeige, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim vierfachen Würfelwurf die Augensumme der vier Zahlen eine Quadratzahl liefert, stets größer ist als $\frac{5}{36}$.

Auf Wunsch folgt noch eine alte Klausur aus irgendeinem Jahr, Lösungen sind skizziert.

AUFGABE 1
Aus den Ziffern 4 und 5 wird eine sechsstellige Zahl wahllos gebildet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Zahl

a) durch 2 b) durch 3 c) <u>nicht</u> durch 15

teilbar ist?
Es wird eine formale Definition von Ω und der drei Ereignisse A, B, C in $a), b), c)$ gefordert.
Lösungen
$P(A) = \frac{2^5}{2^6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{22}{2^6} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$; $P(\overline{C}) = \frac{11}{2^6}, P(C) = \frac{53}{64}$

AUFGABE 2
Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Für jedes $s \in \{2, ..., 12\}$ sei A_s das Ereignis, dass die Augensumme $\leq s$ ist.

a) Man berechne folgende Wahrscheinlichkeiten

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(A_s)$	$\frac{1}{36}$										1

b) B sei das Ereignis, dass die beiden Augenzahlen sich um 1 oder um 5 unterscheiden.

i) Man gebe ein s an, für das gilt, dass die Ereignisse A_s, B abhängig sind (mit Beweis).
ii) Man gebe ein t an, für das gilt, dass die Ereignisse A_t, B unabhängig sind (mit Beweis).

Lösungen
$i)P(B) \cdot P(A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} \neq P(B \cap A_2)$, $ii)P(B) \cdot P(A_{12}) = \frac{1}{3} \cdot 1 = P(B \cap A_{12})$

AUFGABE 3
In einer Urne sind n Kugeln, durchnummeriert mit den Zahlen von 1 bis n. Jemand entnimmt alle Kugeln, eine nach der anderen (ohne Zurücklegen), und legt sie in einer Reihe vor sich hin, bis alle aus der Urne genommen wurden.
Eine solche Reihe nennen wir eine *Schlucht*, wenn die Kugelnumnmern vor dem Auftreten der 1 absteigend und nach der 1 aufsteigend sind. Für $n = 6$ ist zum Beispiel die Reihe $5-2-1-3-4-6$ eine Schlucht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Schlucht im Fall $n = 5$?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Schlucht für beliebiges n?

Lösungen
$$P(B) = \frac{\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}}{n!} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$