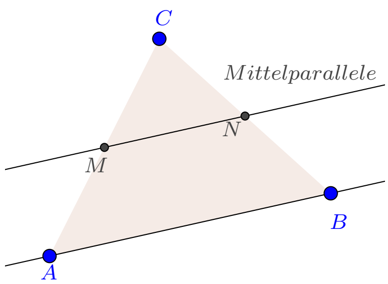
ÜBUNG 5

In der letzten Vorlesung am Mittwoch haben wir beim Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit des Verdopplungspunktes die Umkehrung des Satzes über die Mittelparallele im Dreieck benutzt, also die Rückrichtung „ $\Leftarrow$ “ des nachfolgenden Satzes.

AUFGABE 1
Man zeige nun die noch fehlende Rückrichtung vom:

Satz (*Mittelparallelensatz*).
Sei ABC ein echtes Dreieck und sei M der Mittelpunkt der Strecke AC. Sei $N \in \overline{BC}$. Dann gilt: Der Punkt N ist genau dann der Mittelpunkt der Strecke BC, wenn die Verbindungsgerade von M und N parallel zur Seitenlinie von A und B ist, in formalisierter Form

$$N \in \overline{BC} \wedge BN \equiv NC \quad \Leftrightarrow \quad \overline{MN} \parallel \overline{AB}$$



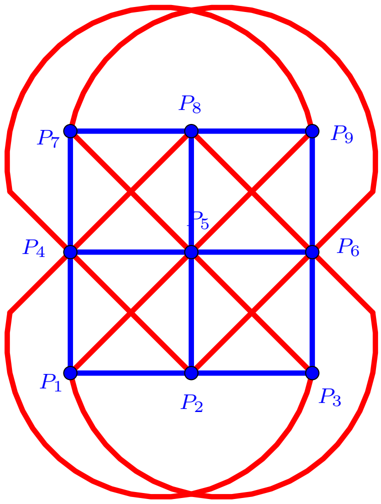
Im weiteren Verlauf dieser Übung geht es um die Schaffung einer weiteren affinen Ebene, die sogar zur euklidischen Ebene weiter entwickelt wird.
Sie kennen bereits das affine Minimalmodell der Ordnung $n = 2$, die zugehörige Inzidenzstruktur umfasst genau 4 Punkte und 6 Geraden. Im letzten Übungsblatt wurden in einer Aufgabe gewisse Anzahlen für affine Ebenen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ hergeleitet. So muss z.B. eine affine Ebene der Ordnung 3 genau $3^2 = 9$ Punkte und $3^2 + 3 = 12$ Geraden besitzen.
Wir erinnern uns in diesem Zusammenhang an eine wunderbare Einsicht. Das Paar $(\mathbb{Z}_{13}, \mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13}))$ ist eine Inzidenzstruktur, allerdings gibt es zu viele Punkte.
Betrachten Sie nun das Paar $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \mathcal{D}, \mathcal{G})$, wobei wieder $\mathcal{D} := \{[0], [1], [3], [9]\}$, aber jetzt $g(A) := \{D + A \mid D \in \mathcal{D}\} \setminus \mathcal{D}$ gilt. Schließlich sei $\mathcal{G} := \{g(A) \mid A \in \mathbb{Z}_{13} \setminus \{[0]\}\}$.

AUFGABE 2 [Das 9-Punkte Modell]

a) Man gebe konkret die in der Inzidenzstruktur $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \mathcal{D}, \mathcal{G})$ befindlichen Mengen an.

b) Man überprüfe entlang der Axiome, dass diese Inzidenzstruktur $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \mathcal{D}, \mathcal{G})$ tatsächlich eine affine Ebene ist.

Nun wollen wir die in Aufgabe 1 neu erschaffende affine Ebene (das 9-Punkte Modell) $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) := (\mathbb{Z}_{13} \setminus \mathcal{D}, \mathcal{G})$ postwendend zur euklidischen Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ weiter entwickeln (sozusagen: das euklidische Minimalmodell entwickeln).
Wir brauchen also eine passende Kongruenzrelation $\equiv$ auf der Menge der Strecken und eine Senkrechtrelation $\perp$ auf der Menge der Geraden.
Eine Veranschaulichung von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ könnte nun so aussehen, wobei wir hier optisch zwei Sorten von Geraden in den Farben blau und rot unterschieden haben.



Wir bezeichnen (s.u.) die Menge der blauen Geraden mit G_{blau} und die der roten mit G_{rot}. Offenbar gilt damit $\mathcal{G} = G_{blau} \cup G_{rot}$, $G_{blau} \cap G_{rot} = \emptyset$ und $|G_{blau}| = |G_{rot}| = 6$.
Schreiben Sie zunächst die sechs blauen und sechs roten Geraden hier auf :

$$G_{blau} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}\}$$
$$G_{rot} = \{\{P_2, P_6, P_7\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}, \{\qquad\}\}$$

Man hat also in dieser endlichen euklidischen Ebene zwei Sorten von Geraden (das ist typisch für endliche Ebenen), halt die blauen und die roten. Innerhalb einer Sorte sollen Geraden genau dann senkrecht zueinander sein, wenn sie nicht parallel sind, also genau einen gemeinsamen Punkt haben. Das führt uns zu folgender Definition der Relation $\perp$ auf der Menge $\mathcal{G}$, die auch mit unserer Visualisierung von oben übereinstimmt:

$$g \perp h \quad :\Leftrightarrow \quad [g \nparallel h] \text{ und } [\, g, h \in G_{blau} \text{ oder } g, h \in G_{rot} \,]$$

Für die Kongruenzrelation $\equiv$ entscheiden wir uns in Ermangelung und auch Vermeidung an Zahlen für folgende etwas ungewöhnliche aber doch harmlose Definition, die sich auf die Geradenmenge stützt, was den etwas ungewöhnlichen Umstand hervorruft, dass alle drei bzw. genau genommen sechs echte Strecken auf einer Geraden kongruent zueinander sind. Die nicht-echten Strecken werden dabei zuallererst kongruent gemacht.

$$AB \equiv CD \quad :\Leftrightarrow \quad [A = B, C = D] \text{ oder } \left[A \neq B, C \neq D, \overline{AB} \parallel \overline{CD}\right]$$
$$\text{oder } \left[A \neq B, C \neq D, \overline{AB} \perp \overline{CD}\right]$$

Damit gibt es im 9-Punkte Modell gewissermaßen 3 Kategorien von „Längen“. Die Kongruenzrelation ist ja eine Äquivalenzrelation und damit haben wir mit der Definition sozusagen 3 Kongruenzklassen. So sollen echte Strecken genau dann kongruent sein, wenn sie derselben Sorte (also entweder der blauen oder der roten Geradenmenge) angehören, die dritte Klasse liefern die nicht-echten Strecken, zusammengefasst sind die 3 Kongruenzklassen also:

* die Menge der nicht-echten Strecken
* die Menge der echten Strecken, deren Verbindungsgeraden in G_{blau} sind
* die Menge der echten Strecken, deren Verbindungsgeraden in G_{rot} sind

Erneut: Es gibt also gewissermaßen 3 „Längen“. Überprüfen Sie ruhig einige Streckenkongruenzen, um sich mit der Definition vertraut zu machen. Es gilt z.B. die Kongruenz $P_1P_3 \equiv P_2P_3$ (die anschaulich in unserer Visualisierung alles andere als kongruent sind), denn es gilt ja $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_3}$ und damit folgt ja $\overline{P_1P_3} \parallel \overline{P_2P_3}$, also die zweite Bedingung in der obigen Definition. Auch gilt $P_2P_7 \equiv P_4P_9$, die beiden Strecken gehören der roten Geradenmenge an, und die Begründung für deren Kongruenz lautet: $\overline{P_2P_7} \perp \overline{P_4P_9}$, parallel sind sie offenbar nicht, erfüllen also die dritte Bedingung in der Definition von $\equiv$. Natürlich sind nicht alle echten Strecken kongruent (wäre auch langweilig), dazu wählt man einfach eine Strecke aus der roten, die andere aus der blauen, also aus den beiden Sorten. Probieren Sie die Wirkungsweise der Definition, um $P_1P_5 \not\equiv P_6P_9$ einzusehen.

Sei nun wie oben $\mathcal{P} := \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$ und $\mathcal{G} = G_{blau} \cup G_{rot}$. Wir werden uns in der nächsten Vorlesung überlegen, dass durch die obige Konstruktion $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ wunschgemäß eine euklidische Ebene ist, es ist also für uns zu zeigen:

AUFGABE

a) Wir zeigen, dass $(\mathcal{P}, \equiv)$ eine Kongruenzstruktur ist.

b) Wir zeigen die Gültigkeit des Axioms (K).

c) Wir zeigen die Gültigkeit des Axioms (O), indem wir für die Relation $\perp$ zeigt:

   i) $\perp$ ist irreflexiv und symmetrisch

   ii) Es gilt die Verträglichkeit von $\perp$ und $\parallel$.

d) Wir zeigen die Gültigkeit des Axioms (PR).

e) Wir zeigen die Gültigkeit des Axioms (MR). (Indem wir am besten zunächst den Spezialfall beweisen, bei dem ABC kollinear ist. Dann können wir den allgemeinen Fall darauf zurückführen.)

So, nun haben wir eingesehen, dass das oben eingeführte 9-Punkte-Modell tatsächlich eine euklidische Ebene ist. Es gibt eine Fülle von Aufgabenstellungen im 9-Punkte-Modell, die teilweise zu recht eigentümlichen Einsichten führen, sie stellen ein wertvolles Übungsmaterial dar, weil sie das Wechselspiel zwischen *Anschauung* und *Begrifflichkeit* thematisieren, die

Anschauung induziert Begriffe einerseits, andererseits erzeugen Begriffe Wahrnehmungen, die - wie auch immer - anschaulich expliziert werden können. Gerade weil die Anschauung im 9-Punkte-Modell zu falschen Annahmen verleitet, kann die Notwendigkeit für den Gebrauch von mathematischen Begriffen eingesehen werden und damit das intellektuelle Zusammenspiel von begrifflichem Denken und rein sinnlicher Wahrnehmung.
Sei also nun das 9-Punkte-Modell $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ für die folgenden Aufgaben gegeben.

AUFGABE 3

a) Man zeige, dass für jedes echte Dreieck ABC gilt

$$ABC \ \text{ ist rechtwinklig} \Leftrightarrow ABC \ \text{ ist gleichschenklig}$$

Definition. Ein Dreieck ABC heiße genau dann gleichschenklig, wenn $AC \equiv BC$ gilt.

b) Man zeige für alle echten Dreiecke:
Eines der Dreiecke ABC, BCA, CAB ist gleichschenklig und rechtwinklig.

c) Man bestimme die Anzahl der rechtwinkligen Dreiecke.

d) Man bestimme die Anzahl der Rechtecke, dabei sei ein echtes Viereck genau dann ein Rechteck, wenn seine benachbarten Seitenlinien senkrecht zueinander sind.

e) Man bestimme die Anzahl der Quadrate, dabei sei ein echtes Viereck genau dann ein Quadrat, wenn es ein Rechteck und eine Raute ist.

AUFGABE 4
Ein Parallelogramm $ABCD$ heiße Fanofigur, wenn sich seine Diagonallinien schneiden, wenn also $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$.
Man zeige:

Jedes Parallelogramm ist eine Fanofigur.

Wie sieht es eigentlich im 4-Punkte-Modell aus?

Zum Schluss: die Schulaufgabe

AUFGABE 5
Sei ABC ein Dreieck und D der Mittelpunkt der Seite AB.
Man zeige: Wenn $|DB| = |BC| = |CD|$ gilt, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.