1pt 0.4pt

Axiome

Definition 0.1 (Inzidenzstruktur). *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge und $\mathcal{G}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathcal{P}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzstruktur, wobei wir die Elemente aus $\mathcal{P}$ Punkte und die Elemente aus $\mathcal{G}$ Linien bzw. Geraden nennen.*

Definition 0.2 (Affine Ebene). *Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, welche die folgenden Axiome erfüllt, nennen wir eine affine Ebene.*

(V) Verbindungsgeradenaxiom
Zu zwei verschiedenen Punkte A, B existiert genau eine Verbindungsgerade, sie bezeichnen wir mit $\overline{AB}$.

(P) Parallelenaxiom
Zu jeder Geraden g und jedem Punkt A, der nicht auf g liegt, existiert genau eine Gerade a durch A, mit $a \cap g = \emptyset$.

(D) Dreiecksaxiom
Es existiert ein echtes Dreieck.

Definition 0.3 (Kongruenz-Struktur). *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge. Eine Relation Kongruenz (im Zeichen $\equiv$) auf der Menge der Strecken, also $\equiv \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \times (\mathcal{P} \times \mathcal{P})$, nennen wir genau dann eine Kongruenz-Relation, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

i) $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist.

ii) für alle verschiedenen Punkte A, B gilt: $AA \equiv BB \not\equiv AB \equiv BA$.

Das Paar $(\mathcal{P}, \equiv)$ nennen wir eine Kongruenz-Struktur.

Axiom 0.1 (Rauten-Axiom). *Sei $(\mathcal{P}, \equiv)$ eine Kongruenzstruktur. Es gibt eine Raute $ABCD$ und ein Punkt M mit $MA \equiv MC$ und $MB \equiv MD$. Kurz ausgedrückt: Es gibt eine Raute mit Mittelpunkt.*

Axiom 0.2 (Orthogonalitätsaxiom). *Zu jeder Geraden g und jedem Punkt A existiert genau eine Gerade h durch A so, dass h senkrecht zu g ist. Wir schreiben dann $h \perp g$. Diese Gerade nennen wir das Lot von A auf g.*

Axiom 0.3 (Parallelogrammregel). *Für jedes echte Viereck $ABCD$ gilt: Wenn sich die gegenüberliegenden Seitenlinien nicht schneiden, dann sind die gegenüberliegenden Seiten kongruent zueinander.*
Also $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset = \overline{BC} \cap \overline{DA} \Rightarrow AB \equiv CD$ und $BC \equiv DA$

Axiom 0.4 (Mittellotregel). *Für alle echten Strecken AB, CX mit $CA \equiv CB$ gilt:*

$$XA \equiv XB \quad \Leftrightarrow \quad \overline{CX} \perp \overline{AB}$$

Definition 0.4 (Euklidische Ebene).
Eine Struktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ nennen wir genau dann eine euklidische Ebene, wenn gilt:

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ *ist eine Inzidenzstruktur*
- $(\mathcal{P}, \equiv)$ *ist eine Kongruenzstruktur*
- $(\mathcal{G}, \perp)$ *ist eine Orthogonalitätsstruktur*

wobei die folgenden Axiomen gelten

- $(V), (P), (D)$, *also die Axiome einer affinen Ebene*
- $(R), (O)$, *die so genannten Axiome der Konstruktion*
- $(PR), (MR)$, *die so genannten Axiome des Schließens*

Fundamentalsätze

Satz 0.1 (Satz vom vierten Parallelogrammpunkt). *In jedem echten Dreieck ABC gibt es genau einen Punkt X derart, dass $ABCX$ ein Parallelogramm ist.*

Satz 0.2 (Verträglichkeit von $\perp$ und $\|$). *Für alle Geraden g, h, h' mit $h \perp g$ gilt:*

$$h' \perp g \;\Leftrightarrow\; h' \parallel h$$

Satz 0.3 (Mittelparallelen-Satz). *Sei ABC ein echtes Dreieck, L der Mittelpunkt von BC und M der Mittelpunkt von CA. Dann ist die Verbindungsgerade von M, L parallel zur Seitenlinie durch A und B, also $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$.*

Satz 0.4 (Umkehrung des Mittelparallelen-Satzes). *Sei ABC ein echtes Dreieck, M der Mittelpunkt von CA und sei g die Parallele zu $\overline{AB}$ durch den Punkt M. Dann schneidet g die Gerade $\overline{BC}$ in einem Punkt L und dieser ist Mittelpunkt von BC.*

Satz 0.5 (Der Diagonalen-Satz). *Für jedes echte Viereck $ABCD$ gilt*
$ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Strecken AC und BD denselben Mittelpunkt besitzen.

Satz 0.6 (Der Satz von Thales). *Sei ABC ein echtes Dreieck und M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann gilt:*

$$ABC \text{ ist rechtwinklig (in } C) \quad \Leftrightarrow \quad MA \equiv MC.$$

Satz 0.7. *(Das Mittellot-Prinzip) Für alle Punkte A, B mit $A \neq B$ ist $A \oplus B$ das Mittellot von AB.*

Satz 0.8. *Jede Punktspiegelung ist längentreu und richtungstreu.*

Satz 0.9. *Für jede Gerade g gilt: $\sigma_g = \{(X, Y) \mid X \oplus Y = g\} \cup id_g$*

Satz 0.10 (Kreuz-Geraden). *Seien g, h Geraden mit $g \perp h$ und M ihr Schnittpunkt. Dann ist $\sigma_g \sigma_h$ die Punktspiegelung mit Zentrum M, also $\sigma_g \sigma_h = \pi_M$*

Satz 0.11. *Jede Geradenspiegelung ist längentreu, aber i.A. nicht richtungstreu.*

Satz 0.12 (Erhaltungseigenschaften von Bewegungen). *Für jede Bewegung β gilt*

a) β ist geraden-treu, d.h. für jede Gerade g ist $g\beta := \{X\beta | X \in g\}$ wieder eine Gerade.

b) β ist senkrecht-treu, d.h. für alle Geraden g, h gilt: $g \perp h \Rightarrow g\beta \perp h\beta$

Satz 0.13 (Zweideutigkeit der Winkelhalbierenden). *Seien a, b nicht-parallele Geraden und w eine Winkelhalbierende von a, b. Dann haben a, b noch genau eine weitere Winkelhalbierende, und diese ist senkrecht zu w.*

Satz 0.14 (Charakterisierung der Winkelhalbierenden). *Seien a, b nicht-parallele Geraden mit Schnittpunkt S.Dann gilt für jeden Punkt X mit $X \notin a$ und $X \notin b$:*

$$\overline{SX} \text{ ist eine Winkelhalbierende von } a,b \quad \Leftrightarrow \quad XX_a \equiv XX_b$$

Satz 0.15 (Beweglichkeitsaussagen). *a) Zu je zwei kongruenten Strecken gibt es ein Produkt (Hintereinanderausführung) zweier Geradenspiegelungen, das die eine Strecke in die andere Strecke überführt.*

b) Sind $AB, A'B'$ echte Strecken mit $AB \equiv A'B'$ und $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, so gibt es eine richtungstreue Bewegung, die AB in $A'B'$ überführt.

Satz 0.16 (Bewegungen von Dreiecken). *Für alle Dreiecke $ABC, A'B'C'$ gilt:*
$ABC \equiv A'B'C' \Leftrightarrow$ es gibt eine Bewegung, die ABC in $A'B'C'$ überführt.

Satz 0.17 (Kongruenzsatz für parallele Dreiecke). *Es seien $ABC, A'B'C'$ echte Dreiecke mit paarweise zueinander parallelen Seitenlinien, d.h. $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} \parallel \overline{C'A'}$. Dann folgt aus $AB \equiv A'B'$ bereits $ABC \equiv A'B'C'$.*

Satz 0.18. *Es gilt*

a) $sD \subseteq Dr$

b) $sT \subseteq Tr$

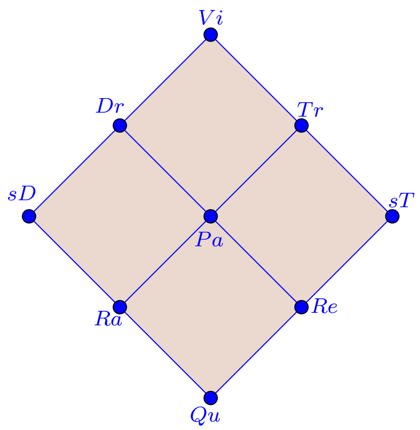
c) $Dr \cap Tr = Pa$

d) $sD \cap Pa = Ra$

e) $sT \cap Pa = Re$

f) $Ra \cap Re = Qu$

Satz 0.19 (Haus der Vierecke). *Eine übersichtliche Darstellung der Inklusionsbeziehungen bietet das folgende Ordnungs-Diagramm*



Aufgrund der Schnittbeziehungen gelten weitere Schnittgleichungen. Man stellt dabei fest, dass alle Durchschnitte wieder im Haus der Vierecke auftreten.

Satz 0.20. *Das Haus der Vierecke ist gegen „Durchschnitt“ abgeschlossen. Es ist also ein so genannter Mengenverband.*

Satz 0.21. *Für jedes echte Viereck $ABCD$ gilt:*

a) $ABCD \in Pa \quad \Leftrightarrow \quad AC, BD$ *haben denselben Mittelpunkt*

b) $ABCD \in Ra \quad \Leftrightarrow \quad AC, BD$ *haben denselben Mittelpunkt,* $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

c) $ABCD \in Re \quad \Leftrightarrow \quad AC, BD$ *haben denselben Mittelpunkt,* $AC \equiv BD$

d) $ABCD \in Qu \quad \Leftrightarrow \quad AC, BD$ *haben denselben Mittelpunkt,* $\overline{AC} \perp \overline{BD}, AC \equiv BD$

Satz 0.22. *a) Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M, dann ist $M \notin k$.*

b) Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M und $B \in k$, so ist $k = k(M, B)$.

c) Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt sind entweder gleich oder fremd.

d) Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M und $B \in k$, so liegt auch der Verdopplungspunkt von BM auf k.

e) Jeder Kreis enthält mindestens vier Punkte.

Satz 0.23. *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M, und seien $A, B \in k$ mit $A \neq B$. Dann geht das Mittellot von AB durch M.*
Die Strecke AB nennt man auch eine Sehne *von k.*

Satz 0.24. *a) Zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten schneiden sich in höchstens zwei Punkten.*

b) Zwei verschiedene Kreise schneiden sich in höchstens zwei zwei Punkten.

Satz 0.25. *Jeder Kreis hat genau einen Mittelpunkt.*

Satz 0.26. *Sei AB eine echte Strecke mit Mittelpunkt M. Dann ist die Menge $\{X \mid ABX \text{ ist rechtwinklig}\} \cup \{A, B\}$ ein Kreis, nämlich der Kreis $k(M, A)$. Dieser Kreis wird der* Thaleskreis über AB *genannt.*

Satz 0.27 (Berührverhalten von Kreisen)**.** *a) Seien k, l Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten M, L und $B \in k \cap l$. Dann gilt: k, l berühren sich $\Leftrightarrow B \in \overline{ML}$*

b) Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und g eine Gerade und sei $B \in k \cap g$. Dann gilt: k, g berühren sich $\Leftrightarrow \overline{MB} \perp g$.

Satz 0.28. *Jedes echte Dreieck hat genau einen Umkreis. Die Mittellote der Seiten des Dreiecks gehen durch den Umkreismittelpunkt.*

Satz 0.29. *a) Ein Trapez hat genau dann einen Umkreis, wenn es symmetrisch ist.*

b) Ein Parallelogramm hat genau dann einen Umkreis, wenn es ein Rechteck ist.

c) Eine Raute hat genau dann einen Umkreis, wenn sie ein Quadrat ist

Satz 0.30 (Seitenmittendreieck)**.** *Sei ABC ein echtes Dreieck und KLM sein Seitenmittendreieck. Dann gilt*

a) KLM ist echt.

b) Die Vierecke $KLMB$, $LMKC$ und $MKLA$ sind Parallelogramme.

c) Die Mittellote von ABC sind die Höhenlinien von KLM.

Satz 0.31. *Jede echte Strecke hat höchstens einen 2:1 Teilungspunkt. Die Existenz kann leider nicht gefolgert werden (vgl. 9-Punkte Modell)*

Satz 0.32. *Sei ABC ein echtes Dreieck. Schneiden sich zwei Seitenhalbierendenlinien in einem Punkt S, so geht auch die dritte Seitenhalbierendenlinie durch den Punkt S, und S ist der 2:1 Teilungspunkt jeder Seitenhalbierenden. S heißt auch der Schwerpunkt des Dreiecks ABC.*

Satz 0.33. *Folgende Aussagen sind äquivalent zueinander.*

(i) Es gibt eine echte Strecke deren Mittelpunkt zugleich Verdopplungspunkt ist.

(ii) Bei jeder echten Strecke ist der Mittelpunkt zugleich Verdopplungspunkt.

(iii) In jedem echten Dreieck sind die Seitenhalbierendenlinien parallel zueinander.

(iv) Es gibt ein echtes Dreieck indem die Seitenhalbierendenlinien parallel zueinander sind.

Gilt eine (und damit alle) Aussagen, so nennt man die vorliegende Ebene von der Charakteristik 3.

Satz 0.34. *Sei ABC ein echtes Dreieck, w eine Winkelhalbierende bei A und v eine Winkelhalbierende bei B. Dann gilt:*

(a) w und v schneiden sich in einem Punkt W mit $W \neq C$

(b) $\overline{CW}$ *ist eine Winkelhalbierende bei C.*

(c) W ist der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Seitenlinien berührt, eines sogenannten Berührkreises von ABC.

Satz 0.35 (Der Umkreishöhensatz)**.** *Sei ABC ein echtes Dreieck und H der Schnittpunkt der Höhenlinien von A und von B aus. Dann gilt*

a) Die Höhenlinien von C aus geht auch durch H. H heißt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

b) Ist M der Mittelpunkt von AB, so haben HM und CU denselben Verdopplungspunkt. Dieser liegt also auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Satz 0.36 (Der Satz von Euler)**.** *Sei* ABC *ein nicht-gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt* S*. Dann ist* S *auch der 2:1 Teilungspunkt von* HU*. Insbesondere liegen die drei Punkte* H, S *und* U *auf einer Geraden, der so genannten Eulergeraden des Dreiecks.*

Satz 0.37 (Der Satz von Feuerbach)**.** *Sei* ABC *ein echtes Dreieck und* KLM *sein Seitenmittenviereck. Der Umkreis* f *von* KLM *heißt der Feuerbachkreis von* ABC*. Er geht auch durch die Höhenfußpunkte von* ABC*.*

Satz 0.38 (Der 2-Kreise-Satz)**.** *Sei* ABC *ein gleichschenkliges Dreieck und* $Z \in g := \overline{AB} \setminus \{A, B\}$*. Dann liegen die Umkreismittelpunkte der Dreiecke* CAZ *und* CBZ *spiegelbildlich bezüglich der Geraden* $\overline{CZ}$*.*

Satz 0.39. *Sei* ABC *ein nicht-gleichschenkliges Dreieck. Sei* m *das Mittellot von* AB *und* w *eine Winkelhalbierende bei* C*. Dann schneiden sich* m *und* w *in einem Punkt des Umkreises von* ABC*.*