Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse **5**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610511

Nach dem Unterricht treffen sich Nele, Lara und Josy auf dem Spielplatz. Die Mädchen haben verschiedene Lieblingsgeräte; diese sind die Rutsche, der Schaukelkorb und das Klettergerüst.

(1) Nele und das Mädchen, das am liebsten klettert, gehen in die gleiche Klasse.
(2) Lara meidet den Schaukelkorb, weil ihr da schon öfter schwindelig geworden ist.
(3) Nele und das Mädchen, das gerne schaukelt, wohnen in der gleichen Straße.

Ermittle, welches Mädchen welches Lieblingsgerät auf dem Spielplatz hat.

Schreibe deine Lösungsüberlegungen auf.

610512

Tobias möchte die Zahlen von 1 bis 10 jeweils als Ergebnis einer Rechnung erhalten, bei der genau viermal die Zahl 8 verwendet wird. Dabei soll er nur die vier Rechenzeichen $+$, $-$, $:$, $\cdot$ und Klammern benutzen. Beim Rechnen muss er die Vorrangregel für die Rechenoperationen und für die Klammern beachten.

Tobias hat für die 0 folgende Darstellung gefunden: $8 : 8 - 8 : 8 = 0$. Dann sucht er weiter und findet für alle Zahlen von 1 bis 10 eine Darstellung – nur für die 5 nicht.

a) Gib für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 und 10 jeweils eine Darstellung an.

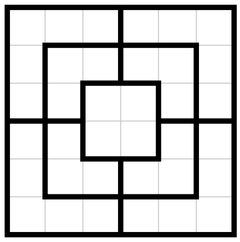
Tobias nimmt sich jetzt eine fünfte Zahl 8, und nun gelingt es ihm, auch die Zahl 5 darzustellen.

b) Stelle die Zahl 5 nach den Regeln durch fünf Ziffern 8 dar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610513

Die Abbildung zeigt ein Mühle-Brett.



a) Zeichne die Linien auf dem Spielfeld in möglichst wenigen Zügen nach. Dabei darf keine Linie doppelt gezeichnet werden. Solange du den Stift nicht absetzt, ist das immer noch derselbe Zug.
Nimm für jeden neuen Zug eine neue Farbe.
Wie viele Farben brauchst du mindestens?
Hinweis: Du brauchst nicht zu begründen, dass es keine kleinere Zahl an Farben gibt.

b) Wie lang (in Kästchenlängen) ist der längste Zug, den man nach dieser Regel zeichnen kann? Begründe, dass es keinen längeren Zug geben kann.

c) Male die neun Flächen im Spielfeld farbig aus. Flächen, die eine gemeinsame Liniengrenze haben, sollen unterschiedliche Farben aufweisen.
Wie viele Farben brauchst du wenigstens? Begründe dein Ergebnis.

610514

Clara hat einen Haufen mit vielen „Kupfermünzen“ vor sich, also Münzen zu 1 Cent, 2 Cent und 5 Cent.

Sie überlegt: Wenn ich mit den Münzen aus diesem Haufen insgesamt einen Betrag von 20 Cent bilden will, so kann ich 20 1-Cent-Münzen nehmen. Ich kann also die 20 Cent aus zwanzig Münzen bilden. Andererseits kann ich auch vier 5-Cent-Münzen nehmen. Also kann ich die 20 Cent auch aus nur vier Münzen bilden. Wie ist das mit anderen Anzahlen von Münzen?

a) Zeige, dass sich für jede Anzahl von Münzen zwischen 20 und 4 Münzen (also mit 19 Münzen, mit 18 Münzen usw.) <u>mit einer Ausnahme</u> eine Zusammenstellung von „Kupfermünzen“ finden lässt, deren Gesamtwert wieder 20 Cent beträgt.
Welche Anzahl bildet die Ausnahme und warum?

b) Warum braucht sich Clara nicht um die Anzahlen von Münzen oberhalb von 20 oder unterhalb von 4 zu kümmern?

Olympiadeklasse **6**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610611

Anna, Bea, Clara und Dana haben viele gleich große Papierquadrate in den Farben Rot, Grün, Blau und Weiß.

a) Jedes der Mädchen wählt sich zunächst eine der Farben; dabei wählt jede eine andere. Ermittle, wie viele Möglichkeiten die Mädchen dafür haben.

Nun schneiden die Mädchen alle Papierquadrate entlang einer Diagonalen in jeweils zwei Dreiecke. Aus jeweils zwei der farbigen Dreiecke legen sie nun wieder Quadrate.

b) Wie viele verschiedene Quadrate können die Mädchen so legen?
Wie viele Quadrate davon sind zweifarbig?

c) Danas kleiner Bruder kommt und möchte zwei der zweifarbigen Quadrate mitnehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Wahl dieser zwei Quadrate?

Hinweis: Quadrate werden als gleich angesehen, wenn sie durch Drehungen und Verschiebungen auseinander hervorgehen.

610612

Über das jeweilige Alter der drei Schwestern Alina, Melina und Selina ist Folgendes bekannt:

(1) Alina ist doppelt so alt wie Selina.
(2) Alina und Melina sind zusammen 20 Jahre alt.
(3) Selina ist zwei Jahre jünger als Melina.

a) Ermittle jeweils das Alter der drei Schwestern.

b) Die Mutter der drei Schwestern war vor drei Jahren doppelt so alt wie damals alle drei Mädchen zusammen. In wie vielen Jahren wird die Mutter doppelt so alt sein, wie Alina dann sein wird?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610613

Alex hat in einem Murmelbeutel 39 Murmeln, und zwar 6 rote, doppelt so viele blaue wie rote und doppelt so viele gelbe wie grüne Murmeln.

a) Wie viele Murmeln von jeder Farbe hat Alex in seinem Murmelbeutel?
b) Wie viele Murmeln muss er mit geschlossenen Augen mindestens herausnehmen, damit er auf jeden Fall eine rote Murmel dabei hat?
c) Wie viele Murmeln muss er mit geschlossenen Augen mindestens herausnehmen, damit er auf jeden Fall 3 Murmeln der gleichen Farbe dabei hat?
d) Wie viele Murmeln muss er mit geschlossenen Augen mindestens herausnehmen, damit er auf jeden Fall eine Murmel von jeder Farbe dabei hat?

Finde die Anzahlen heraus und begründe, warum es nicht mit weniger Murmeln geht, als du angegeben hast!

610614

Fritz spielt folgendes Zahlenspiel:

Auf einem unbegrenzt langen Kästchenstreifen, bei dem die Kästchen der Reihe nach nummeriert sind, stehen drei Figuren anfangs auf den Feldern 1, 2 und 3. Ein Zug besteht darin, die Figur auf der kleinsten Zahl die beiden anderen überspringen zu lassen und dann diese Figur noch einmal um dieselbe Zahl von Feldern vorzurücken.

Der erste Zug führt also aus der Anfangsstellung (**1**, **2**, **3**) in die Stellung (**2**, **3**, **7**), denn die Figur auf Feld 1 zieht zunächst auf Feld 4, also drei Felder weiter, und dann noch einmal drei Felder weiter auf Feld 7.

a) Gib jeweils die Stellung der drei Figuren nach drei, vier und fünf Zügen an.
b) „Uhh, die Zahlen steigen aber schnell!“ meint Fritz. In welchem Schritt überspringt die letzte Figur das Feld 100?

Olympiadeklasse **7**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

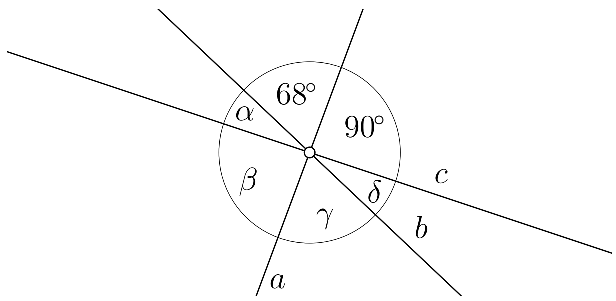
<u>610711</u>

In einem alten Buch mit mathematischen Knobeleien fand sich folgender Vers:

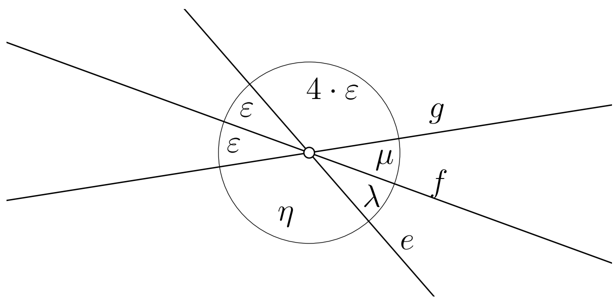
> Eine Zahl hab ich gewählt,
> 107 zugezählt,
> dann durch 100 dividiert
> und mit 11 multipliziert,
> endlich 15 subtrahiert,
> und zuletzt ist mir geblieben
> als Resultat die Primzahl 7.

Ermittle alle möglichen Zahlen, die gewählt werden können, damit der Vers zu einer wahren Aussage wird.

<u>610712</u>



A 610712 a



A 610712 b

a) Die nicht maßstabsgerechte Abbildung A 610712 a zeigt drei Geraden a, b und c, die einander in einem Punkt schneiden und Winkel der Größen α, β, γ, δ, 90° und 68° bilden.

Berechne die Winkelgrößen α, β, γ und δ.

b) Die nicht maßstabsgerechte Abbildung A 610712 b zeigt drei Geraden e, f und g, die einander in einem Punkt schneiden und Winkel der Größen ε, ε, η, λ, μ und $4 \cdot \varepsilon$ bilden.

Berechne die Winkelgrößen ε, η, λ und μ.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610713

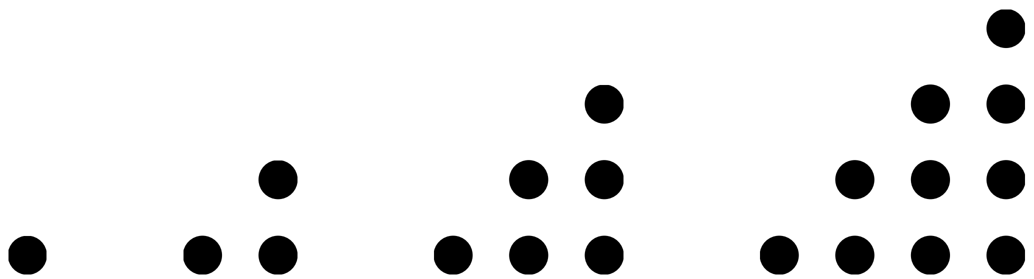
Um von der Haustür zur Wohnungstür zu gelangen, muss Mia eine Treppe mit genau sieben Stufen überwinden. Mit einem Schritt kann sie höchstens drei Stufen nehmen. Daher sind zum Beispiel folgende Schrittfolgen möglich:

1 Stufe – 2 Stufen – 3 Stufen – 1 Stufe
3 Stufen – 2 Stufen – 2 Stufen
2 Stufen – 3 Stufen – 2 Stufen

Ermittle die Anzahl aller Schrittfolgen, die Mia für diese Treppe nehmen kann.

610714

In der Abbildung sind vier Muster aus Punkten gezeigt. Das erste Muster besteht nur aus einem Punkt, beim zweiten kommen zwei Punkte hinzu, beim dritten kommen drei Punkte hinzu, beim vierten kommen vier Punkte hinzu.



Allgemein entsteht das n-te Muster durch Hinzufügen von n Punkten zum vorherigen Muster. Die Punkte sind dabei ab dem zweiten Muster in Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks angeordnet. Die Anzahl der Punkte im n-ten Muster heißt daher n-te Dreieckszahl und wird mit d_n bezeichnet. Wie man der Abbildung entnehmen kann, gelten $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$ und $d_4 = 10$.

a) Berechne die Dreieckszahlen d_5, d_6, d_7 und d_8.

b) Finde eine Formel, mit deren Hilfe man die n-te Dreieckszahl d_n berechnen kann, und berechne d_{15}.

c) Wir bezeichnen mit s_n die Summe der Reziproken der ersten bis zur n-ten Dreieckszahl. Es gelten also $s_1 = \frac{1}{d_1}$, $s_2 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$, $s_3 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}$ und so weiter.
Berechne die Zahlen s_2 bis s_6.

d) Finde eine Vermutung für die Formel, mit deren Hilfe man s_n berechnen kann, und berechne s_{99}. Ein Beweis dieser Formel wird nicht erwartet.

Olympiadeklasse **8**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610811

Zu den Schülern Elias, Jonas und Leon macht ihr Mathematiklehrer folgende Aussagen, von denen genau eine falsch ist und die anderen wahr sind.

(1) Jonas ist älter als Leon.
(2) Leon ist älter als Elias.
(3) Elias ist älter als Jonas.
(4) Leon und Elias sind zusammen doppelt so alt wie Jonas.

a) Welche der vier Aussagen ist falsch?
b) Welcher Junge ist am ältesten?

610812

Um 17 Uhr zündet Elise gleichzeitig drei Kerzen an. Sie sind alle drei gleich hoch, aber unterschiedlich dick. Jede Kerze brennt gleichmäßig ab. Um vollständig abzubrennen, braucht die erste Kerze 10 Stunden, die zweite Kerze 8 Stunden und die dritte Kerze 12 Stunden.

Als Elise alle drei Kerzen ausbläst, ist die erste noch genau doppelt so hoch wie die zweite.

a) Zu welcher Uhrzeit bläst Elise die drei Kerzen aus?
b) Ermittle, wie hoch dann die zweite Kerze im Verhältnis zur dritten ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610813

Beweise, dass für jedes Dreieck ABC und für jede Gerade g die folgenden Aussagen gelten:

a) Wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt B' der Seite $\overline{AC}$ verläuft und parallel zur Geraden AB ist, dann schneidet die Gerade g die Seite $\overline{BC}$ in deren Mittelpunkt A'.

b) Wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt B' der Seite $\overline{AC}$ und den Mittelpunkt A' der Seite $\overline{BC}$ verläuft, dann ist die Gerade g parallel zur Geraden AB.

c) Die Verbindungsstrecke $\overline{A'B'}$ des Mittelpunkts A' der Seite $\overline{BC}$ und des Mittelpunkts B' der Seite $\overline{AC}$ ist halb so lang wie die Dreieckseite $\overline{AB}$.

Hinweise:

1. Die Beweise sollten unter Nutzung von Kongruenzsätzen, Eigenschaften von Parallelogrammen, Sätzen zu Winkeln an geschnittenen Parallelen, aber ohne Anwendung von Strahlensätzen erfolgen, da die obigen Aussagen Grundlagen für elementargeometrische Beweise der Strahlensätze sind.
2. Eine Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, heißt auch Mittellinie dieses Dreiecks. Die in b) und c) zu zeigenden Aussagen sind zusammengefasst der Satz über die Mittellinien im Dreieck:

   In jedem Dreieck ist die Mittellinie zweier Seiten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

610814

Unter einer Lösung der Gleichung $L + E + V + E + L = 61$ verstehen wir natürliche Zahlen L, E und V größer als 0, für die diese Gleichung gilt.

Ermittle die Anzahl aller Lösungen dieser Gleichung, bei denen keine zwei der drei Zahlen L, E und V gleich sind.

Olympiadeklassen **9–10**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611011

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Sterne in der Gleichung

$$* * 61 * 61 * 61 = (* * 61 *)^2$$

so durch Ziffern von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Gleichung im Zehnersystem stimmt. Dabei können die Sterne durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

611012

Gegeben ist die lineare Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 3x + 7$. Aus den Werten von f werden die Werte von z mit $z = f(a) + f(a+1) + f(2a+3)$ berechnet.

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet $f(8a-4)$, dass man $8a-4$ in das Argument von f einsetzen muss. Also $f(8a-4) = 3 \cdot (8a-4) + 7 = 24a - 5$.

a) Bestimmen Sie einen Term für z in Abhängigkeit von a, der das Symbol f nicht mehr enthält.

b) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die $z = 10^{2021}$ gilt?

c) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z durch 2021 teilbar ist?

d) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z (im üblichen Zehnersystem) eine 2021-stellige Zahl mit 2021 gleichen Ziffern ist?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611013

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $n \cdot z < 2021$ gilt.
b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ gilt.

611014

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, bei dem der Abstand der parallelen Geraden AB und CD gleich 6 ist. E und F seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$. Die Gerade DE schneide die Strecke $\overline{BF}$ im Punkt P und die Gerade AB im Punkt Q.

a) Zeigen Sie, dass $|AQ| = 2\,|AB|$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass P auf der Geraden AC liegt und bestimmen Sie die Länge des Abstands von P zur Geraden AB.

611015

Zum Test des räumlichen Vorstellungsvermögens sind die Seitenflächen eines Würfelnetzes mit „links“, „rechts“, „oben“, „unten“, „vorn“ und „hinten“ zu beschriften. Nach dem Zusammenbau des Würfels legt man ihn auf den Tisch und untersucht die Beschriftung. Pro richtig beschrifteter Fläche gibt es einen Punkt.

Zur Bepunktung wird der Würfel natürlich so gedreht, dass es möglichst viele Punkte gibt.

Welche Punktzahlen sind möglich (und welche nicht), wenn bekannt ist, dass wirklich die sechs Worte „oben“, „unten“, „vorn“, „hinten“, „links“ und „rechts“ verwendet wurden und jedes Quadrat des Würfelnetzes genau eines dieser Worte enthält?

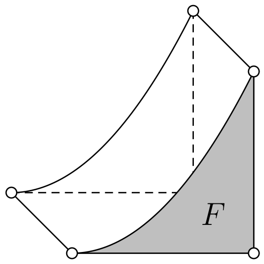
611016

Für diese Aufgabe wird das **Cavalieri'sche Prinzip** als bekannt vorausgesetzt. Es besagt für zwei Körper K_1 und K_2:

> Wenn jede zu einer gegebenen Ebene E parallele Ebene E' die Körper K_1 und K_2 in Flächen gleichen Inhalts schneidet, dann haben diese Körper das gleiche Volumen.

In einem ebenen kartesischen x-y-Koordinatensystem betrachten wir die Fläche F, die aus denjenigen Punkten $P(x, y)$ besteht, deren Koordinaten x und y die Ungleichungen $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq x^2$ erfüllen. Im Raum betrachten wir weiterhin den allgemeinen Zylinder Z mit Höhe 1 und Grundfläche F, der entsteht, wenn man F um 1 senkrecht zur x-y-Ebene verschiebt (siehe Abbildung A 611016). Außerdem ist eine gerade Pyramide K der Höhe 1 gegeben, deren Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge 1 ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



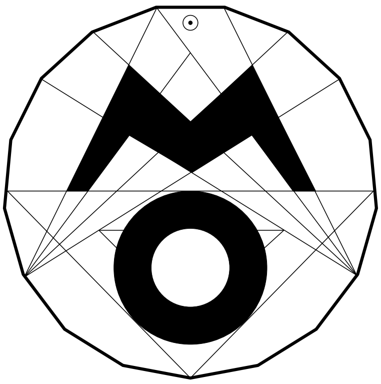
A 611016

a) Zeigen Sie, dass Z und K das gleiche Volumen haben.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche F.

Hinweis: Ein Nachweis der Volumengleichheit der oben beschriebenen Körper ist hier möglich, wenn man eine geeignete Lage der Körper im Raum und eine Ebene E findet, um das Cavalieri'sche Prinzip anzuwenden.

Wir verwenden in dieser Aufgabe einen **erweiterten Begriff des Zylinders**, bei dem die Grundfläche eine beliebige Fläche sein kann (Zylinder in diesem Sinn sind also nicht nur Kreiszylinder, sondern zum Beispiel auch Dreiecksprismen). Begriffe wie Grundfläche G, Deckfläche D und Höhe h als Abstand zwischen Grund- und Deckfläche werden sinngemäß verwendet. Es gilt auch hier die bekannte Volumenformel $V = G \cdot h$.



Olympiadeklassen **11–12**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611211

Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d haben die folgenden vier Eigenschaften:

(1) a und c sind Primzahlen.

(2) c und d unterscheiden sich um genau 1.

(3) a, b, c erfüllen die Gleichung $a \cdot b + 1 = c$.

(4) b, c, d erfüllen die Gleichung $b \cdot d + 1 = b \cdot c + 6$.

Man berechne die Zahl $(b \cdot d + 1) \cdot 10\,000 + d \cdot 100 + c$.

611212

Für eine natürliche Zahl n werden alle Möglichkeiten betrachtet, n rote und n schwarze Kugeln in einer Reihe anzuordnen. Zwei Anordnungen werden dabei als gleich angesehen, wenn auf den Plätzen „1“, „2“, ..., „$2n$“ jeweils die Farben der Kugeln übereinstimmen.

Man beweise, dass die Anzahl dieser Anordnungen durch $(n + 1)$ teilbar ist.

611213

Es seien a und b zwei gegebene reelle Zahlen mit $|a| \neq |b|$. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem für die reellen Unbekannten x und y:

$$x + |y| = a\,,$$
$$|x| + y = b\,.$$

Man bestimme alle Lösungspaare (x, y) in Abhängigkeit von a und b.

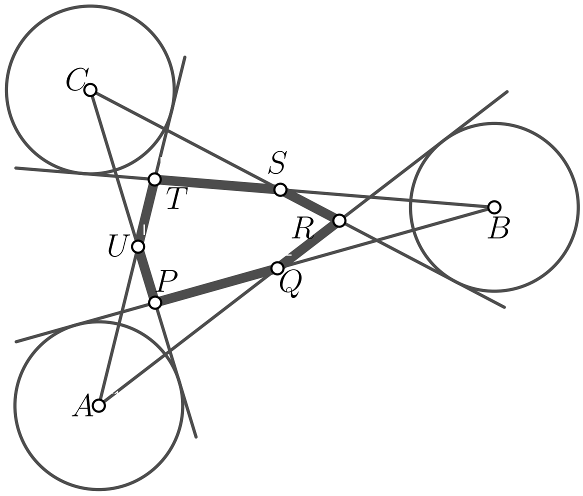
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611214

Die Mittelpunkte A, B, C dreier kongruenter Kreise, die keine gemeinsamen Punkte haben, liegen nicht auf derselben Geraden. Von den Punkten A, B, C werden die sechs in Abbildung A 611214 gezeigten Tangenten an die Kreise gelegt, die ein konvexes Sechseck einschließen.

Man beweise: Die Summen der Längen von jeweils drei paarweise nicht unmittelbar benachbarten Seiten dieses Sechsecks sind gleich, d. h., es gilt

$$|PQ| + |RS| + |TU| = |QR| + |ST| + |UP| \ .$$



A 611214

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

610511 Lösung *10 Punkte*

Die Aussage (1) sagt, dass Nele nicht das Klettergerüst als Lieblingsgerät hat; aus der Aussage (3) folgt, dass Nele den Schaukelkorb nicht gern benutzt.

Also hat Nele als Lieblingsgerät die Rutsche.

Für den Schaukelkorb kämen jetzt noch Lara und Josy in Frage; da aber aus der Aussage (2) folgt, dass Lara den Schaukelkorb meidet, muss der Schaukelkorb das Lieblingsgerät von Josy sein. Da nun nur noch Lara und das Klettergerüst übrig bleiben, müssen diese beiden zusammengehören.

Folglich gilt folgende Zuordnung:

Nele – Rutsche

Lara – Klettergerüst

Josy – Schaukelkorb

Bemerkung: Offensichtlich werden die Informationen zu Klasse und Straße nur dazu benötigt, um folgern zu können, dass ein bestimmtes Mädchen ein bestimmtes Lieblingsgerät hat.

610512 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

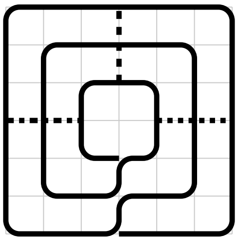
$$\begin{aligned}
1 &= 8 - 8 + 8 : 8 \\
2 &= 8 : 8 + 8 : 8 \\
3 &= (8 + 8 + 8) : 8 \\
4 &= (8 \cdot 8) : (8 + 8) \\
6 &= 8 - (8 + 8) : 8 \\
7 &= (8 \cdot 8 - 8) : 8 \\
8 &= 8 + (8 - 8) : 8 \\
9 &= (8 \cdot 8 + 8) : 8 \\
10 &= 8 + (8 + 8) : 8
\end{aligned}$$

Teil b)

$$5 = 8 - (8 + 8 + 8) : 8$$

Teil a) Man benötigt mindestens vier Züge, beziehungsweise vier Farben, um die Linien auf dem Mühle-Brett zu zeichnen.

Die Abbildung zeigt, dass es in vier Zügen geht:



Der erste (und auch längste) Zug geht vom Mittelpunkt der unteren Seite des großen Quadrats aus, umrundet es entgegen dem Uhrzeigersinn, geht dann zum Mittelpunkt der unteren Seite des mittleren Quadrats, umrundet dieses, geht schließlich zum Mittelpunkt der unteren Seite des kleinen Quadrats, umrundet es und endet in diesem Mittelpunkt. Die restlichen drei Züge wurden gestrichelt gezeichnet.

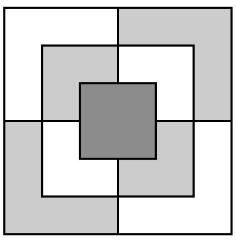
Teil b) Wir bezeichnen die Stellen, an denen mehrere Linien zusammenkommen, als Knoten. Wenn man mit dem Stift über eine Linie zu einem Knoten gelangt, muss man über eine andere Linie von dem Knoten weiterziehen, sofern es nicht der Endknoten ist. Man benutzt also immer zwei Linien des Knotens auf einmal, es sei denn, man beginnt oder endet in diesem Knoten.

Das Mühle-Brett hat 8 Knoten mit einer ungeraden Anzahl an Linien. Diese Knoten müssen entweder Start- oder Endpunkt einer Linie sein. Man braucht also mindestens 4 Züge, um diese „ungeraden“ Knoten zu verbinden.

Wenn man das Mühle-Brett betrachtet, fällt auf, dass ein Zug zwischen zwei ungeraden Knoten immer mindestens 2 LE lang ist. Das Liniennetz ist insgesamt $(4 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 =)$ 56 LE lang. Da man mindestens 4 Züge braucht, kann der längste Zug höchstens $(56 - 3 \cdot 2 =)$ 50 LE lang sein. Die Abbildung in a) zeigt einen solchen Weg der Länge 50 LE.

Teil c) Im Spielfeldinneren berühren sich drei Felder jeweils gegenseitig, sie müssen also drei verschiedene Farben bekommen.

Die Abbildung zeigt, dass drei Farben für das Spielbrett ausreichen:



610514 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Mit (a, b, c) sei gemeint: a 1-Cent-Münzen, b 2-Cent-Münzen, c 5-Cent-Münzen.

Dann geben folgende Zusammenstellungen jeweils 20 Cent:

$(20, 0, 0)$	20 Münzen
$(18, 1, 0)$	19 Münzen
$(16, 2, 0)$	18 Münzen
$(14, 3, 0)$	17 Münzen
$(15, 0, 1)$	16 Münzen
$(13, 1, 1)$	15 Münzen
$(11, 2, 1)$	14 Münzen
$(6, 7, 0)$	13 Münzen
$(7, 4, 1)$	12 Münzen
$(8, 1, 2)$	11 Münzen
$(6, 2, 2)$	10 Münzen
$(1, 7, 1)$	9 Münzen
$(5, 0, 3)$	8 Münzen
$(3, 1, 3)$	7 Münzen
$(1, 2, 3)$	6 Münzen
	5 Münzen – geht nicht, AUSNAHME
$(0, 0, 4)$	4 Münzen

Begründung, dass man aus fünf Münzen nicht 20 Cent legen kann: Es lässt sich der Betrag von 20 Cent aus vier 5-Cent-Münzen legen. Wenn man fünf Münzen verwenden möchte, muss man eine der 5-Cent-Münzen durch zwei 2-Cent- oder 1-Cent-Münzen austauschen, was aber nicht möglich ist, weil der größte Betrag aus zwei 2-Cent- oder 1-Cent-Münzen nur 4 Cent beträgt.

Hinweis zur systematischen Lösungsfindung: Durch systematisches Erfassen aller Möglichkeiten kann man außer den (dick gedruckten) oben angegebenen Lösungen auch alle anderen Lösungen finden.

n	1 ct	2 ct	5 ct	1 ct	2 ct	5 ct	1 ct	2 ct	5 ct	1 ct	2 ct	5 ct	1 ct	2 ct	5 ct
20	**20**	**0**	**0**												
19	**18**	**1**	**0**												
18	**16**	**2**	**0**												
17	**14**	**3**	**0**												
16	12	4	0	**15**	**0**	**1**									
15	10	5	0	**13**	**1**	**1**									
14	8	6	0	**11**	**2**	**1**									
13	**6**	**7**	**0**	9	3	1									
12	4	8	0	**7**	**4**	**1**	10	0	2						
11	2	9	0	5	5	1	**8**	**1**	**2**						
10	0	10	0	3	6	1	**6**	**2**	**2**						
9				**1**	**7**	**1**	4	3	2						
8							2	4	2	**5**	**0**	**3**			
7							0	5	2	**3**	**1**	**3**			
6										**1**	**2**	**3**			
4													**0**	**0**	**4**

Teil b) Mehr als 20 verwendete Münzen können nicht vorkommen, da bereits 21 1-Cent-Münzen einen Wert von mehr als 20 Cent haben; weniger als 4 verwendete Münzen können nicht vorkommen, da drei 5-Cent-Münzen nur einen Wert von 15 Cent haben.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

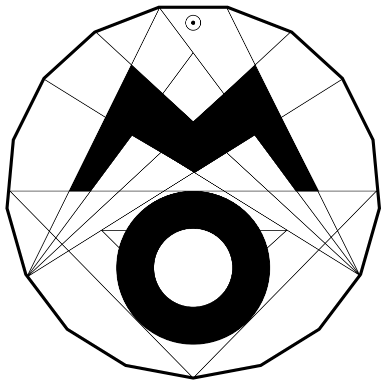
Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610511	*Insgesamt: 10 Punkte*
Korrektes Ergebnis	3 Punkte
Korrekte Herleitung	7 Punkte

Aufgabe 610512	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	9 Punkte
Teil b)	1 Punkt

Aufgabe 610513	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	2 Punkte

Aufgabe 610514	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	8 Punkte
Teil b)	2 Punkte



Olympiadeklasse **6**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

610611 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Das erste Mädchen kann zwischen vier Farben wählen, danach das zweite noch zwischen drei; für das dritte Mädchen bleiben noch zwei Farben, das vierte hat keine Wahl.

Die Zahl der Möglichkeiten ist daher $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)\, 24$.

Teil b) Für jede der „Quadrathälften“ kann eine von vier Farben gewählt werden, das ergäbe $(4 \cdot 4 =)\, 16$ Möglichkeiten. Vier dieser Quadrate sind einfarbig, bei den restlichen 12 Quadraten sind immer zwei ununterscheidbar (rot-blau ist von blau-rot nicht zu unterscheiden).

Folglich gibt es sechs zweifarbige Quadrate und vier einfarbige, also insgesamt zehn verschiedene Quadrate.

Teil c) Der kleine Bruder kann zwei von sechs zweifarbigen Quadraten mitnehmen. Für das erste hat er sechs Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten hat er beim zweiten Wahlschritt noch fünf Möglichkeiten. Allerdings ist hier zu bedenken, dass die Reihenfolge der beiden ausgewählten Quadrate unerheblich ist.

Insgesamt hat er folglich die Wahl zwischen $(\frac{6 \cdot 5}{2} =)\, 15$ Möglichkeiten.

Hinweis zu Korrektur: Sollte bei Aufgabenteil b) eine falsche Anzahl f der zweifarbigen Quadrate ermittelt werden, so ist in Teil c) die Zahl $\frac{f \cdot (f-1)}{2}$ als richtig anzuerkennen.

610612 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Lösung mit Variablen und Gleichungen: Die drei Alter seien mit a, m und s bezeichnet.

Dann lauten die drei Aussagen

(1) $a = 2s$,

(2) $a + m = 20$,

(3) $s + 2 = m$.

Setzt man (1) und (3) in (2) ein, so erhält man

(4) $2s + s + 2 = 20$ oder $3s = 18$.

Folglich ist Selina $(18 : 3 =)\, 6$ Jahre alt.

Aus (1) und (3) folgt dann, dass Alina 12 Jahre und Melina 8 Jahre alt ist.

Bemerkung: Auch ein systematisches Probieren der möglichen Alterswerte ist zu akzeptieren.

Teil b) Die drei Schwestern sind jetzt zusammen $(6+8+12 =)\, 26$ Jahre alt. Vor drei Jahren waren sie also zusammen $(3 + 5 + 9 =)\, 17$ Jahre alt, und folglich war die Mutter damals $(2 \cdot 17 =)\, 34$ Jahre alt.

Folglich ist sie jetzt 37 Jahre alt.

Da die Mutter $(37 - 12 =)$ 25 Jahre älter ist als Alina, wird sie mit 50 Jahren doppelt so alt sein wie Alina. Und da sie jetzt 37 Jahre alt ist, ist dieser Zeitpunkt in $(50 - 37 =)$ 13 Jahren erreicht.

610613 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Da in dem Beutel 6 rote Murmeln sind, befinden sich dort $(6 \cdot 2 =)$ 12 blaue Murmeln. Es bleiben noch $(39 - 6 - 12 =)$ 21 Murmeln übrig. Davon sind ein Drittel grün und zwei Drittel gelb. Also sind 14 gelbe und 7 grüne Murmeln im Beutel.

Teil b) Im ungünstigsten Fall könnte es Alex passieren, dass er erst alle blauen, grünen und gelben Murmeln zieht, bevor er die erste rote in der Hand hält. Da die Anzahl der nicht roten Murmeln $(7 + 12 + 14 =)$ 33 ist, kann er erst bei der 34. Murmel sicher sein, eine rote Murmel gezogen zu haben.

Teil c) Der ungünstigste Fall sieht aus wie folgt: Nachdem Alex acht Murmeln gezogen hat, hat er zwei rote, zwei blaue, zwei gelbe und zwei grüne Murmeln gezogen. Im 9. Zug wird er dann mit Sicherheit eine Murmel ziehen, die die Anzahl der Murmeln der entsprechenden Farbe auf drei bringt.

Teil d) Letztlich ist das dieselbe Frage wie bei b): Im ungünstigsten Fall kann Alex nach $(12 + 7 + 14 =)$ 33 Zügen nur blaue, gelbe und grüne Murmeln gezogen haben. Im 34. Zug muss er nunmehr eine rote Murmel ziehen und hat daher von jeder Farbe mindestens eine Murmel.

610614 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Hier kann nur den Zügen mit Sorgfalt gefolgt werden. Es ergeben sich mit der Ausgangsstellung (**1**, **2**, **3**) folgende Stellungen:

Zug	Stellung
1	(**2**, **3**, **7**)
2	(**3**, **7**, **14**) (denn die Figur auf Feld 2 zieht zunächst auf Feld 8, also sechs Felder weiter, und dann noch einmal sechs Felder weiter auf Feld 14)
3	(**7**, **14**, **27**)
4	(**14**, **27**, **49**)
5	(**27**, **49**, **86**)

Teil b) Das direkte Nachverfolgen zeigt, dass mit dem 8. Zug die letzte Figur das Feld 100 hinter sich gelassen hat:

6	(**49**, **86**, **147**) (Wenn man will, kann man jetzt aufhören, denn die 147 wird im übernächsten Zug unverändert an die erste, also die kleinste, Stelle rutschen.)
7	(**86**, **147**, **247**)
8	(**147**, **247**, **410**)

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

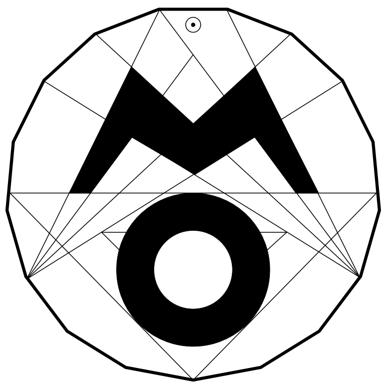
Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610611	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 610612	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	6 Punkte
Teil b)	4 Punkte

Aufgabe 610613	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	2 Punkte

Aufgabe 610614	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	6 Punkte
Teil b)	4 Punkte



Olympiadeklasse 7

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

610711 Lösung *8 Punkte*

Erste Lösung: Man kann die zu ermittelnde Zahl durch Rückwärtsarbeiten erhalten, also dadurch, dass man, ausgehend vom Resultat 7, mit den angegebenen Zahlen jeweils die entgegengesetzte Rechenoperation durchführt:

Man addiert also zum Resultat 7 zunächst 15 und erhält 22. Nun dividiert man 22 durch 11 und erhält 2. Jetzt wird 2 mit 100 multipliziert, das ergibt 200. Schließlich wird noch 107 von 200 subtrahiert. Das ergibt 93, und diese Zahl ist die in der Aufgabe erwähnte „gewählte Zahl“.

Zweite Lösung: Eine Zahl x erfüllt genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn sie der Gleichung

$$\frac{x+107}{100} \cdot 11 - 15 = 7$$

genügt. Durch Addition von 15 zu beiden Seiten dieser Gleichung erhält man

$$\frac{x+107}{100} \cdot 11 = 22\,.$$

Durch Division beider Seiten durch 11 erhält man

$$\frac{x+107}{100} = 2\,.$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit 100 erhält man

$$x + 107 = 200\,.$$

Durch Subtraktion von 107 von beiden Seiten erhält man

$$x = 93\,.$$

Daher ist 93 die in der Aufgabe erwähnte „gewählte Zahl“.

Bemerkung: Man kann sich durch eine Rechenprobe leicht überzeugen, dass die ermittelte Zahl den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dies ist aus logischer Sicht nicht erforderlich (und deshalb auch nicht notwendiger Bestandteil der Lösung), aber für eine Kontrolle der eigenen Arbeit zweckmäßig und mitunter auch hilfreich.

610712 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Nach dem Scheitelwinkelsatz folgen $\beta = 90°$ und $\gamma = 68°$.

Es gilt $\alpha + 68° + 90° = 180°$, weil die drei Winkel der Größen α, $68°$ und $90°$ einen gestreckten Winkel bilden. Daraus folgt $\alpha + 158° = 180°$ und somit $\alpha = 22°$.

Nach dem Scheitelwinkelsatz folgt schließlich $\delta = 22°$.

Teil b) Es gilt $\varepsilon + \varepsilon + 4 \cdot \varepsilon = 180°$, weil die drei Winkel der Größen ε, ε und $4 \cdot \varepsilon$ einen gestreckten Winkel bilden. Daraus folgt $6 \cdot \varepsilon = 180°$ und somit $\varepsilon = 30°$.

Nach dem Scheitelwinkelsatz folgen $\lambda = \varepsilon$ sowie $\mu = \varepsilon$ und somit $\lambda = \mu = 30°$.

Nach dem Scheitelwinkelsatz gilt außerdem $\eta = 4 \cdot \varepsilon$ und somit $\eta = 120°$.

610713 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Wir ermitteln die Anzahl aller Schrittfolgen, die Mia für die Treppe nehmen kann, indem wir 7 in Summen mit den Summanden 1, 2 und 3 zerlegen und für jede dieser Zerlegungen überlegen, wie viele verschiedene Schrittfolgen diese ergeben.

Die systematische Erfassung ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

Zerlegung	Ermittlung der Anzahlen	Anzahlen
$3+3+1$	Die 1 kann nur an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Es gibt hier folglich genau 3 Schrittfolgen.	3
$3+2+2$	Die 3 kann nur an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Es gibt hier genau 3 Schrittfolgen.	3
$3+2+1+1$	Steht an erster Stelle eine 3, kann die 2 an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Steht an erster Stelle eine 2, kann die 3 ebenso platziert werden. Das sind genau 6 Schrittfolgen. Steht an erster und zweiter Stelle eine 1, gibt es für die Platzierung von 2 und 3 genau 2 verschiedene Möglichkeiten und damit genau 2 Schrittfolgen. Steht an erster Stelle eine 1, kann noch die zweite Stelle mit 2 oder 3 belegt werden, für die beiden anderen Zahlen gibt es jeweils zwei Möglichkeiten zur Platzierung und damit genau 4 Schrittfolgen. Folglich erhält man für diese Konstellation insgesamt genau 12 Schrittfolgen.	12
$3+1+1+1+1$	Die 3 kann nur an erster, zweiter, dritter, vierter oder fünfter Stelle stehen. Es gibt folglich hier genau 5 Schrittfolgen.	5
$2+2+2+1$	Die 1 kann nur an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Es gibt hier folglich genau 4 Schrittfolgen.	4
$2+2+1+1+1$	Wenn an erster Stelle eine 2 steht, kann die andere 2 an zweiter, dritter, vierter oder fünfter Stelle platziert werden. Das sind genau 4 Schrittfolgen. Steht an erster und zweiter Stelle jeweils eine 1, kann die dritte 1 an dritter, vierter oder fünfter Stelle stehen. Steht an erster Stelle eine 1 und an zweiter Stelle eine 2, kann die andere 2 an dritter, vierter oder fünfter Stelle stehen. Folglich erhält man hier genau $(2 \cdot 3 =)$ 6 Schrittfolgen. Insgesamt sind es hier also genau 10 Schrittfolgen.	10

$2+1+1+1+1+1$	Die 2 kann nur an erster, zweiter, dritter, vierter, fünfter oder sechster Stelle stehen. Es gibt folglich hier genau 6 Schrittfolgen.	6
$1+1+1+1+1+1+1$	Hier gibt es nur eine Schrittfolge.	1

Wegen $3+3+12+5+4+10+6+1=44$ gibt es genau 44 Schrittfolgen, die Mia für die Treppe nehmen kann.

Zweite Lösung: Wir ermitteln die Anzahl aller Schrittfolgen, die Mia für die Treppe nehmen kann, indem wir die Anzahl der verschiedenen Schrittfolgen bestimmen, die Mia nehmen kann, um auf die erste Stufe, auf die zweite Stufe, … und schließlich auf die siebente Stufe zu gelangen.

Auf die erste Stufe kommt Mia nur durch einen Schritt über eine Stufe, also nur in einer Schrittfolge.

Auf die zweite Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der ersten Stufe oder unmittelbar durch einen Schritt über zwei Stufen, also in genau $(1+1=)$ 2 Schrittfolgen.

Auf die dritte Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der zweiten Stufe, durch einen Schritt über zwei Stufen ausgehend von der ersten Stufe oder unmittelbar durch einen Schritt über drei Stufen, also in genau $(2+1+1=)$ 4 Schrittfolgen.

Auf die vierte Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der dritten Stufe, durch einen Schritt über zwei Stufen ausgehend von der zweiten Stufe oder durch einen Schritt über drei Stufen ausgehend von der ersten Stufe, also in genau $(4+2+1=)$ 7 Schrittfolgen.

Auf die fünfte Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der vierten Stufe, durch einen Schritt über zwei Stufen ausgehend von der dritten Stufe oder durch einen Schritt über drei Stufen ausgehend von der zweiten Stufe, also in genau $(7+4+2=)$ 13 Schrittfolgen.

Auf die sechste Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der fünften Stufe, durch einen Schritt über zwei Stufen ausgehend von der vierten Stufe oder durch einen Schritt über drei Stufen ausgehend von der dritten Stufe, also in genau $(13+7+4=)$ 24 Schrittfolgen.

Auf die siebente Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der sechsten Stufe, durch einen Schritt über zwei Stufen ausgehend von der fünften Stufe oder durch einen Schritt über drei Stufen ausgehend von der vierten Stufe, also in genau $(24+13+7=)$ 44 Schrittfolgen.

Mia kann für die Treppe also genau 44 Schrittfolgen nehmen.

Dritte Lösung: Für die natürliche Zahl n von 1 bis 7 sei $a(n)$ die Anzahl aller Schrittfolgen, um auf die n-te Stufe zu kommen. Auf die siebente Stufe kommt sie mit einem Schritt über eine Stufe ausgehend von der sechsten Stufe, mit einem Schritt über zwei Stufen ausgehend von der fünften oder mit einem Schritt über drei Stufen ausgehend von der vierten Stufe. Folglich gilt

$$a(7)=a(6)+a(5)+a(4)\,. \tag{1}$$

Entsprechend folgen

$$a(6) = a(5) + a(4) + a(3)\,, \tag{2}$$
$$a(5) = a(4) + a(3) + a(2) \tag{3}$$

und

$$a(4) = a(3) + a(2) + a(1)\,. \tag{4}$$

Auf die dritte Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der zweiten Stufe, durch einen Schritt über zwei Stufen ausgehend von der ersten Stufe oder unmittelbar durch einen Schritt über drei Stufen. Folglich gilt

$$a(3) = a(2) + a(1) + 1\,. \tag{5}$$

Auf die zweite Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe ausgehend von der ersten Stufe oder unmittelbar durch einen Schritt über zwei Stufen. Folglich gilt

$$a(2) = a(1) + 1\,. \tag{6}$$

Auf die erste Stufe kommt sie nur durch einen Schritt über eine Stufe, weswegen

$$a(1) = 1 \tag{7}$$

gilt.

Aus den Gleichungen (7), (6), (5), (4), (3), (2) und (1) folgt nun $a(2) = 1 + 1 = 2$, $a(3) = 2 + 1 + 1 = 4$, $a(4) = 4 + 2 + 1 = 7$, $a(5) = 7 + 4 + 2 = 13$, $a(6) = 13 + 7 + 4 = 24$ und schließlich $a(7) = 24 + 13 + 7 = 44$.

Folglich gibt es genau 44 Schrittfolgen, die Mia für die Treppe nehmen kann.

Bemerkung: Offenbar sind die zweite und dritte Lösung leicht verallgemeinerbar auf beliebige Stufenanzahlen.

610714 Lösung *12 Punkte*

Teil a) Es gelten

$$\begin{aligned} d_5 &= d_4 + 5 = 10 + 5 = 15\,, \\ d_6 &= d_5 + 6 = 15 + 6 = 21\,, \\ d_7 &= d_6 + 7 = 21 + 7 = 28\,, \\ d_8 &= d_7 + 8 = 28 + 8 = 36\,. \end{aligned}$$

Teil b) Für jede natürliche Zahl n größer als 0 kann man das n-te Muster zu einem Quadrat mit genau n^2 Punkten vervollständigen. Dieses Quadrat besteht dann aus zwei n-ten Mustern, die sich auf einer Diagonalen des Quadrates überlappen. Auf dieser Diagonalen liegen wie in der Grundlinie genau n Punkte. Daher gilt $2 \cdot d_n = n^2 + n$ und folglich

$$d_n = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)\,.$$

Für $n = 15$ folgt

$$d_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 = 120\,.$$

Teil c) Es gelten

$$\begin{aligned}
s_1 & & & & &= \frac{1}{1}\,,\\
s_2 &= \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2} &&= \frac{1}{1}+\frac{1}{3} &&= \frac{3}{3}+\frac{1}{3} & &= \frac{4}{3}\,,\\
s_3 &= s_2+\frac{1}{d_3} &&= \frac{4}{3}+\frac{1}{6} &&= \frac{8}{6}+\frac{1}{6} &= \frac{9}{6} &= \frac{3}{2}\,,\\
s_4 &= s_3+\frac{1}{d_4} &&= \frac{3}{2}+\frac{1}{10} &&= \frac{15}{10}+\frac{1}{10} &= \frac{16}{10} &= \frac{8}{5}\,,\\
s_5 &= s_4+\frac{1}{d_5} &&= \frac{8}{5}+\frac{1}{15} &&= \frac{24}{15}+\frac{1}{15} &= \frac{25}{15} &= \frac{5}{3}\,,\\
s_6 &= s_5+\frac{1}{d_6} &&= \frac{5}{3}+\frac{1}{21} &&= \frac{35}{21}+\frac{1}{21} &= \frac{36}{21} &= \frac{12}{7}\,.
\end{aligned}$$

Teil d) Wir suchen für die in Teil c) erhaltenen Zahlen ein gemeinsames Bildungsprinzip und erkennen

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1} = \frac{2}{2}\,,\\
s_2 &= \frac{4}{3}\,,\\
s_3 &= \frac{3}{2} = \frac{6}{4}\,,\\
s_4 &= \frac{8}{5}\,,\\
s_5 &= \frac{5}{3} = \frac{10}{6}\,,\\
s_6 &= \frac{12}{7}\,,
\end{aligned}$$

was zur Vermutung

$$s_n = \frac{2\cdot n}{n+1} \qquad (*)$$

führt. Mit $(*)$ folgt $s_{99} = \frac{2\cdot 99}{100} = 1{,}98$.

Bemerkung: Die in Teil d) aufgestellte Vermutung kann wie folgt begründet werden:

Wegen $d_k = \frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1)$ gilt $\frac{1}{d_k} = 2\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$ für jede natürliche Zahl k. In der Summe s_n der Zahlen $\frac{1}{d_1}$ bis $\frac{1}{d_n}$ mit $n \geq 2$ hebt sich daher für jede natürliche Zahl k von 1 bis $n-1$ der Subtrahend $\frac{2}{k+1}$ im Summanden $\frac{1}{d_k}$ mit dem Minuenden $\frac{2}{k+1}$ im nächsten Summanden $\frac{1}{d_{k+1}}$ zu 0 auf, weswegen

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_n}\\
&= \frac{2}{1}-\frac{2}{2} + \frac{2}{2}-\frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{n-1}-\frac{2}{n} + \frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\\
&= \frac{2}{1} + 0 + \cdots + 0 - \frac{2}{n+1}\\
&= \frac{2\cdot n}{n+1}
\end{aligned}$$

für natürliche Zahlen n größer als 3 gilt. Die Korrektheit der Formel für $n \leq 3$ wurde schon in der Lösung zur Teilaufgabe c) gezeigt.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

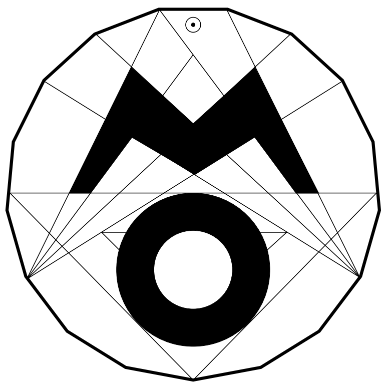
Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610711	*Insgesamt: 8 Punkte*
Richtiges Ergebnis	3 Punkte
Lösungsstrategie erkennbar	2 Punkte
Logisch korrekte und vollständige Herleitung	3 Punkte

Aufgabe 610712	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	5 Punkte
Teil b)	5 Punkte

Aufgabe 610713	*Insgesamt: 10 Punkte*
Zielführende Lösungsstrategie erkennbar	1 Punkt
Systematische Angabe der Schrittfolgen	4 Punkte
Ausreichende Begründungen	4 Punkte
Richtiges Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 610714	*Insgesamt: 12 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	4 Punkte



Olympiadeklasse 8

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

610811 Lösung *10 Punkte*

Wir bezeichnen das Alter jedes Jungen mit dem Anfangsbuchstaben seines Namens. Die Aussagen lauten demnach

$$J > L\,, \tag{1}$$
$$L > E\,, \tag{2}$$
$$E > J\,, \tag{3}$$
$$L + E = 2 \cdot J\,. \tag{4}$$

Wir betrachten folgende vier Fälle:

Fall 1: Angenommen, (1) ist falsch, es gilt also $L \geq J$. Dann sind (2), (3) und (4) wahr. Wegen (2) und (3) folgt $L > E > J$ und daher $L + E > J + E > J + J$ im Widerspruch zu (4).

Fall 2: Angenommen, (2) ist falsch, es gilt also $E \geq L$. Dann sind (1), (3) und (4) wahr. Mit (1) und (3) folgt $E > J > L$.

Fall 3: Angenommen, (3) ist falsch, es gilt also $J \geq E$. Dann sind (1), (2) und (4) wahr. Aus (1) und (2) folgt $J > L > E$ und daher $L + E < J + J$ im Widerspruch zu (4).

Fall 4: Angenommen, (4) ist falsch. Dann sind (1), (2) und (3) wahr. Aus (1) und (2) folgt $J > E$ im Widerspruch zu (3).

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Bis auf Fall 2 führen alle anderen drei Fälle zum Widerspruch. Daraus folgt:

Teil a) Die Aussage (2) ist falsch.

Teil b) Elias ist der Älteste.

Zweite Lösung: Wie in der ersten Lösung bezeichnen wir das Alter jedes Jungen mit dem Anfangsbuchstaben seines Namens und erhalten die Aussagen (1), (2), (3) und (4).

Die Aussagen (1), (2) und (3) können nicht alle wahr sein, da aus (2) und (3) sonst $L > J$ im Widerspruch zu (1) folgt. Folglich ist genau eine der Aussagen (1), (2) und (3) falsch und (4) ist wahr.

Die Aussagen (2) und (3) können nicht beide wahr sein, da sonst $L + E > E + E > J + J$ im Widerspruch zu (4) folgt. Folglich ist entweder (2) oder (3) die falsche Aussage und die anderen sind wahr.

Die Aussage (2) kann nicht wahr sein, da sonst $L + E < L + L < J + J$ im Widerspruch zu (4) folgt. Folglich ist (2) die falsche Aussage und aus (1) und (3) folgt $E > J > L$.

Damit erhalten wir:

Teil a) Die Aussage (2) ist falsch.

Teil b) Elias ist der Älteste.

610812 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Teil a) Es sei H die Anfangshöhe der drei Kerzen. Da die erste Kerze gleichmäßig und in 10 h vollständig abbrennt, gilt $v_1 = \frac{H}{10\,\mathrm{h}}$ für ihre Abbrenngeschwindigkeit v_1. Entsprechend gelten $v_2 = \frac{H}{8\,\mathrm{h}}$ und $v_3 = \frac{H}{12\,\mathrm{h}}$ für die Abbrenngeschwindigkeiten v_2 der zweiten und v_3 der dritten Kerze.

Es sei t_A die Zeitdauer, nach der Elise die Kerzen ausbläst. Dann hat die erste Kerze die Höhe $H - t_A \cdot v_1$ und die zweite Kerze die Höhe $H - t_A \cdot v_2$ und es gilt

$$H - t_A \cdot v_1 = 2 \cdot (H - t_A \cdot v_2)\,.$$

Hieraus folgt $t_A \cdot (2 \cdot v_2 - v_1) = H$ und daher

$$t_A = \frac{H}{2 \cdot v_2 - v_1} = \frac{H}{2 \cdot \frac{H}{8\,\mathrm{h}} - \frac{H}{10\,\mathrm{h}}} = \frac{1}{\frac{5-2}{20\,\mathrm{h}}} = \frac{20}{3}\,\mathrm{h}\,.$$

Wegen $\frac{20}{3}\,\mathrm{h} = 6\,\mathrm{h} + \frac{2}{3}\,\mathrm{h} = 6\,\mathrm{h} + 40\,\mathrm{min}$ werden die Kerzen 6 Stunden und 40 Minuten nach 17:00 Uhr ausgeblasen, also um 23:40 Uhr.

Teil b) Die Höhe der zweiten Kerze beim Ausblasen ist $H - t_A \cdot v_2$. Wegen

$$H - t_A \cdot v_2 = H - \frac{20}{3}\,\mathrm{h} \cdot \frac{H}{8\,\mathrm{h}} = H \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot H$$

hat die zweite Kerze noch die Höhe $\frac{1}{6} \cdot H$.

Die Höhe der dritten Kerze beim Ausblasen ist $H - t_A \cdot v_3$. Wegen

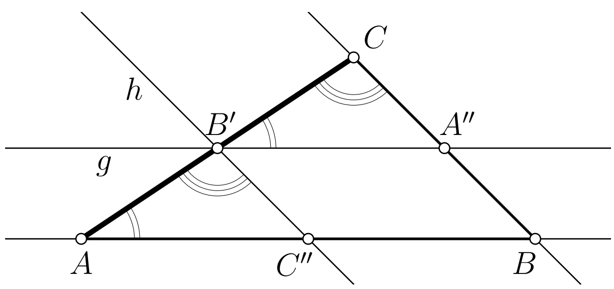
$$H - t_A \cdot v_3 = H - \frac{20}{3}\,\mathrm{h} \cdot \frac{H}{12\,\mathrm{h}} = H \cdot \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{4}{9} \cdot H$$

hat die dritte Kerze noch die Höhe $\frac{4}{9} \cdot H$.

Wegen $\frac{1}{6} : \frac{4}{9} = \frac{3}{8}$ hat dann die zweite Kerze $\frac{3}{8}$ der Höhe der dritten Kerze.

610813 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Es seien ABC ein Dreieck, A' der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und B' der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$. Die Gerade g verlaufe durch den Punkt B' und sei parallel zur Geraden AB. Ihr Schnittpunkt mit der Seite $\overline{BC}$ wird mit A'' bezeichnet. Die Gerade h verlaufe durch den Punkt B' und sei parallel zur Geraden BC. Ihr Schnittpunkt mit der Seite $\overline{AB}$ wird mit C'' bezeichnet. Wir zeigen $A'' = A'$.



Da die Geraden AB und $A''B'$ parallel zueinander sind, sind die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle A''B'C$ nach dem Stufenwinkelsatz gleich groß. Da die Geraden BC und $B'C''$ parallel zueinander sind, sind auch die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle AB'C''$ nach dem Stufenwinkelsatz gleich groß. Da B' der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ ist, sind die Strecken $\overline{AB'}$ und $\overline{B'C}$ gleich lang. Nach dem Kongruenzsatz (wsw) sind die Dreiecke $AC''B'$ und $A''CB'$ daher kongruent zueinander, weswegen $|A''C| = |B'C''|$ folgt.

Da die Geraden AB und $A''B'$ parallel zueinander sind und auch die Geraden BC und $B'C''$ parallel zueinander sind, ist $A''B'C''B$ ein Parallelogramm. Da in jedem Parallelogramm gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, folgt $|A''B| = |B'C''|$.

Aus $|A''C| = |B'C''|$ und $|A''B| = |B'C''|$ folgt $|A''B| = |A''C|$. Da A'' auf der Seite $\overline{BC}$ liegt, ist A'' daher der Mittelpunkt dieser Seite, es gilt also $A'' = A'$.

Teil b) Es seien ABC ein Dreieck, A' der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und B' der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$. Die Parallele zur Geraden AB durch den Punkt B' schneide die Seite $\overline{BC}$ im Punkt A''. Wie in a) gezeigt, ist A'' der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$, es gilt also $A'' = A'$. Daher sind $A'B'$ und $A''B'$ die gleiche Gerade. Da die Gerade $A''B'$ parallel zur Geraden AB ist, ist folglich auch die Gerade $A'B'$ parallel zur Geraden AB.

Teil c) Wir nutzen die Bezeichnungen und Ergebnisse von Teil a). Wegen $A'' = A'$ und der Kongruenz der Dreiecke $AC''B'$ und $A''CB'$ sind auch die Strecken $\overline{AC''}$ und $\overline{A''B'}$ gleich lang. Die Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{BC''}$ sind als gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms $A'B'C''B$ gleich lang. Daher sind $\overline{AC''}$ und $\overline{BC''}$ gleich lang, weswegen C'' der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist und $|A'B'| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$ folgt.

<u>610814 Lösung</u> *10 Punkte*

Erste Lösung: I. Wir bestimmen zuerst die Anzahl aller Lösungen der Gleichung

$$L + E + V + E + L = 61\,, \tag{1}$$

wenn L, E und V natürliche Zahlen größer als 0 sind, die zunächst nicht voneinander verschieden sein müssen. Dazu seien L, E und V natürliche Zahlen größer als 0 mit (1). Dann gilt $2 \cdot (L + E) + V = 61$. Da L, E und V natürliche Zahlen größer als 0 sind, folgt hieraus, dass V eine ungerade Zahl mit $1 \leq V \leq 57$ ist. Folglich gibt es eine natürliche Zahl n mit

$$V = 2 \cdot n - 1\,, \tag{2}$$

und $1 \leq n \leq 29$. Hieraus und aus $2 \cdot (L + E) + V = 61$ folgt $2 \cdot (L + E) = 62 - 2 \cdot n$ und daher $L + E = 31 - n$. Da L und E natürliche Zahlen größer als 0 sind, folgt hieraus, dass E eine natürliche Zahl mit $1 \leq E \leq 30 - n$ und

$$L = 31 - n - E \tag{3}$$

ist.

Für jede natürliche Zahl n mit $1 \leq n \leq 29$ erfüllen die Zahl V mit $V = 2 \cdot n - 1$ und alle natürlichen Zahlen E und L mit $1 \leq E \leq 30 - n$ und $L = 31 - n - E$ tatsächlich die Gleichung (1), und L, E sowie V sind natürliche Zahlen größer als 0. Also gibt es für jede natürliche Zahl n mit $1 \leq n \leq 29$ genau $30 - n$ Lösungen der Gleichung (1).

Die Anzahl aller Lösungen der Gleichung (1) ist wegen

$$(30 - 1) + (30 - 2) + \cdots + (30 - 29) = 29 + 28 + \cdots + 2 + 1 = \frac{29 \cdot 30}{2} = 435$$

folglich 435.

II. Wir ermitteln nun die Anzahl aller Lösungen der Gleichung (1), bei denen mindestens zwei der drei Zahlen L, E und V gleich sind:

Fall 1: Es gelte $L = E = V$. Mit (1) folgt daraus $5 \cdot V = 61$, was nicht möglich ist, da L, E und V natürliche Zahlen sind.

Fall 2: Es gelte $L = E$. Mit (3) folgt daraus $E = 31 - n - E$, also $2 \cdot E = 31 - n$, was für jede ungerade natürlichen Zahl n genau eine Lösung liefert. Wegen $1 \leq n \leq 29$ sind das genau 15 Lösungen.

Fall 3: Es gelte $E = V$. Mit (2) und (3) folgt daraus $L = 31-n-(2\cdot n-1)$, also $L = 32 - 3 \cdot n$, was für jedes n mit $1 \leq n \leq 10$ genau eine Lösung liefert. Das sind zusammen genau 10 Lösungen.

Fall 4: Es gelte $L = V$. Mit (2) und (3) folgt daraus $2\cdot n-1 = 31-n-E$, also $E = 32-3\cdot n$, was für jede natürliche Zahl n mit $1 \leq n \leq 10$ genau eine Lösung liefert. Das sind zusammen genau 10 Lösungen.

Die Anzahl aller Lösungen der Gleichung (1), bei denen mindestens zwei der drei Zahlen L, E und V gleich sind, ist also $(15 + 10 + 10 =)$ 35.

Aus I. und II. folgt: Die Anzahl aller Lösungen der Gleichung (1), bei denen keine zwei der drei Zahlen L, E und V gleich sind, ist $(435 - 15 - 10 - 10 =)$ 400.

Zweite Lösung: Eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung ist $2 \cdot (L + E) + V = 61$. Wenn E, L und V natürliche Zahlen größer als 0 und Lösung der Gleichung sind, ist V daher eine ungerade Zahl mit $1 \leq V \leq 57$.

In der folgenden Tabelle werden für jede natürliche Zahl V von 1 bis 57 systematisch alle möglichen Werte für E und L ermittelt, welche natürliche Zahlen größer als 0 sind und die Ausgangsgleichung erfüllen. Dazu werden in der ersten Spalte für V die ungeraden Zahlen von 1 bis 57 angegeben, in der zweiten Spalte der sich jeweils ergebende Summenwert $\frac{61-V}{2}$ für $E + L$, in der dritten Spalte für den jeweiligen Summenwert alle möglichen Darstellungen für $E + L$, indem E beginnend von 1 jeweils solange um 1 erhöht wird, bis schließlich L den Wert 1 erreicht hat, und schließlich in der vierten Spalte die Anzahl dieser Darstellungen. Diese Anzahl entspricht aufgrund der jeweiligen Erhöhung von E um 1 gerade dem größten Wert von E.

V	$\frac{61-V}{2}$ $(= E + L)$	Mögliche Darstellungen von $E + L$	Anzahl der Darstellungen
1	30	$1 + 29$, $2 + 28$, $\ldots$, $26 + 4$, $27 + 3$, $28 + 2$, $29 + 1$	29
3	29	$1 + 28$, $2 + 27$, $\ldots$, $26 + 3$, $27 + 2$, $28 + 1$	28
5	28	$1 + 27$, $2 + 26$, $\ldots$, $26 + 2$, $27 + 1$	27
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
53	4	$1 + 3$, $2 + 2$, $3 + 1$	3
55	3	$1 + 2$, $2 + 1$	2
57	2	$1 + 1$	1

Da sich der Summenwert von $E+L$ in jeder Zeile um 1 verringert, verringert sich entsprechend die Anzahl der Darstellungen von $E + L$ um 1. Die Gesamtanzahl der Darstellungen ist wegen $1 + 2 + \cdots + 29 = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 30 = 435$ folglich 435.

Allerdings sind nicht in jeder dieser Darstellungen die Zahlen E, L und V paarweise voneinander verschieden. Der Fall $E = L$ tritt auf, wenn $\frac{61-V}{2}$ eine gerade Zahl ist. Das tritt in $(30 : 2 =)$ 15 Fällen auf. Der Fall $E = V$ tritt auf, wenn $V < E + L$ gilt, also für $V \leq 19$ und damit in 10 Fällen. Wegen der Symmetrie der möglichen Darstellungen von $E + L$ tritt der Fall $L = V$ ebenfalls in 10 Fällen auf. Der Fall $E = L = V$ kann nicht auftreten, da dann $L + E + V + E + L = 5 \cdot L = 61$ gilt, aber 5 kein Teiler von 61 ist.

Folglich ist die Anzahl der gesuchten Lösungen $(435 - 15 - 10 - 10 =)$ 400.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 610811	*Insgesamt: 10 Punkte*
Korrekte Antwort zu Teil a)	2 Punkte
Korrekte Antwort zu Teil b)	2 Punkte
Vollständige Begründung	6 Punkte

Aufgabe 610812	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
Nachvollziehbarer Lösungsweg	4 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt
Teil b) Nachvollziehbarer Lösungsweg	3 Punkte
Angabe des Verhältnisses	1 Punkt

Aufgabe 610813	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	5 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	2 Punkte

Aufgabe 610814	*Insgesamt: 10 Punkte*
Begründete Schlussfolgerung, dass V ungerade ist	1 Punkt
Anzahl der Lösungen bei Zulassung gleicher Zahlen	5 Punkte
Ausschluss der Lösungen bei gleichen Zahlen	3 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt

Olympiadeklassen **9–10**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

611011 Lösung *10 Punkte*

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: a_4, a_3 und a_0 sind Ziffern in unserem Zehnersystem. Zifferndarstellungen von Zahlen mit Variablen schreiben wir in Klammern, z.B. $(a_4a_3) = 10a_4 + a_3$, dagegen $(10a_4) + a_3 = 100 + a_4 + a_3$. Weiterhin ist $P = **61*61*61$ und $a = **61* = (a_4a_3) \cdot 10^3 + 610 + a_0$.

Da die letzte Ziffer von P eine 1 ist, kann an der letzten Stelle von a nur eine 1 oder 9 stehen.

Wäre a_0 gleich 1, dann erhielte man wegen $611^2 = 373321$, dass die letzten drei Ziffern von $a^2 = (a_4a_3611)^2 = ((a_4a_3) \cdot 10^3)^2 + 2 \cdot (a_4a_3) \cdot 10^3 \cdot 611 + 611^2$ die Ziffern 321 sind, was nicht auf das Muster $*61$ passt. Diese Möglichkeit entfällt daher.

Es gilt also $a_0 = 9$ und damit $a = **619 = (a_4a_3) \cdot 10^3 + 619$. Daher ist die Hunderterziffer von a^2 die Hunderterziffer von $619^2 = 383161$, also eine 1, und folglich $P = **61*61161$.

Jetzt untersuchen wir, welche Möglichkeiten es für die Ziffer a_3 gibt.

$$\begin{aligned}
P = **61*61161 &= \big((a_4a_3) \cdot 10^3 + 619\big)^2 \\
&= (a_4a_3)^2 \cdot 10^6 + 2 \cdot (a_4a_3) \cdot 10^3 \cdot 619 + 383161 \\
&= (a_4a_3)^2 \cdot 10^6 + (123 \cdot (a_4a_3) + 8 \cdot a_4 + 38) \cdot 10^4 + 8 \cdot a_3 \cdot 10^3 + 3161\,.
\end{aligned}$$

Weil die Tausenderziffer von P eine 1 ist, muss $8a_3+3$ als letzte Ziffer eine 1 haben. Man erhält durch systematisches Durchprobieren aller zehn Möglichkeiten für a_3, also $a_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, dass a_3 nur 1 oder 6 sein kann, denn es gilt $8 \cdot 1 + 3 = 11$ und $8 \cdot 6 + 3 = 51$.

Wäre a_3 gleich 6, dann erhielte man wegen $6619^2 = 43811161$

$$\begin{aligned}
a^2 = (a_4 \cdot 10^4 + 6619)^2 &= P = **61*61161 \\
&= \big(a_4^2 \cdot 10^8 + 2 \cdot a_4 \cdot 10^5 \cdot 661 + 438 \cdot 10^5\big) + \big(2 \cdot a_4 \cdot 10^4 \cdot 9 + 1 \cdot 10^4\big) + 1161\,.
\end{aligned}$$

Nach Aufgabenstellung ist die Zehntausenderziffer von P eine 6 und gleich der Einerziffer von $2 \cdot a_4 \cdot 9 + 1$, die aber stets ungerade ist. Diese Möglichkeit entfällt daher.

Es bleibt $a_3 = 1$. Wegen $1619^2 = 2621161$ und

$$\begin{aligned}
a^2 = \big(a_4 \cdot 10^4 + 1619\big)^2 &= P = (**61*) \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 1161 \\
&= (a_4)^2 \cdot 10^8 + 2 \cdot a_4 \cdot 10^5 \cdot 161 + 2 \cdot a_4 \cdot 10^4 \cdot 9 + 26 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 1161 \\
&= \big((a_4)^2 \cdot 10^3 + 2 \cdot a_4 \cdot 161 + 26\big) \cdot 10^5 + (2 \cdot a_4 \cdot 9 + 2) \cdot 10^4 + 1161
\end{aligned}$$

ist die letzte Ziffer von $2 \cdot a_4 \cdot 9 + 2$ eine 6, da die Zehntausenderziffer von P eine 6 ist. Damit ist die letzte Ziffer von $2 \cdot a_4 \cdot 9$ eine 4, die von $a_4 \cdot 9$ also eine 2 oder eine 7. Das ist nur für $a_4 = 8$ bzw. $a_4 = 3$ der Fall. Insgesamt kann nur $a = 81619$ oder $a = 31619$ gelten. Da $81619^2 = 6661661161$ und $31619^2 = 999761161$ gilt, erfüllt nur $a = 81619$ alle Bedingungen. Dies ist damit die einzige Möglichkeit, die Gleichung zu erfüllen.

Lösungsvariante: Wir benutzen die Bezeichnungen wie in der ersten Lösung und folgern wie dort, dass die Endziffer von a nur 9 sein kann. Die Voraussetzungen und $a_0 = 9$ sowie alle möglichen Teilergebnisse werden in das übliche Multiplikationsschema eingetragen, nach dem jede Ziffer des Multiplikators $(a_4a_3)619$ mit dem Multiplikand multipliziert wird. Dadurch kann schon auf $P = **61*61161$ geschlossen werden.

$$
\begin{array}{r}
**619 \cdot **619 \\
\hline
***571 \\
**619 \\
***714 \\
****** \\
+****** \\
\hline\hline
**61*61161
\end{array}
$$

Zur weiteren Bestimmung von Ziffern werden im obigen Schema die Variablen u und v eingefügt.

$$
\begin{array}{r}
**619 \cdot **619 \\
\hline
**u571 \\
**619 \\
***714 \\
*****v \\
+****** \\
\hline\hline
**61*61161
\end{array}
$$

Die 1 als Tausenderziffer in der Ergebniszeile ergibt sich als Einerziffer von $(u+1)+6+1+v = u+v+8$, da noch der Übertrag 1 von der Hunderterstelle zu beachten ist. Weiterhin ist u die Einerziffer von $9 \cdot a_3 + 5$ und v die von $9 \cdot a_3$. Daher endet $u + v + 8 = 2 \cdot 9 \cdot a_3 + 13$ auf 1, also $18 \cdot a_3$ auf 8. Das gilt nur für $a_3 = 1$ oder $a_3 = 6$. Letzteres schließen wir wie in der ersten Lösung aus.

Mit w und z werden erneut Variablen eingeführt.

$$\begin{array}{r}
*1619 \cdot *1619 \\
\hline
*w4571 \\
*1619 \\
**9714 \\
**1619 \\
+*****z \\
\hline\hline
**61*61161
\end{array}$$

Die Einerziffer von $w + 1 + 7 + 1 + z + 2$ (die 2 als Übertrag aus der Tausenderstelle) ist eine 6, die Zehntausenderstelle von P. Dabei ist w die Einerziffer von $9 \cdot a_4 + 1$ und z die von $9 \cdot a_4$. Damit ergibt sich, dass $2 \cdot 9 \cdot a_4 + 12$ die Einerziffer 6 hat. Dafür gibt es nur die zwei Möglichkeiten $a_4 = 3$ oder $a_4 = 8$, wobei wir wie in der ersten Lösung $a_4 = 3$ ausschließen, womit nur $a_4 = 8$ übrig bleibt und zur einzigen Lösung führt:

$$\begin{array}{r}
81619 \cdot 81619 \\
\hline
734571 \\
81619 \\
489714 \\
81619 \\
+652952 \\
\hline\hline
6661661161
\end{array}$$

611012 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Der Term für z wird vereinfacht.

$$\begin{aligned}
z &= f(a) + f(a+1) + f(2a+3) \\
&= (3 \cdot a + 7) + (3 \cdot (a+1) + 7) + (3 \cdot (2a+3) + 7) \\
&= 12a + 33 = 3 \cdot (4a + 11)\,.
\end{aligned}$$

Teil b) Da z für natürliche Argumente a stets durch 3 teilbar und 10^{2021} nicht durch 3 teilbar ist (da die Basis 10 nicht durch 3 teilbar ist), gibt es keine natürliche Zahl a, für die $z = 10^{2021}$ ist.

Teil c) Es soll $z = 3 \cdot (4a + 11)$ durch 2021 teilbar sein. Da 3 und 2021 teilerfremd sind, muss dann $4a + 11$ durch 2021 teilbar sein. Es muss also $4a + 11 = k \cdot 2021$ gelten, wobei k eine nichtnegative ganze Zahl ist. Da $4a + 11$ ungerade ist, muss dann auch k ungerade sein. Durch systematisches Probieren und Lösen der entsprechenden Gleichung kommt man für $k = 3$ auf die natürliche Zahl $a = 1513$ als Lösung. Weitere Lösungen ergeben sich für $k = 7, 11, 15, \ldots$

Teil d) Hier wird eine natürliche Zahl a gesucht, für die

$$z = \underbrace{ZZ\ldots Z}_{2021}$$

gilt, wobei Z eine Ziffer aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ ist. Setzt man für z den gefundenen Term ein, so erhält man die Gleichung

$$3 \cdot (4a + 11) = \underbrace{ZZ\ldots Z}_{2021} = Z \cdot \underbrace{11\ldots 1}_{2021} .$$

Daher muss Z durch 3 teilbar sein. Für $Z = 3$ löst man die lineare Gleichung nach a auf und erhält

$$a = 2\underbrace{77\ldots 7}_{2018}5 .$$

Die Probe zeigt, dass diese natürliche Zahl das Geforderte liefert, denn es gilt

$$2\underbrace{77\ldots 7}_{2018}5 \cdot 4 + 11 = \underbrace{11\ldots 1}_{2019}00 + 11$$

und das Dreifache der letzten Zahl hat 2021 Dreien als Ziffern.

<u>611013 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Ist $z \leq 0$, dann gilt für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $n \cdot z \leq 0$ und somit $n \cdot z < 2021$. Alle $z \leq 0$ haben daher die geforderte Eigenschaft.

Im Folgenden soll untersucht werden, ob es auch positive Zahlen z mit der geforderten Eigenschaft gibt.

Wir nehmen an, dass es eine positive reelle Zahl z_p gibt, für die $n \cdot z_p < 2021$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt. Wählt man für diese Zahl z_p eine ganze Zahl $n_p > \frac{2021}{z_p}$, dann folgt $n_p \cdot z_p > \frac{2021}{z_p} \cdot z_p = 2021$. Das Produkt ist also nicht kleiner als 2021, wie es verlangt war. Daher ist die Annahme falsch, dass es eine positive Zahl z_p gibt, welche die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Die Aussage gilt daher genau für alle reellen Zahlen $z \leq 0$.

Anmerkung: Auch eine heuristische Argumentation ist möglich. Da n positiv gewählt wurde, ist $n \cdot z < 2021$ äquivalent zur Ungleichung $z < \frac{2021}{n}$, die für alle $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ gelten soll. Für sehr (!) große Werte von n nimmt der Bruch $\frac{2021}{n}$ sehr kleine positive Werte an und unterschreitet bei immer größer werdendem n alle noch so kleinen positiven Schranken und somit auch jeden noch so kleinen positiven Wert von z.

Teil b) Wir stellen die gegebene Ungleichung äquivalent nach n um und untersuchen, für welche Werte von z alle positiven natürlichen Zahlen n Lösungen sind. Aus $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ ergibt sich nach Multiplikation mit positivem $3n + 2$ die Ungleichung $2n + 1 < 3zn + 2z$ und daraus $1 - 2z < (3z - 2)n$. Wir wollen jetzt durch $3z - 2$ dividieren, kennen aber das Vorzeichen nicht. Deswegen ist eine Fallunterscheidung notwendig.

Fall 1: $3z - 2 > 0$ bzw. äquivalent $z > \frac{2}{3}$. In diesem Fall kann die Division als äquivalente Umformung ausgeführt werden, ohne dass das Relationszeichen sich umkehrt, und es ergibt sich $\frac{1-2z}{3z-2} < n$. Da in diesem Fall $1 - 2z < 1 - \frac{4}{3} < 0$ gilt, ist die linke Seite der Ungleichung negativ, die Ungleichung und damit auch die Ausgangsungleichung also für alle positiven natürlichen Zahlen n erfüllt.

Fall 2: $3z - 2 = 0$. In diesem Fall dürfen wir nicht durch $3z - 2$ dividieren. Es ergibt sich aber $z = \frac{2}{3}$ und die gegebene Ungleichung ist äquivalent zu $1 - \frac{4}{3} < 0$, also unabhängig von n stets wahr.

Fall 3: $3z - 2 < 0$. In diesem Fall ist die Division als äquivalente Umformung möglich, ändert aber das Relationszeichen. Es ergibt sich also $\frac{1-2z}{3z-2} > n$. Wählt man eine positive ganze Zahl größer als $\frac{1-2z}{3z-2}$ für n aus, ist diese und damit auch die gegebene Ungleichung nicht erfüllt.

Zusammenfassend ist die gegebene Ungleichung genau dann für jede positive ganze Zahl n erfüllt, wenn $z \geq \frac{2}{3}$ gilt.

Lösungsvariante: Setzt man für n immer größer werdende positive ganze Zahlen ein, nähert sich der Wert des Terms $\frac{2n+1}{3n+2}$ immer mehr $\frac{2}{3}$. Daraus folgt die Vermutung, dass die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ genau dann für alle positiven ganzen Zahlen n gilt, wenn $z \geq \frac{2}{3}$ ist.

Also versuchen wir, aus dem Term der linken Seite $\frac{2}{3}$ herauszuziehen. Das tut man, indem man die $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ als produktive Null hinzunimmt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{3n+2} &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2n+1}{3n+2} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2(3n+2) - 3(2n+1)}{3(3n+2)} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{9n+6}\,.\end{aligned}$$

Da der Subtrahend immer positiv ist, ist die Ungleichung also im Falle von $z \geq \frac{2}{3}$ stets erfüllt.

Ist allerdings $z < \frac{2}{3}$, also $z = \frac{2}{3} - d$ mit positivem d, so ist die Ungleichung offenbar falsch, wenn $d > \frac{1}{9n+6}$ ist, was nach Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{9n+6}{d}$ in $9n+6 > \frac{1}{d}$ übergeht. Wählt man also eine positive natürliche Zahl n derart, dass $9n + 6 > \frac{1}{d}$ ist (etwa irgendein $n > \frac{1}{d}$, da $9n + 6 > n$ gilt), so ist die gegebene Ungleichung nicht erfüllt.

Zusammenfassend ist die gegebene Ungleichung genau dann für jedes positive ganze n wahr, wenn $z \geq \frac{2}{3}$ gilt.

Hinweis: Teile der Lösungsmenge kann man mit etwas geringerem Aufwand bestimmen.

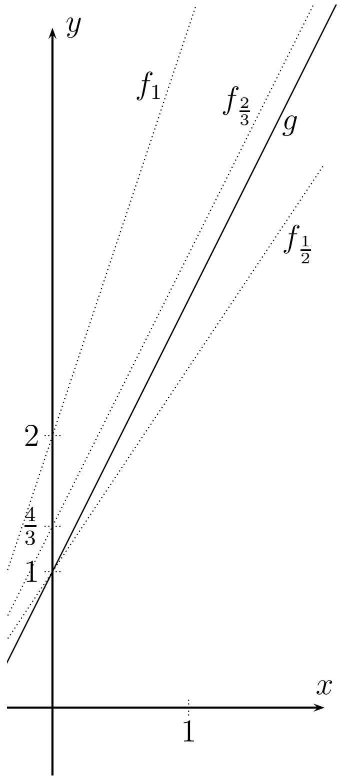
Weil in $\frac{2n+1}{3n+2}$ für alle positiven ganzen Zahlen n der positive Zähler kleiner ist als der Nenner, gilt $\frac{2n+1}{3n+2} < 1$ für alle positiven ganzen Zahlen n. Folglich sind alle reellen Zahlen z mit $z \geq 1$ Lösung.

Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ folgt aus $9n + 6 = 3 \cdot (3n + 2) \leq 10n + 5 = 5 \cdot (2n + 1)$ durch äquivalentes Umformen $\frac{3}{5} \leq \frac{2n+1}{3n+2}$. Daher gehören alle z mit $z \leq \frac{3}{5}$ nicht zur Lösung.

Lösungsvariante:

Wenn $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ für alle positiven ganzen Zahlen n gelten soll, dann muss die Ungleichung insbesondere für $n = 1$ gelten. Daher folgt $\frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+2} = \frac{3}{5} < z$. Die gesuchten Zahlen sind somit alle größer als $\frac{3}{5}$. Das Problem wird nun im x-y-Koordinatensystem interpretiert. Da $3n + 2 > 0$ gilt, erhält man $2n + 1 < (3n + 2) \cdot z = (3z)n + 2z$.

Wir untersuchen die linearen Funktionen $y = g(x) = 2x + 1$ und $y = f_z(x) = (3z)x + 2z$ mit $x \geq 0$ und festem z mit $z > \frac{3}{5}$, siehe Abbildung L 611013.



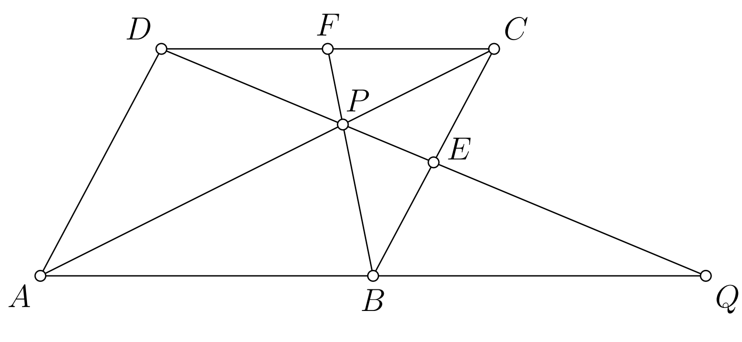
L 611013

Der Schnittpunkt des Graphen von g mit der y-Achse ist $S(0, 1)$ und der von f_z ist $S_z(0, 2z)$. Wenn $z \geq \frac{2}{3}$ gilt, dann liegt $S(0, 1)$ unterhalb von $S_z(0, 2z)$ und wegen $2 \leq 3z$ ist der Anstieg des Graphen von f_z größer oder gleich dem von g. Daher sind im Bereich $x \geq 0$ die Funktionswerte von g stets kleiner als die von f_z an den gleichen Stellen, also $2x+1 < (3z)x+2z$. Auch für alle positiven ganzzahligen Argumente n gilt damit $g(n) < f_z(n)$, also $2n+1 < (3z)n+2z = (3n + 2) \cdot z$ und folglich $\frac{2n+1}{3n+2} < z$. Alle $z \geq \frac{2}{3}$ haben also die geforderte Eigenschaft.

Ist aber $z < \frac{2}{3}$, dann ist wegen $3z < 2$ der Anstieg des Graphen von f_z kleiner als der von g. Also gibt es einen Schnittpunkt der Graphen an einer Stelle x_z und für alle ganzen Zahlen n mit $n > x_z$ ist der Funktionswert von f_z kleiner als der von g an derselben Stelle, also $2n + 1 > (3z)n + 2z = (3n + 2) \cdot z$. Für alle positiven ganzen Zahlen n mit $n > x_z$ gilt also $\frac{2n+1}{3n+2} > z$. Daher hat keine der Zahlen $z < \frac{2}{3}$ die geforderte Eigenschaft.

Zusammen ergibt sich als Lösungsmenge die Menge aller reellen Zahlen z mit $z \geq \frac{2}{3}$.

611014 Lösung *10 Punkte*



L 611014 a

Teil a) Die Dreiecke CDE und BQE sind nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent, da $|BE| = |EC|$ gilt und die an $\overline{BE}$ und $\overline{EC}$ anliegenden Innenwinkel nach dem Wechselwinkelsatz an geschnittenen Parallelen bzw. als Scheitelwinkel jeweils übereinstimmen. Also gilt

$$|AQ| = |AB| + |BQ| = |AB| + |CD| \ ,$$

woraus die Behauptung folgt, da $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Lösungsvariante:

Die Strahlen $\overrightarrow{QA}$ und $\overrightarrow{QD}$ werden von den Parallelen BC und AD geschnitten. Durch Anwendung des Strahlensatzes gilt: $|QA| : |AD| = |QB| : |BE|$. Mit $|AD| = |BC| = 2\,|BE|$ folgt $|QA| = 2\,|BQ|$, wegen $|QA| = |AB| + |BQ|$ also auch $|AB| = |BQ|$ und damit $|AQ| = 2\,|AB|$.

Teil b) Die sich im Punkt P schneidenden Geraden DQ und FB werden von den Parallelen DC und AQ geschnitten. Aus der ersten Teilaufgabe folgt durch Anwendung des Strahlensatzes, dass P die Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{DQ}$ jeweils im Verhältnis $1 : 2$ teilt, da $|DF| = \frac{1}{2} \cdot |BQ|$ und folglich

$$|FP| : |PB| = |DF| : |BQ| = |DP| : |PQ| = 1 : 2$$

gilt. Damit erhält man $|PQ| = \frac{2}{3}\,|DQ|$.

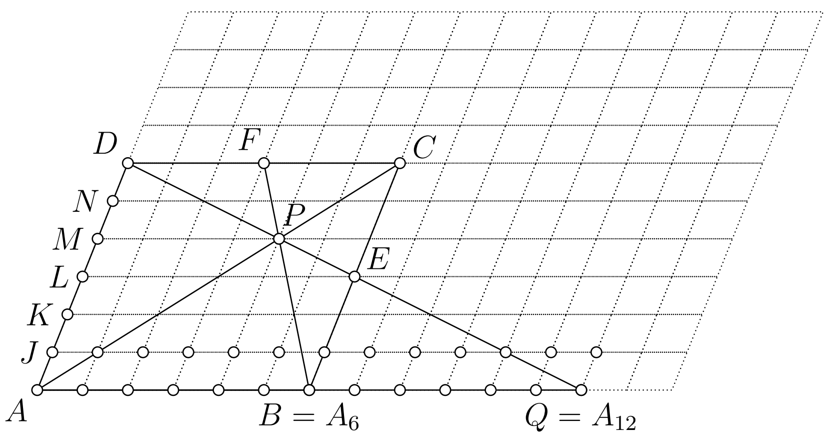
Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DQ}$ sei P'. Aus der erneuten Anwendung des Strahlensatzes mit dem Zentrum P' folgt, dass P' die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DQ}$ jeweils im Verhältnis $1 : 2$ teilt, da

$$|P'C| : |P'A| = |DC| : |AQ| = |DP'| : |P'Q| = 1 : 2$$

und damit $|P'Q| = \frac{2}{3}\,|DQ|$ ist. Somit sind P und P' identisch, denn beide Punkte liegen auf $\overline{DQ}$ und haben den gleichen Abstand zu Q. P liegt daher auch auf $\overline{AC}$.

Bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum P und dem Streckungsfaktor $-\frac{1}{2}$ wird der Punkt A auf den Punkt C und Q auf D abgebildet, weil $|CD| = \frac{1}{2}\,|AQ|$ und $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Bei dieser zentrischen Streckung wird das Lot von P auf AB auf das Lot von P auf CD abgebildet. Die Längen dieser Lote verhalten sich wie $2 : 1$. Daher hat das Lot von P auf AB die Länge von zwei Dritteln des Abstandes der Geraden AB und CD, also von $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Lösungsvariante: Wir zeigen, dass P auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt.



L 611014 b

Wir überdecken die Ebene überschneidungsfrei und lückenlos mit Parallelogrammen, die durch Verschiebungen eines Parallelogramms entstehen, das aus dem gegebenen Parallelogramm $ABCD$ durch zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{6}$ und dem Zentrum A hervorgeht, siehe Abbildung L 611014 b. (Die Seitenlängen dieser Parallelogramme sind dann $a = \frac{1}{6}|AB|$ und $b = \frac{1}{6}|AD|$.) Die Eckpunkte all dieser kleineren Parallelogramme bilden ein Punktgitter der Ebene, in dem auch A, B, C und D Gitterpunkte sind. Da die Gitterpunkte die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ jeweils in sechs gleich lange Abschnitte teilen, sind auch E und F Gitterpunkte. Weiter ist wegen $|AB| = |BQ|$ auch Q ein Gitterpunkt.

Es soll nun gezeigt werden, dass P ein Gitterpunkt ist und dass er auf den Strecken $\overline{DQ}$ und $\overline{AC}$ liegt. Dazu werden einige der Gitterpunkte bezeichnet.

Die Gitterpunkte auf der Strecke $\overline{AD}$ werden von A nach D mit J, K, L, M und N in dieser Reihenfolge bezeichnet.

Die Gitterpunkte auf der Geraden AB werden mit $A, A_1, A_2, ..., A_6 = B, A_7, ..., A_{12} = Q$ bezeichnet. Die Gitterpunkte auf der Geraden parallel zu AB durch J werden mit $J, J_1, J_2, ..., J_{12}$ bezeichnet. J_6 liegt dann auf $\overline{BC}$, siehe Abbildung L 611014 b. In analoger Weise wird mit den Gitterpunkten auf den zu AB parallelen Geraden durch K, L, M, N und D verfahren (in Abbildung L 611014 b nicht dargestellt). Dann ist $D_3 = F$, $D_6 = C$ und $L_6 = E$.

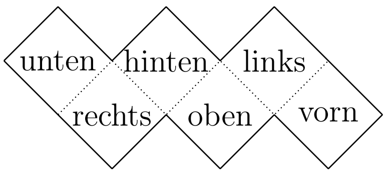
Die Diagonalen $\overline{DN_2}$ im Parallelogramm DNN_2D_2, $\overline{N_2M_4}$ im Parallelogramm $N_2M_2M_4N_4$, $\overline{M_4L_6}$ im Parallelogramm $M_4L_4L_6M_6$, $\overline{L_6K_8}$ im Parallelogramm $L_6K_6K_8L_8$, $\overline{K_8J_{10}}$ im Parallelogramm $K_8J_8J_{10}K_{10}$, $\overline{J_{10}A_{12}}$ im Parallelogramm $J_{10}A_{10}A_{12}J_{12}$ liegen auf der Geraden DQ. Damit liegt M_4 auf der Geraden DQ.

Die Diagonale $\overline{D_3M_4}$ im Parallelogramm $D_3M_3M_4D_4$ sowie die Diagonalen $\overline{M_4K_5}$ im Parallelogramm $M_4K_4K_5M_5$ und $\overline{K_5A_6}$ im Parallelogramm $K_5A_5A_6K_6$ liegen auf der Geraden FB. Damit liegt M_4 auch auf der Geraden FB.

Die Diagonalen $\overline{AK_2}$ im Parallelogramm AA_2K_2K, $\overline{K_2M_4}$ im Parallelogramm $K_2K_4M_4M_2$, $\overline{M_4D_6}$ im Parallelogramm $M_4M_6D_6D_4$ liegen auf der Geraden AC. Damit liegt M_4 auch auf der Geraden AC.

Der Punkt M_4 ist somit der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden DQ, FB und AC und folglich der Punkt P.

611015 Lösung *10 Punkte*



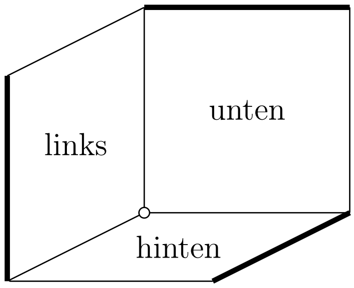
L 611015 a

Es sind die Punktzahlen 2, 3, 4 und 6 möglich; die Punktzahlen 0, 1 und 5 hingegen nicht. Die Abbildung L 611015 a zeigt eine Beschriftung, bei der 6 Punkte erreicht werden. 6 Punkte sind also möglich.

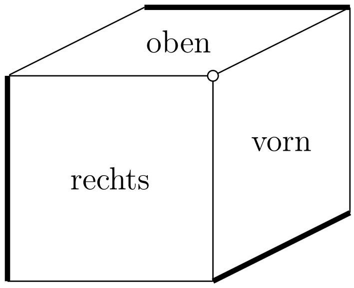
Null Punkte oder ein Punkt sind nicht möglich, denn dreht man den gebastelten Würfel so, dass „oben" oben steht, stimmt schon eine Beschriftung. Höchstens eines der Worte „links", „rechts", „vorn" und „hinten" liegt dann unten. Man kann den Würfel nun noch so drehen, dass wenigstens eine dieser vier Beschriftungen richtig steht, wobei „oben" oben bleibt.

In den folgenden Überlegungen wird beim zyklischen Vertauschen stets von einem vollständig korrekt beschrifteten Würfel (bzw. Würfelnetz) ausgegangen.

Zwei Punkte sind möglich:



L 611015 b



L 611015 c

In einem korrekt beschrifteten Würfel vertauschen wir an der Ecke unten-hinten-links (also an der eindeutig bestimmten Ecke, die zu den drei mit „unten“, „hinten“ und „links“ beschrifteten Seitenflächen gehört) die Beschriftungen „unten“ und „hinten“ (s. Innenansicht in Abbildung L 611015 b) und an der Ecke vorn-rechts-oben die Beschriftungen „rechts“ und „vorn“ (s. Außenansicht in Abbildung L 611015 c).

Angenommen, es gäbe eine Lage des so beschrifteten Würfels mit mindestens drei richtigen Beschriftungen. Diese liegen dann entweder um eine Ecke oder zwei davon liegen einander gegenüber.

Da die Wortpaare „links“ und „rechts“, „oben“ und „unten“ sowie „vorn“ und „hinten“ nun jeweils an einer in Abbildung L 611015 b und c jeweils fett markierten Kante – also nicht gegenüber – liegen, ist letzteres nicht richtig.

Der Würfel kann auch nicht so gedreht werden, dass die Beschriftungen um die Ecken an den fett markierten Kanten alle richtig sind, denn jeweils zwei von ihnen beschreiben gegenüberliegende Seitenflächen.

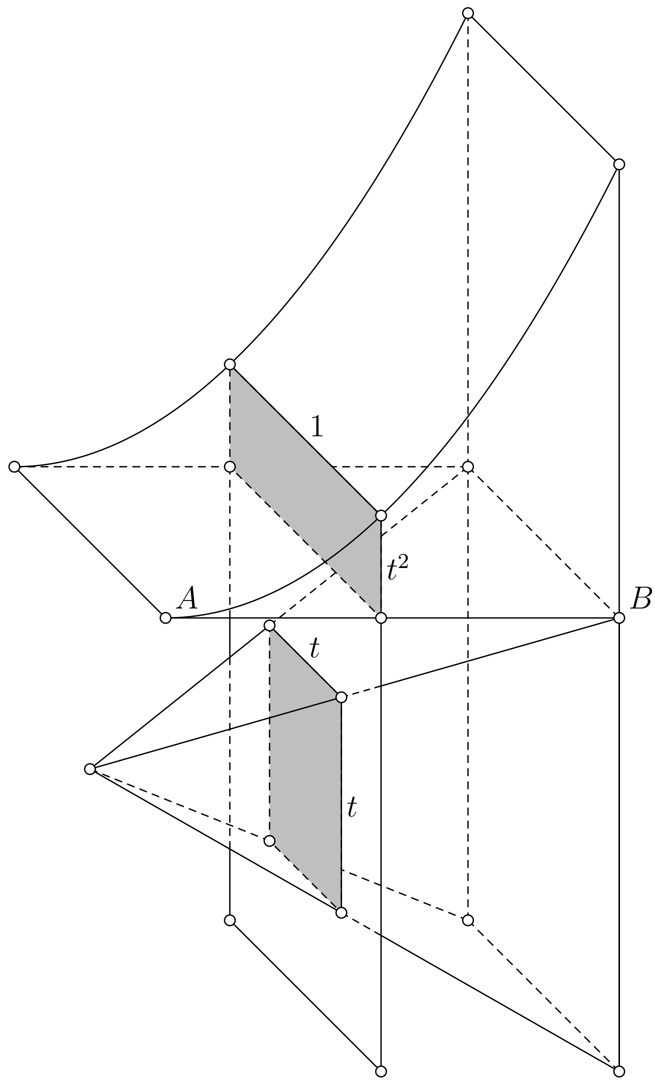
Die verbleibenden zwei Ecken können nur von richtigen Bezeichnungen umrandet werden, wenn sie an der dargestellten Position liegen, also links-hinten-unten (Abbildung L 611015 b) bzw. rechts-vorn-oben (Abbildung L 611015 c). Außerdem muss dann natürlich „links“ auch links liegen bzw. „oben“ auch oben, was die Position des Würfels jeweils eindeutig festlegt – und dann ist jeweils nur eine der Beschriftungen richtig.

Also können beim so beschrifteten Würfel höchstens zwei Seiten richtig gedreht werden. Da beim Würfel in Abbildung L 611015 b und c die beiden Beschriftungen „links“ und „oben“ richtig sind, folgt, dass 2 Punkte möglich sind.

Drei Punkte sind möglich: Ein zyklischer Tausch der Bezeichungen „links“, „hinten“, „unten“ gegenüber der korrekten Variante führt dazu, dass von zwei gegenüberliegenden Bezeichnungen stets höchstens eine richtig ist und in unveränderter Lage genau eine.

Vier Punkte sind möglich: Tauscht man nur „links“ und „unten“, so sind jeweils „rechts“ oder „links“ falsch ebenso wie „oben“ oder „unten“, da sie sich nicht mehr gegenüberliegen.

Fünf Punkte sind nicht möglich: Ist genau eine Bezeichnung falsch, fehlt diese an der Stelle, wo sie richtig wäre.



L 611016

Teil a) In der Fläche F, die wir als Grundfläche des Zylinders Z auffassen, sei wie in Abbildung L 611016 dargestellt A der Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$ und B der Punkt mit den Koordinaten $(1, 0)$. Die Ebene senkrecht zur Geraden AB, die durch den Punkt A geht, bezeichnen wir mit E. Die Pyramide K legen wir nun so in den Raum, dass ihre Höhe parallel zur Geraden AB, ihre Spitze in E und die ganze Pyramide auf derselben Seite von E wie Z liegt.

Nun sei E' eine zweite Ebene parallel zu E, die Z und K schneidet. Wir behaupten, dass E' aus Z und K inhaltsgleiche Flächen herausschneidet. Nach dem Cavalieri'schen Prinzip ist dann bewiesen, dass Z und K das gleiche Volumen haben.

Der Abstand von E und E' wird mit t bezeichnet. Dann gilt $0 < t \leq 1$. Der Schnitt von E' mit Z ist offenbar ein Rechteck, dessen eine Seitenlänge die Höhe des Zylinders, also gleich 1 ist. Die andere Seitenlänge entspricht der Länge derjenigen Strecke, die E' aus der Grundfläche F herausschneidet. Dies sind aber genau diejenigen Punkte mit Koordinaten (t, y), die der Ungleichung $0 \leq y \leq t^2$ genügen. Man erhält also eine Strecke der Länge t^2. Damit schneidet E' aus Z ein Rechteck mit dem Flächeninhalt t^2 heraus.

Der Schnitt von E' mit K ist ein Quadrat, das man aus der Grundfläche von K durch zentrische Streckung mit Faktor t von der Pyramidenspitze aus erhält. Es ist also ein Quadrat mit dem Flächeninhalt t^2. Da beide Schnittfiguren den gleichen Flächeninhalt haben, ist der geforderte Nachweis erbracht.

Teil b) Da Z die Höhe 1 hat, sind die Maßzahlen für das Volumen von Z und für den Flächeninhalt von F gleich.

Die Pyramide K hat die Höhe 1 und eine Grundfläche mit dem Inhalt 1. Daher hat K das Volumen $V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}$. Da Z und K das gleiche Volumen haben, folgt daraus für das Volumen V_Z von Z aus $V_Z = F \cdot h$ mit $\frac{1}{3} = F \cdot 1$, dass F den Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ hat.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 611011	*Insgesamt: 10 Punkte*
Sinnvoller Lösungsansatz	2 Punkte
Ermittlung (mit Nachweis) von a_0	2 Punkte
Ermittlung (mit Nachweis) von a_3	3 Punkte
Ermittlung (mit Nachweis) von a_4	2 Punkte
Abschließende Folgerung der korrekten Lösung	1 Punkt

Aufgabe 611012	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b) Richtige, korrekt begründete Antwort	2 Punkte
Bei der Bewertung der folgenden Teilaufgaben b) und c) ist zu beachten, dass es genügt nachzuweisen, dass ein entsprechender Wert für a existiert; es muss kein konkreter Wert angegeben werden.	
Teil c) Richtige, korrekt begründete Antwort	3 Punkte
Teil d) Richtige, korrekt begründete Antwort	3 Punkte

Aufgabe 611013	*Insgesamt: 10 Punkte*

Hier muss in jedem Teil eine Menge von Zahlen z mit der gewünschten Eigenschaft (Lösungsmenge) angegeben werden und die Lösung muss die Nachweise (durch logisch korrekte Herleitung oder nachträglichen Beweis) erbringen, dass einerseits alle Elemente der angegebenen Menge die gewünschte Eigenschaft haben und andererseits alle anderen nicht. Bei logisch korrektem Umstellen der Ungleichung nach n und Auswertung, ob alle natürlichen Zahlen die gefundene Ungleichung einhalten, werden diese beiden Nachweise beispielsweise simultan erbracht.

Teil a) .... 3 Punkte

Menge ist tatsächlich Lösungsmenge 1 Punkt, Nachweis 2 Punkte

Teil b) .... 7 Punkte

Sinnvoller Ansatz zum Finden der Lösungsmenge erkennbar 2 Punkte

Gefundene Menge ist tatsächlich Lösungsmenge 1 Punkt

Nachweise 4 Punkte

Aufgabe 611014 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Teil b) .... 7 Punkte

P auf AC 4 Punkte

Länge des Lotes von P auf AB 3 Punkte

Aufgabe 611015 *Insgesamt: 10 Punkte*

Möglichkeit von zwei Punkten .... 3 Punkte

Möglichkeit von drei Punkten .... 2 Punkte

Weitere Fälle .... 5 Punkte

Aufgabe 611016 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 6 Punkte

Passende Lagen und korrekte Schnittflächen betrachtet 2 Punkte

Einführung eines geeigneten Parameters 1 Punkt

Korrekte Ermittlung und Vergleich der Inhalte der Schnittflächen 3 Punkte

Teil b) .... 4 Punkte

Olympiadeklassen **11–12**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

611211 Lösung *10 Punkte*

Angenommen, a, b, c, d seien Zahlen, die die Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllen.

Wegen (2) gilt $d = c + 1$ oder $d = c - 1$.

Fall 1: $d = c + 1$.
Einsetzen in (4) liefert $b \cdot (c + 1) + 1 = b \cdot c + 6$; das ist äquivalent zu $b = 5$.

Fall 2: $d = c - 1$.
Einsetzen in (4) liefert $b \cdot (c - 1) + 1 = b \cdot c + 6$; daraus folgt $b = -5$, also keine Lösung.

Wird $b = 5$ in (3) eingesetzt, so ergibt sich $5 \cdot a + 1 = c$. Folglich ist genau eine der Zahlen a oder c gerade.

Wegen (1) ist also $a = 2$ oder $c = 2$.

Fall 1: $a = 2$.
Dann ist $c = 11$, und es folgt $d = 12$.

Fall 2: $c = 2$.
Dann ist $a = 1/5$, also nicht ganzzahlig.

Wenn es eine Lösung gibt, kann sie demnach nur von den Zahlen $a = 2$, $b = 5$, $c = 11$ und $d = 12$ gebildet werden. Die Probe zeigt, dass für diese Zahlen alle Bedingungen erfüllt sind.

Also ist $(b \cdot d + 1) \cdot 10\,000 + d \cdot 100 + c = 61 \cdot 10\,000 + 12 \cdot 100 + 11 = 61\,12\,11$.

611212 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Die Anzahl der Anordnungen von k roten und $(m - k)$ schwarzen Kugeln in einer Reihe wird bekanntlich durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\dots\cdot(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

gegeben. Die zu betrachtende Anzahl ist also insbesondere

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdot\dots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\,.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &= \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n}\\
&= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n(2n-1)\cdot\dots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\\
&= \binom{2n}{n} - \frac{2n(2n-1)\cdot\dots\cdot(n+2)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n-1)}\\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Da Binomialkoeffizienten immer ganzzahlig sind, ist die Teilbarkeit von $\binom{2n}{n}$ durch $(n+1)$ gezeigt.

Zweite Lösung: Wir bezeichnen die zu betrachtende Anzahl mit A_n. Zu zeigen ist also, dass A_n durch $(n+1)$ teilbar ist.

Dazu betrachten wir zwei weitere Anzahlen von Möglichkeiten, $2n$ farbige Kugeln anzuordnen. Es sei B_n die Anzahl, $(n+1)$ rote und $(n-1)$ schwarze Kugeln in eine Reihe zu legen, und es sei C_n die analoge Anzahl für n rote, $(n-1)$ schwarze und eine weiße Kugel.

Behauptung 1: Es gilt

$$C_n = (n+1)\cdot B_n\,.$$

Beweis: Um die C_n Anordnungen zu finden, betrachten wir im ersten Schritt alle B_n Möglichkeiten für $(n+1)$ rote und $(n-1)$ schwarze Kugeln und färben in ihnen jeweils die erste rote Kugel weiß um. Das liefert B_n Anordnungen, bei denen die weiße Kugel vor allen roten liegt.

Im zweiten Schritt nehmen wir wieder alle B_n Anordnungen und färben die jeweils zweite rote Kugel weiß. Genauso verfahren wir im dritten Schritt mit der jeweils dritten roten Kugel jeder Anordnung, im vierten Schritt mit der jeweils vierten roten Kugel usw., bis wir schließlich im $(n+1)$-ten Schritt in einem letzten Satz von B_n Anordnungen $(n+1)$ roter und $(n-1)$ schwarzer Kugeln die jeweils $(n+1)$-te und damit letzte rote Kugel jeder Anordnung weiß färben.

Auf diese Weise erhalten wir alle C_n Möglichkeiten und jede Möglichkeit nur einmal. Es folgt somit $C_n = (n+1)\cdot B_n$ wie behauptet.

Behauptung 2: Es gilt

$$C_n = n\cdot A_n\,.$$

Beweis: Um die C_n Anordnungen zu finden, betrachten wir analog zu oben im ersten Schritt alle A_n Möglichkeiten für n rote und n schwarze Kugeln und färben jeweils die erste der n schwarzen Kugeln weiß. Im zweiten Schritt wird dann jeweils die zweite Kugel, im dritten Schritt die dritte Kugel usw. und schließlich im n-ten Schritt die n-te und damit letzte der n schwarzen Kugeln weiß gefärbt. Das zeigt $C_n = n\cdot A_n$.

Da n und $(n+1)$ teilerfremd sind, folgt aus $nA_n = (n+1)B_n$, dass A_n durch $(n+1)$ teilbar ist.

611213 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: *Antwort:* Das Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn diejenige unter den Zahlen a und b, die den größeren Betrag hat, positiv ist. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig bestimmt. Wenn $a > |b|$ gilt, lautet die Lösung $\left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(b-a)\right)$, und wenn $b > |a|$ ist, $\left(\frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2}(a+b)\right)$.

Beweis: Wenn (x, y) das gegebene Gleichungssystem löst, ist offenbar

$$a \in \big\{|x| + |y|\,, |y| - |x|\big\} \quad \text{und} \quad b \in \big\{|x| + |y|\,, |x| - |y|\big\}\,.$$

A priori ergeben sich damit $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Jedoch kann nicht $a = b = |x| + |y|$ gelten, da dann $|a| = |b|$ wäre. Ebenso kann nicht $a = |y| - |x|$ und $b = |x| - |y|$ gelten, denn dann wäre $a + b = 0$ und folglich ebenfalls $|a| = |b|$. Insgesamt tritt also einer der beiden Fälle

(1) $a = |x| + |y|$ und $b = |x| - |y|$,

(2) $a = |y| - |x|$ und $b = |x| + |y|$

ein. In beiden Fällen ist $|x| + |y|$ diejenige unter den Zahlen a und b, die den größeren Betrag aufweist, und diese Zahl ist zudem positiv (da sonst $x = y = 0$ und damit $a = b = 0$ wäre, was erneut $|a| \neq |b|$ widerspräche). Dies zeigt, dass die angegebene Bedingung für die Existenz einer Lösung in der Tat notwendig ist.

Ab jetzt nehmen wir an, dass entweder $a = |a| > |b|$ oder $b = |b| > |a|$ gilt. Vertauschen wir im gegebenen Gleichungssystem gleichzeitig a mit b und x mit y, so vertauschen sich die Gleichungen. Deshalb dürfen wir uns ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit auf den Fall $a = |a| > |b|$ beschränken. Dann kann es nur Lösungen vom Typ (1) geben. Wir erhalten also die beiden Gleichungen

$$|x| + |y| = a\,, \tag{1}$$
$$|x| - |y| = b\,, \tag{2}$$

die

$$|x| = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad |y| = \frac{a-b}{2} \tag{3}$$

implizieren. Damit die gegebenen Gleichungen mit (1) und (2) verträglich sind, muss $x = |x|$ und $y = -|y|$ sein, was zusammen mit (3) sofort

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \tag{4}$$

liefert. Nun fehlt nur noch die Probe. Wir nehmen dazu $a = |a| > |b|$ und (4) an. Wegen

$$x = \frac{a+b}{2} \geq \frac{a-|b|}{2} > 0 \quad \text{und} \quad y = \frac{b-a}{2} \leq \frac{|b|-a}{2} < 0$$

ist in der Tat

$$x + |y| = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a \quad \text{und} \quad |x| + y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b\,.$$

Dies vollendet die Lösung der Aufgabe.

Zweite Lösung: Je nach den Vorzeichen von x und y unterscheiden wir vier Fälle.

Fall 1: $x \geq 0$, $y \geq 0$.
Die gegebenen Gleichungen nehmen nun die Gestalt $x + y = a$ und $x + y = b$ an. Diese Gleichungssystem ist sicher nur dann lösbar, wenn $a = b$ gilt, was jedoch der Voraussetzung $|a| \neq |b|$ widerspricht. Im Fall 1 gibt es also nie Lösungen.

Fall 2: $x \geq 0 > y$.

Dann liegt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y &= a\,, \\ x + y &= b \end{aligned}$$

vor, dessen einzige Lösung

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \tag{5}$$

ist. Nun gilt genau dann $x \geq 0 > y$, wenn $a > b \geq -a$ ist, d. h., wenn $a = |a| > |b|$ gilt. Im Fall 2 gibt es also genau dann eine Lösung, wenn unter den Zahlen a und b diejenige mit dem größeren Betrag a ist und wenn darüber hinaus a positiv ist. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, ist (5) die einzige Lösung mit $x \geq 0 > y$.

Fall 3: $y \geq 0 > x$.

In diesem Fall lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= a\,, \\ -x + y &= b\,, \end{aligned}$$

und seine einzige Lösung ist

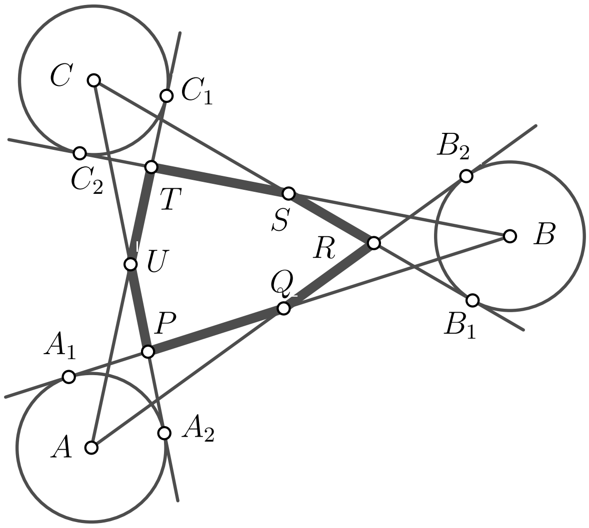
$$(x, y) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)\,. \tag{6}$$

Die Voraussetzung $y \geq 0 > x$ von Fall 3 ist zu $b > a \geq -b$, also zu $b = |b| > |a|$, äquivalent. Es gibt also genau dann eine vom Fall 3 erfasste Lösung, wenn b diejenige der Zahlen a, b ist, die den größeren Betrag hat, und wenn außerdem b positiv ist. Wenn beides erfüllt ist, stellt (6) die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems vor, für die $y \geq 0 > x$ gilt.

Fall 4: $0 > x$, $0 > y$.

Dann ist $|a| = |x - y| = |y - x| = |b|$ entgegen der Voraussetzung. Folglich gibt es im Fall 4 keine Lösungen.

Insgesamt bestätigt diese Diskussion die gegebene Antwort. Die Probe kann entfallen, da die Argumentation in allen Fällen die Äquivalenz der Bedingungen zum ursprünglichen Gleichungssystem sichert.



L 611214 a

Es seien A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2 die in Abbildung L 611214 a hervorgehobenen Berührungspunkte. Weiterhin sei r der Radius der drei Kreise.

Wegen $|\sphericalangle AUA_2| = |\sphericalangle C_1UC|$ (Scheitelwinkel) und $|AA_2| = |CC_1| = r$ sind die rechtwinkligen Dreiecke AA_2U und CUC_1 nach Kongruenzsatz (wsw) in Verbindung mit dem Satz über die Innenwinkelsumme ebener Dreiecke zueinander kongruent. Daher ist

$$|A_2U| = |C_1U| \ .$$

Analog zeigt man

$$|B_2Q| = |A_1Q| \quad \text{und} \quad |C_2S| = |B_1S| \ .$$

Die Addition aller drei Gleichungen führt wegen $|A_2U| = |A_2P| + |PU|$ und ähnlicher Zerlegungen auf

$$\begin{aligned}(|A_2P| + |B_2R| + |C_2T|) + (|PU| + |RQ| + |TS|)\\ = (|C_1T| + |A_1P| + |B_1R|) + (|TU| + |PQ| + |RS|)\,.\end{aligned}$$

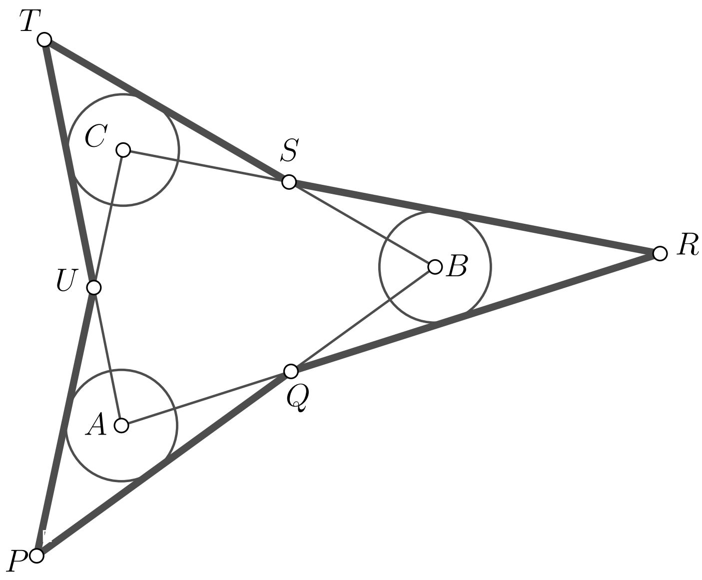
Durch Subtraktion der gleich langen Tangentenabschnitte

$$|A_2P| = |A_1P| \ , \quad |B_2R| = |B_1R| \quad \text{und} \quad |C_2T| = |C_1T|$$

erhalten wir die behauptete Gleichung

$$|PU| + |RQ| + |TS| = |TU| + |PQ| + |RS| \ .$$

Bemerkung: Es gilt ein analoger Satz, wenn die Tangenten wie in Abbildung L 611214 b gezeichnet werden.



L 611214 b

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 611211 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Widerlegung von $d = c - 1$ .... 1 Punkt
Feststellung $d = c + 1$ .... 1 Punkt
Beweis von $b = 5$ .... 1 Punkt
Aufstellen der Gleichung $5a + 1 = c$ .... 1 Punkt
Schlussfolgerung, dass $a = 2$ oder $c = 2$ gilt .... 2 Punkte
Widerlegung von $c = 2$ .... 1 Punkt
Abschluss der Berechnung aller vier Zahlen .... 1 Punkt
Hinweis auf Probe .... 1 Punkt
Endergebnis .... 1 Punkt

Aufgabe 611212 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Bei Vorgehen im Sinne der ersten Lösung:
Formel für die betrachtete Anzahl .... 2 Punkte
Umformungen, die $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ nennerfrei durch Binomialkoeffizienten ausdrücken .... 6 Punkte
Feststellung, dass Binomialkoeffizienten ganzzahlig sind .... 2 Punkte

Bei Vorgehen im Sinne der zweiten Lösung:
Einführung geeigneter kombinatorischer Hilfsgrößen, z. B. B_n und C_n .... 2 Punkte
Genauer Zusammenhang der Hilfsgrößen mit der zu betrachtenden Anzahl .... 6 Punkte

Zum Beispiel bei Argumentation mit B_n und C_n:

$C_n = (n + 1) \cdot B_n$ 3 Punkte
$C_n = n \cdot A_n$ 3 Punkte

Argument mit Teilerfremdheit .... 2 Punkte

Aufgabe 611213 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Bei einem Vorgehen entsprechend der 1. Lösung:
Erkenntnis, dass $a \in \{|x| + |y|, |y| - |x|\}$ und $b \in \{|x| + |y|, |x| - |y|\}$ .... 2 Punkte
Ausschluss von $a = b = |x| + |y|$ .... 1 Punkt
Ausschluss von $a = |y| - |x|$ und $b = |x| - |y|$ .... 1 Punkt

Angabe der Fallunterscheidung .... 2 Punkte

1. $a = |x| + |y|$ und $b = |x| - |y|$
2. $a = |y| - |x|$ und $b = |x| + |y|$

Herleitung der Lösungspaare $(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ oder $(x, y) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ .... 2 Punkte

Probe .... 1 Punkt

Vollständige Antwort .... 1 Punkt

Bei einem Vorgehen entsprechend der 2. Lösung:

Angabe der vollständigen Fallunterscheidung mit 4 Fällen .... 1 Punkt

Vollständige Behandlung der 4 Fälle .... 8 Punkte

Vollständige Antwort .... 1 Punkt

In den ersten drei der folgenden Zeilen erhält man die Punkte analog, wenn man eine Aussage beweist, die sich durch zyklische Vertauschung aus der entsprechenden genannten Aussage ergibt.

Kongruenz der Dreiecke AA_2U und CUC_1 .... 3 Punkte
Beweis einer der beiden Gleichungen $|A_2U| = |C_1U|$ oder $|AU| = |CU|$ .... 1 Punkt
Beweis von $|PA_1| = |PA_2|$ oder von $|AB_2| = |BA_1|$ .... 2 Punkte
Idee der zyklischen Addition .... 2 Punkte
Zum Ziel führende Umsetzung dieser Idee .... 2 Punkte