

ÜBUNG 9

Abgabe der Bearbeitungen erst am Freitag, den 17. Mai bis 12 Uhr

AUFGABE 1

Welche der folgenden Mengen sind im 9-Punkte Modell Kreise?

$\square\{A, B, C, D\}$ $\square\{A, B, E, F\}$ $\square\{C, D, E, I\}$ $\square\{A, F, H, D\}$ $\square\{I, H, G, D\}$

AUFGABE 2

Diese Aufgabe bezieht sich nur auf das 9-Punkte Modell (siehe unten).

a) Man gebe folgende Kreise an:

- | | |
|--|--|
| <p>i) Den Kreis um C durch F, also
$k_1 := k(C, F)$.</p> <p>ii) Den Thaleskreis des Dreiecks ACE.</p> | <p>iii) Den Umkreis des Dreiecks CDH.</p> <p>iv) Ist ACHG ein symmetrisches Trapez?
Wenn ja, gebe man seinen Umkreis an.</p> |
|--|--|

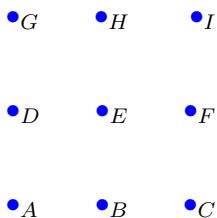
b) Wieviele verschiedene Kreise gibt es eigentlich?

c) Gibt es drei Kreise, die sich gegenseitig berühren?

[es gibt wohl keinen, der diese Frage nur mit *Ja* oder *Nein* beantwortet ...]

d) Man gebe alle Tangenten t_i am Kreis $k := k(F, H)$ an.

e) Man zeige: Berührt ein Kreis zwei Geraden g, h , dann gilt $g \parallel h$ oder $g \perp h$.



Sei nun $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ eine euklidische Ebene.

AUFGABE 3

Sei k eine Kreis und seien g, h verschiedene Geraden durch den Mittelpunkt von k . Dann gilt für alle $A, B \in g \cap k$ und $C, D \in h \cap k$: $AC \equiv BD$ und $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

AUFGABE 4

Man zeige:

Sind g, h Tangenten eines Kreises k die sich in einem Punkt $S \notin k$ schneiden und die k in A bzw. B berühren, so gilt $SA \equiv SB$.

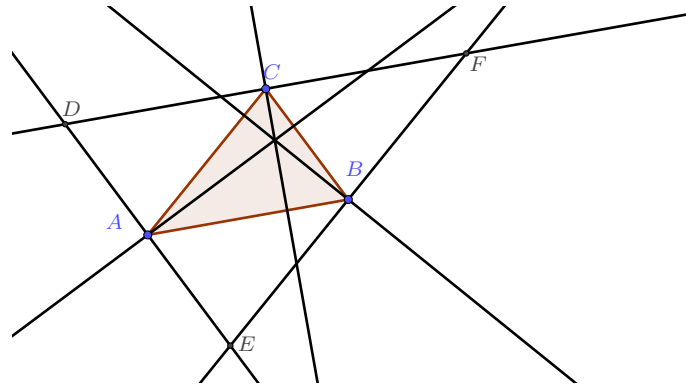
AUFGABE 5

Man zeige für jeden symmetrischen Drachen $ABCD$ die folgende Äquivalenz:

$$ABCD \text{ hat einen Umkreis} \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC} \text{ und } \overline{CD} \perp \overline{DA}$$

AUFGABE 6

Es folgt nun ein (fast zu) ausführlicher Beweis mit 22 Zeilen des bereits bekannten Satzes, dass sich die drei Höhenlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, allerdings ist die Reihenfolge der einzelnen Beweisschritte etwas durcheinander geraten. Bringen Sie die Schritte in eine sinnvolle Reihenfolge (es sind gewisse Variationen möglich). Zur Hilfe sei folgende Skizze gegeben:



Satz. Die drei Höhenlinien eines echten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

- (1.) für die gilt: $AE \equiv AD$
- (2.) damit schneiden sich in jedem echten Dreieck die drei Höhenlinien in einem Punkt
- (3.) also gilt $h_A = D \oplus E$, $h_B = E \oplus F$, und $h_C = F \oplus D$
- (4.) seien $D \in g \cap h$, $E \in h \cap i$, und $F \in g \cap i$ die jeweiligen Schnittpunkte
- (5.) sei h die Parallele durch A zur Geraden durch B und C
- (6.) da ABC echt ist, schneiden sich g und h , h und i , und g und i
- (7.) da $h \parallel \overline{CB}$ und $A, D \in h$ und $g \parallel \overline{AB}$ und $C, D \in g$ gilt, folgt $ABCD$ ist ein Parallelogramm
- (8.) da sich nach einem Satz aus der Vorlesung die drei Mittelsenkrechten der Seiten in einem Punkt,
- (9.) damit sind die Höhenlinien die Mittelsenkrechten des Dreiecks DEF
- (10.) also gilt auch hier mit dem Diagonalensatz $CB \equiv AE$
- (11.) insgesamt hat man paarweise verschiedene Punkte E, A, D , die allesamt auf einer Geraden, nämlich h , liegen
- (12.) sei ABC ein echtes Dreieck
- (13.) also ist A der Mittelpunkt der echten Strecke ED

- (14.) sei g die Parallele durch C zur Geraden durch A und B
- (15.) also sind die drei Höhenlinien h_A, h_B, h_C die drei Mittelsenkrechten von DE, EF und FD
- (16.) vollkommen analog erhält man, dass auch B der Mittelpunkt der echten Strecke EF und C der Mittelpunkt der echten Strecke DF ist
- (17.) also ist ABC das Seitenmittendreieck von DEF
- (18.) mit dem Diagonalsatz folgt $CB \equiv AD$
- (19.) seien h_A, h_B, h_C die Höhenlinien von ABC
- (20.) sei i die Parallele durch B zur Geraden durch A und C
- (21.) nämlich dem Umkreismittelpunkt, schneiden, schneiden sich auch die drei Höhenlinien des Dreiecks ABC in einem Punkt
- (22.) analog folgt $EBCA$ ist ein Parallelogramm

Meine Reihenfolge

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------