Klett Studienbücher Mathematik

herausgegeben von
Studiendirektor Helmut Coers, Prof. Arthur Engel,
Prof. Dr. Karl-Peter Grotemeyer, Prof. Dr. Werner Markwald
und Prof. Dr. Günter Pickert

Mathematik als pädagogische Aufgabe

von Prof. Dr. Hans Freudenthal

Band 1

Ernst Klett Verlag Stuttgart

8. Die Strenge

Croit-on que les „logiciens“ ont toujours procédé du général au particulier, comme les règles de la logique formelle semblaient les y obliger? Ce n'est pas ainsi qu'ils auraient pu étendre les frontières de la Science; on ne peut faire de conquète scientifique que par la généralisation.
H. Poincaré, C. R. 2ème Congrès Int. des math. Paris, 1900, 127.

En devenant rigoureuse, la science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde; elle oublie ses origines historiques; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent. Cela nous montre que la logique ne suffit pas; que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique.
H. Poincaré, C. R. 2ème Congrès Int. des math. Paris 1900, 123-4.

Stufen der Strenge

Die Mathematik hat vor allen anderen Geistesübungen jedenfalls den Vorzug, daß man da von einer Aussage sagen kann, ob sie richtig oder falsch ist. Ob eine mathematische Arbeit gut oder schlecht, wichtig oder unwichtig, originell oder trivial ist, ist schwerer zu entscheiden; aber über das Richtig und Falsch gibt es kaum Streitigkeiten. In der Physik ist so etwas schon viel schwieriger, sofern diese Physik nicht einfach Mathematik ist. Man verlangt, daß eine Theorie sich in der Wirklichkeit bestätigt, aber wenn das nicht der Fall ist, braucht die Theorie noch nicht falsch zu sein, man kann sie auch unzweckmäßig angewandt haben. In allen anderen Wissenschaften ist dies Zweckmäßigkeits-Kriterium oft relevanter als ein Kriterium der Wahrheit, von dem man nie recht weiß, wie man es hantieren soll. Das alles kommt daher, daß eben keiner Wissenschaft sich eine so stark deduktive Struktur aufprägen läßt wie der Mathematik. Man weiß in der Mathematik nicht nur ob ein Resultat richtig, sondern sogar – oder eigentlich nur – ob es richtig begründet ist. Das nennt man dann Strenge. Diesen Maßstab legen wir der Mathematik an, und wenn wir Mathematik unterrichten, soll sie streng sein.

Wer beurteilt es, ob die unterrichtete Mathematik streng ist? Der Lehrer, eventuell mit roter Tinte. Der Schüler soll ja erst *lernen*, was Strenge ist. Er lernt es, wie man mit elektrischen Schlägen eine Maus dressiert, so daß sie bei einem Klingelzeichen über eine Hürde springt. Der Vergleich hinkt, denn der Lehrer verteilt die rote Tinte nicht willkürlich, sondern gesetzmäßig, nach Gesetzen, die dem Schüler, der ja auch ein homo sapiens ist, irgendwie liegen, und deren Wirksamkeit durch die rote Tinte verstärkt wird. Als einer meiner Schüler seine erste Schulstunde gab, fragten sie ihn, ob man bei ihm auch das Vorzeichen ändern mußte, wenn man etwas auf die andere Seite des Gleichheitszeichens brachte, wie es der vorige Lehrer gefordert hatte. Neue Lehrer interviewt man über ihre Regeln; warum nicht auch den Mathematiklehrer?

So könnte man, auf der nullten Stufe verbleibend, mathematische Strenge lernen. Erziehung ist nicht nur menschlicher, sondern auch wirksamer als Dressur, und ein Kennzeichen der Erziehung ist die Freiheit. Es ist doch kaum zweifelhaft, daß der Schüler mathematische Strenge nicht anders lernen soll als Mathematik überhaupt: durch Nacherfindung. Und auch dies geschehe auf verschiedenen Stufen. Man kann Strenge üben, ohne zu wissen, was das ist, man kann von dem und jenen sagen, ob es streng sei, und man kann von der Mathematik im Großen sagen, was in ihr Strenge sei.

Das letzte ist garnicht so einfach, und viel Streitigkeiten über Strenge im Unterricht rühren davon her, daß manchen Leuten die Tatsache, daß das nicht so einfach ist, nicht aufgegangen ist. Über den Begriff der Strenge haben ja die Meinungen im Laufe der Geschichte geschwankt, und wenn man sich nicht blind stellt, sieht man sie immer noch schwanken. Bis vor einem Jahrhundert operierte man sehr anschaulich mit den Infinitesimalbegriffen, und das ging ausgezeichnet, eben weil es so anschaulich war. Dann wurde man kritischer und glaubte, es gehe nicht ohne Epsilontik. Die ist nun wieder auf dem Rückzug, und in einem oder zwei Jahrzehnten wird man die „große Entdeckung "machen, daß, was die Leute vor hundert Jahren trieben, durchaus streng ist, wenn man es nur recht versteht. Das Rechnen mit Differentialen ist ja auch schon wieder in Mode gekommen.

Als ich studierte, mußte eine strenge Analysisvorlesung für erste Semester mit einer Begründung der Zahlentheorie anfangen: die natürlichen, die ganzen, die rationalen, die reellen Zahlen. Heute geht man, ohne sich zu schämen, von der axiomatischen Definition des Systems der reellen Zahlen als eines geordneten oder topologischen Körpers mit gewissen Eigenschaften aus. Damals hätte man so einem vorgeworfen: „Woher weißt du denn, daß so etwas existiert?" Die Antwort, heute, lautet: „Und wenn du von den natürlichen Zahlen oder den Mengen ausgehst, woher weißt du dann, daß *die* existieren?" Natürlich wird man in einer höheren Vorlesung den „Existenzbeweis" (einen relativen Existenzbeweis) nachliefern, aber schon diese Anordnung zeigt eine bewußte didaktische Wahl. Um so erstaunlicher ist es, daß man, von Exaktheitsskrupeln gequält, nun auf der Schule das behandeln will, was man für erste Semester als zu schwer gestrichen hat: formale Theorien mit Existenzbeweisen der ganzen, rationalen, reellen Zahlen. Wenn man es streng machen will, muß man zu den ganzen Zahlen, oder gar zu den Mengen zurück – das ist der Systemglaube. Wer heutzutage behauptet, das sei der Gipfel der Exaktheit, ist nicht modern. Obendrein irrt er sich. Heute würde man eher sagen, daß die ganzen Zahlen problematischer als die reellen Zahlen sind, und die Mengen als die ganzen Zahlen. Zum Glück sind obenerwähnte Versuche mathematisch und didaktisch so daneben, daß sie wenige überzeugen werden.

Das nur nebenbei, denn didaktisch ist es nicht ausschlaggebend. Im Unterricht kommt es darauf an, ob der Schüler begreifen kann, warum Strenge ihm gebietet, die reellen Zahlen auf die rationalen zurückzuführen, die rationalen auf die ganzen, die ganzen auf die natürlichen Zahlen, die natürlichen Zahlen auf die Mengen, oder warum sie ihm vielleicht umgekehrt anheimstellt, das zu unterlassen? Solange man dem Schüler nicht erklären kann, was diese Entscheidung bedeutet, ist es nicht recht, ihm eine Theorie aufzuerlegen, deren Bedürfnis unklar ist.

Manche Zeitgenossen meinen, strenge Mathematik sei nur das, was man in axiomatischer Form mitteilen könne. Doch könnte man noch einen Schritt darüber hinausgehen und vollständige Formalisierung verlangen, d. h. die Mitteilung in einer nicht mehr wirklichkeitsbezogenen Sprache. Das wäre noch anspruchsvoller, aber schon mit der Forderung der Axiomatik schließt man einen großen Teil der Mathematik aus, die ein Nichtmathematiker lernen soll. Diese Zeitgenossen wissen es und geben es zu, und wollen es, weil unentbehrlich, als „experimentelle Mathematik" weiter unterrichten lassen, um inzwischen ihre mathematischen Hände in Unschuld zu waschen. Es ist die Zweiteilung der Mathematik, die uns schon früher begegnete, eine für Jupiter und die andere für den Ochsen. Die experimentelle Mathematik, d. h. die der freien Erkundung, ist ungleich wichtiger als die an, vom Lehrer oder Lehrbuchverfasser verordnete, Axiome gebundene, und es kann keine Rede davon sein, sie sei weniger streng. Es gibt Stufen der Strenge und es gibt dem Stoff angemessene Strenge; der Schüler hat sie zu durchlaufen und zu erwerben. Auch der erwachsene Mathematiker operiert nach verschiedenen Maßstäben der Strenge, und man ist einfach blind, wenn man glaubt, daß es nur eine Strenge gebe (die deren man sich gerade befleißigt), und daß alles darunter Schwindel und alles darüber Haarklauberei sei.

Wenn ein Sechsjähriger mir an den Fingern oder mit Steinchen $8+5$ vorrechnet, so ist das wohl keine Mathematik, aber es ist auf seiner Stufe streng. Wenn er weiter ist, so muß man da, soll es streng sein, verlangen, daß er es mit der Zäsur $8+2+3$ macht, denn da ist es eine implizite Regel, daß man nur (Gedächtnis-) Tafeln der Form $a+b = c$ mit $(1 \leq a < 10,\ 1 \leq b < 10,\ 2 \leq c \leq 10)$ verwendet. Noch später ist es streng, vom Resultat $8+5 = 13$ einfach Gebrauch zu machen, also (Gedächtnis-)Tafeln der Form $a+b=c$ mit $(1 \leq a \leq 10,\ 1 \leq b \leq 10,\ 2 \leq c \leq 20)$ zu verwenden. Hier spielen Lehrer und Schüler miteinander nach unbewußten Regeln, und das Befolgen dieser Regeln ist Strenge. Es sind Regeln, die niemand ausdrücklich erfunden hat, sie haben sich im Wechselspiel der Beteiligten natürlich ergeben; niemand, auch im allgemeinen der Lehrer nicht, wird sie ausdrücklich formulieren. Der Übergang von einem Regelsystem zum nächsten vollzieht sich vielleicht unstetig, aber doch natürlich: eines schönen Tages weigert der Schüler sich einfach, das alte Spiel weiter zu spielen.

Zu der Aufgabe auf S. 135 war die Begründung meines Sohnes (weil Hanna ein Mädchen ist) *nicht* streng – natürlich, die Lösung war sogar falsch, aber auch, wenn Hanna mit 75 Cent statt 50 Cent aus dem Laden käme, wäre sie nicht streng gewesen, denn es gibt ja auch Mädchen, die nicht mit Puppen spielen. Sie ist aber noch in anderem Sinn nicht streng. Sie verletzt die unbewußte Spielregel, daß in solchen Aufgaben Personennamen Variablen sind, daß es statt „Hanna“ ebensowohl „Rolf“ heißen könnte. (Das muß nicht so sein; es sollte auch Aufgaben geben, auf höherer Stufe, wo es wohl auf realistische Details ankommt.)

Lokales Ordnen

Wenn der Schüler konstruktiv entdeckt, daß man auf dem Kreis den Halbmesser genau sechsmal abtragen kann, und wenn er das damit erklärt, daß die Winkel im gleichseitigen Dreieck 60° sind, so ist das durchaus streng. Dem Edel-Mathematiker ist dies Argument natürlich ein Greuel. Denn was wird hier nicht alles vorausgesetzt! Wieviel Axiome braucht man nicht, um zu diesem Resultat zu kommen, ob man es nach Euklid, nach Hilbert oder mit linearer Algebra macht! Ganz richtig, aber auch das hat der Schüler erst zu lernen, und er lernt es nicht, indem man ihm ein Axiomensystem vorsetzt. Das wäre, didaktisch, ein ganz unstrenges Verfahren. Strenge dient dazu, zu überzeugen, und fertige Mathematik überzeugt nicht. Um in der Strenge fortzuschreiten, muß man an der Strenge, die man im Augenblick pflegt, erst einmal zweifeln. Ohne diesen Zweifel hat man wenig daran, sich höhere Maßstäbe von Strenge auferlegen zu lassen.

Natürlich soll der Schüler bei einer Aufgabe wie der des regelmäßigen Sechsecks sich fragen: „Was habe ich nun eigentlich vorausgesetzt?“ Wir wissen schon, daß der Schüler, wenn er das immer fortsetzt, sich schließlich in Ungreifbarem oder in Zirkelschlüssen verlieren muß. *Wir* wissen es. Der Schüler weiß es noch nicht. Er muß auch das erleben. Ohne solche Erlebnisse kann er jedenfalls den Sinn der Axiomatik nicht erfassen.

Bis dahin betreibt er, was man lokales Ordnen des Feldes nennen kann – es ist ein Begriff, der sich für das didaktische Verständnis insbesondere des Geometrie-Unterrichts als wichtig erweisen wird. Man analysiert die geometrischen Begriffe und Beziehungen bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, daß sie wahr sind. So räsonniert man immer in der Geometrie unseres Lebenraumes; niemals aus Axiomen, die viel zu weit weg liegen, sondern, nach einem verschwimmenden und sich verschiebenden Horizont von Sätzen hin, die jeweils als wahr angenommen werden. Das Feld wird auf kleine oder größere Strecken, aber nicht als Ganzes geordnet. So macht man es ja überall auch in der Physik, oder wo man sonst die Mathematik anwendet.

Logische Strenge

Es ist ganz unberechtigt, das unstreng zu nennen. Zum lokalen Ordnen gibt es eine ihm eigentümliche Strenge. Was einen Satz von seiner Umkehrung unterscheidet, was ein Zirkelschluß ist, der Unterschied zwischen „notwendig“ und „hinreichend“, zwischen einer Existenz- und einer All-Aussage – das ist beim lokalen Ordnen genauso klar wie beim globalen. Ich möchte sogar sagen, manche Aspekte der Strenge sind in der handelnden Mathematik klarer als in der fertigen. Insbesondere ist da viel klarer, was relevant und irrelevant ist. In der fertigen Mathematik gelten solche Aussagen wie „Dreiecke mit vier Eckpunkten sind gleichseitig“, die man in der handelnden mit Recht als absurd betrachtet; in der fertigen Mathematik darf man auf die Frage, warum $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ sei (wenn sie da überhaupt gestellt werden kann) auch „weil die Erde rund ist“ antworten, denn $p \rightarrow q$ ist immer wahr, sobald q wahr ist. In der handelnden Mathematik gibt es einen ganz anderen Begriff der Strenge: Die Antwort auf ein „warum?“ ist strenge Mathematik, wenn sie relevant ist. Die Regeln der formalen Logik sind als Kennzeichen der Strenge da nicht einmal hinreichend. Prüfungsfragen wie: „Warum haben Sie das so definiert?“, „Kann man das auch ohne Verwendung von ... beweisen?“, „Wo haben Sie diese Methode früher angewandt?“ kann man im Rahmen einer formalen Logik nicht einmal stellen, aber es muß immer wieder betont werden, daß sie ebenso zur Mathematik gehören wie das Ausrechnen eines Integrals oder der Beweis einer Formel, denn das vergessen wir über aller fertigen Mathematik so gerne. Zur Beantwortung solcher Fragen gehört auch wieder eine eigentümliche Art der Strenge. Was hier Strenge ist, hat noch niemand bis jetzt zu formulieren versucht. In der Logik der handelnden Wissenschaft befinden wir uns alle noch auf der nullten Stufe. Das ist nicht schlimm. Im Gegenteil. Desto geringer ist die Gefahr, daß wir die Logik der handelnden Mathematik als fertige unterrichten. Aber ab und zu sollten wir es uns wohl klar machen, daß auch dies Mathematik ist.

Die Trennung von Mathematik und Wirklichkeit

Man hat mir in Diskussionen entgegnet: „Einmal muß der Schüler streng und klar zu unterscheiden lernen zwischen mathematischer Theorie und realer Welt.“ Ich habe geantwortet: Ganz recht und – ganz falsch. Ich meine, ganz recht, wenn es auf den Unterricht in mathematischer Strenge abzielt, und ganz falsch, wenn man damit das Unterrichten unbezogener Mathematik verteidigt. Ganz recht, wenn der Nachdruck auf dem „Lernen“ liegt, und ganz falsch, wenn man damit das Lehren fertiger Axiomatik verteidigt.

Die Trennung zwischen mathematischer Theorie und realer Welt setzt schon ein, wenn der Schüler rechnen lernt, ich meine beziehungsloses Rechnen. Ja, auch das muß geübt werden. Die Rechenroutine erfordert, daß der Schüler auch vergessen kann, daß 7 in den realen Welt aus sieben realen Einheiten besteht. Der Schüler lernt ein mathematisches Gebiet einzuklammern, damit es, unberührt von der Welt, besser funktioniere. Und überhaupt, es ist wichtig zu erkennen, daß es Aussagen gibt, deren Wahrheit weder vom Wetter noch vom Wohlgefallen abhängt. Aber glücklicherweise lernt der Schüler auch, wie er ausklammert, wenn er Rechenaufgaben des täglichen Lebens lösen soll oder die Funktionen einer Rechenmaschine verstehen will.

So habe ich es nicht gemeint – entgegnet man mir. Ich meinte, daß er schließlich auch eine axiomatische Theorie lernen muß, die wasserdicht von der Welt getrennt ist. Warum – antworte ich. Man kann die Trennung von mathematischer Theorie und realer Welt ja viel besser früh und an einfachen Beispielen erfahren als spät und an äußerst raffinierten. Aber die einfachen Beispiele wie die ganzen Zahlen – entgegnet man mir – sind ja noch viel zu sehr der realen Welt verhaftet, man kann die 7 ja garnicht von den 7 Tagen der Woche und den 7 Zwergen loslösen. Und dann antworte ich: Kann man es denn mit den Mengen oder den Abbildungen oder den logischen Symbolen wohl?

Sicher muß der Schüler lernen, die Mathematik in der realen Welt einzuklammern – das ist das Wesen der Strenge – aber er muß auch lernen, daß es eine Illusion ist, glauben zu wollen, daß das wasserdichte Klammern seien. Denn lernt er nicht, an der Wasserdichtheit der Klammern zu zweifeln, so lernt er auch nicht, sie zu verbessern. Ich sagte es schon, die in der Umgangssprache formulierte Axiomatik ist durchaus nicht das höchste der Gefühle; die Umgangssprache ist ja das reinste Löschpapier. Doch wird niemand eine vollständig formalisierte Mathematik auf die Schule bringen wollen. Hinzu kommt: handelnde Mathematik ist nicht eingeklammert und nicht einzuklammern, und wenn man mit eingeklammerter Mathematik etwas anfangen will, klammert man sie aus, und auch das muß man lernen.

Unsere Schüler lieben das – entgegnet man mir. Sie sind so in axiomatischen Systemen trainiert, sie wollen nichts anderes mehr, sie lehnen die Halbstrenge ab, sie wollen sich in Systemen bewegen, wo es keinen Zweifel mehr gibt, wo jedes Ja ja ist und jedes Nein nein. Desto schlimmer – sage ich. Bedenken Sie wohl, was Sie tun! Einer auf die Hundert Ihrer Schüler soll vielleicht Mathematiker werden, neunundneunzig sollen die Mathematik anwenden, und das in einer Welt, die systemlos ist, in der es Zweifel gibt, und in der es oft kein klares Ja und Nein gibt. Sie spiegeln Ihren Schülern ja etwas vor; Sie führen sie irre. Ihre Schüler lieben das? Sie lieben auch die Divisionen, die aufgehen, die scheußlichen Brüche und das Differenzieren, wenn man es ihnen nur so beibringt. Aber Erziehen heißt: ihnen die *rechte* Liebe beibringen.

Eine Aufgabe

Während ich dies schreibe, läutet das Telefon. Ich habe gestern Abend in lustiger Gesellschaft ein Problem aufgegeben. Einer ruft mich an, daß er es gelöst hat. Es lautete:

Gegeben ein endlicher gerichteter Graph („lattice“) mit *einem* tiefsten und *einem* höchsten Knoten (die beide verschieden sind). Zwei Leute spielen ein Spiel. Sie setzen abwechselnd auf die Knoten des Graphen. Wenn ein Knoten besetzt ist, sind alle niedrigeren verboten. Wer gezwungen ist, den höchsten Knoten zu besetzen, hat verloren.
Man beweise, daß der Anfänger eine Gewinnstrategie hat.
Als ich das Problem gestern erzählte, fragte noch jemand sicherheitshalber, was ein gerichteter Graph sei, auch was das „verboten“ bedeute. Niemand fragte, was „tiefst“ und „höchst“ sei, was mit „Spiel“ und mit „abwechselnd“ gemeint sei, was „anfangen“, „setzen“, „gewinnen“ und „verlieren“ bedeute, und was ich mit einer Gewinnstrategie meinte. Das Problem ist eben nicht eingeklammert. Wir können das Spiel ja mit jedem realen Graphen real spielen. Und wir spielen es, wenn wir das Problem lösen wollen; wir versetzen uns in die Situation. Keine Axiomatik hilft uns, wenn wir es lösen wollen, kein Einklammern, im Gegenteil, wir können es nur in der realen Welt verstehen. Es läßt sich *streng* lösen – so streng, daß es vortrefflich demonstriert, was Strenge ist.
Bitte, ich warte auf den Erzieher, der mich anruft: *meine* Schüler lieben *diese* Probleme.