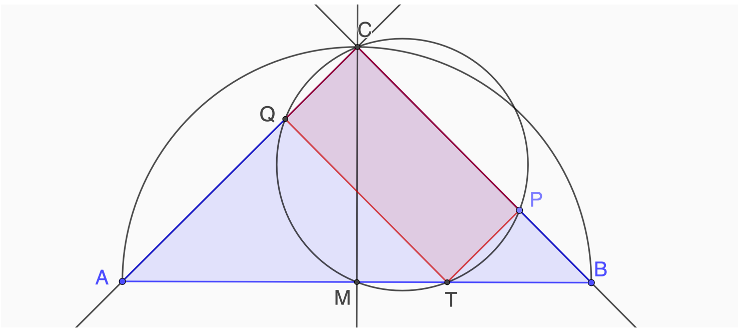
Übung 8

Aufgabe 1

Es sei ABC ein Dreieck in einer euklidischen Ebene, das sowohl gleichschenklig als auch rechtwinklig sein möge. Zudem seien $M \in \overline{AB}$ der Mittelpunkt von AB und $P \in \overline{BC}$ von C verschieden. Der Umkreis k des Dreiecks PCM möge die Seitenlinie $\overline{CA}$ neben C in einem weiteren Punkt Q schneiden. Zu guter Letzt sei T der vierte Parallelogrammpunkt des Dreiecks PCQ.

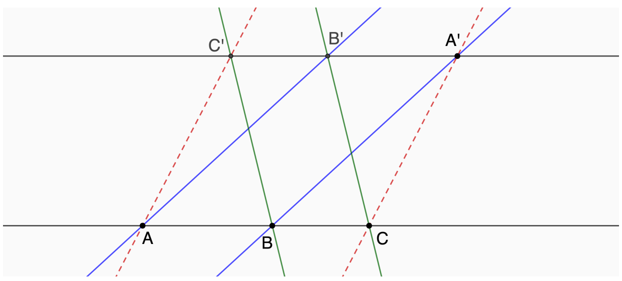
a) Man zeige, dass T auf k liegt.

b) Man zeige, dass T auf $\overline{AB}$ liegt.



Aufgabe 2

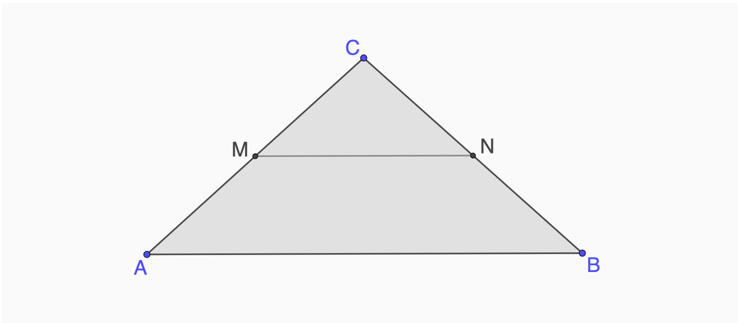
Es seien g und g' zwei verschiedene, aber parallele Geraden in einer euklidischen Ebene. Auf der Geraden g liegen drei paarweise verschiedene Punkt A, B und C, auf der Geraden g' liegen drei paarweise verschiedene Punkte A', B' und C'. Angenommen, es gelte $\overline{AB'} \parallel \overline{A'B}$ und $\overline{BC'} \parallel \overline{B'C}$. Man beweise, dass dann auch $\overline{CA'} \parallel \overline{C'A}$ gilt.



AUFGABE 3

a) In einer euklidischen Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ sei ein echtes Dreieck ABC gegeben. Es seien M und N die Mittelpunkte von AB bzw. BC. Wir betrachten die folgende Aussage, die wir beweisen möchten, gerade weil Studierende sie oft stillschweigend in ihren Lösungen verwenden:

Lemma: Wenn $AC \equiv BC$ gilt, dann gilt auch $MC \equiv NC$.



Man beweise das Lemma.

Tipp: Man betrachte die Spiegelung σ_l an der Geraden $l = A \oplus B$.

b) Man gebe an, ob die Aussagen über Vielecke in einer euklidischen Ebene wahr oder falsch sind.

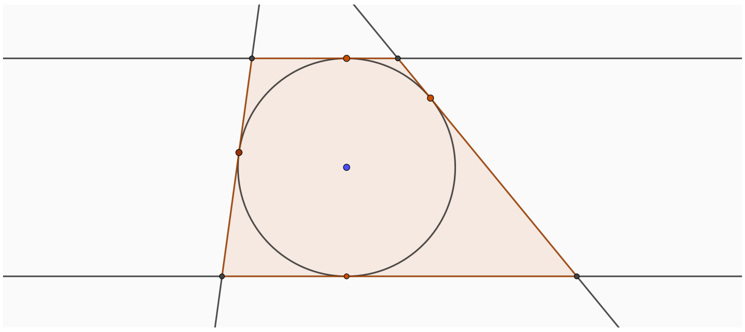
(i) Es gilt auch die Umkehrung des Lemmas.

(ii) Es sei $SPUK$ ein echtes Viereck. Wenn $SP \equiv UK$ und $\overline{SP} \parallel \overline{UK}$ gelten, dann muss $SPUK$ ein Parallelogramm sein.

(iii) Seien $FAKE$ und $F'A'K'E'$ zwei echte Vierecke. Angenommen, es gelten $\overline{FA} \parallel \overline{F'A'}$ und $\overline{AK} \parallel \overline{A'K'}$ und $\overline{KE} \parallel \overline{K'E'}$ und $\overline{EF} \parallel \overline{E'F'}$ sowie $FA \equiv F'A'$. Dann folgt $AK \equiv A'K'$.

AUFGABE 4 [Aus einer Klausur von 2022]

Gegeben sei eine euklidische Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$.
Einem Kreis k mit Mittelpunkt M sei ein Trapez derart umbeschrieben, dass jede Trapezseitenlinie den Kreis k berührt.



Man zeige, dass dann $\overline{BM} \perp \overline{MC}$ gilt.

AUFGABE 5 [Aus einer Klausur von 2024]
Es sei ACB ein rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt der Seite BC. Sei k ein Kreis mit $k := k(M, C)$.
Sei X der (zweite) Schnittpunkt von k mit der Seitenlinie $\overline{AC}$. Die Tangente an den Kreis k in X möge $\overline{AB}$ in einem Punkt Y schneiden.

a) Man fertige eine passende Skizze an.

b) Man zeige, dass dann $\overline{AC} \parallel \overline{MY}$ gilt.