

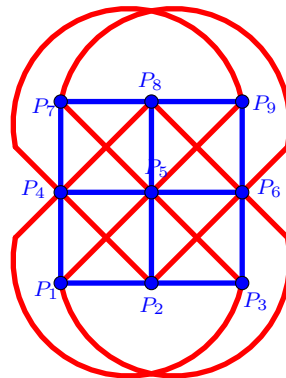
## ÜBUNG 5

Sie kennen bereits das affine Minimalmodell der Ordnung  $n = 2$ , es umfasst 4 Punkte und 6 Geraden. Auf dem Übungsblatt 4 wurde ein weiteres zweitkleinstes affines Modell der Ordnung  $n = 3$  entwickelt ( $\mathbf{Z}_{13}$ ), welches ein wenig reichhaltiger als das Minimalmodell ist. Dieses Modell wollen wir das 9-Punkte Modell nennen.

Sie haben bereits das Axiom (A) (also (V), (P), (D)) überprüft und wissen daher, dass es sich tatsächlich um eine affine Ebene handelt. Nun wollen wir das neu erschaffende affine 9-Punkte Modell  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  postwendend zur euklidischen Ebene  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$  weiter entwickeln (sozusagen: das euklidische Minimalmodell).

Wir brauchen also eine passende Kongruenzrelation  $\equiv$  auf der Menge der Strecken und eine Senkrechtrelation  $\perp$  auf der Menge der Geraden.

Eine Veranschaulichung von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$  könnte nun so aussehen, wobei wir hier optisch zwei Sorten von Geraden in den Farben **blau** und **rot** unterschieden haben.



Wir bezeichnen (s.u.) die Menge der **blauen** Geraden mit  $G_{blau}$  und die der **roten** mit  $G_{rot}$ . Offenbar gilt damit  $\mathcal{G} = G_{blau} \cup G_{rot}$ ,  $G_{blau} \cap G_{rot} = \emptyset$  und  $|G_{blau}| = |G_{rot}| = 6$ .

Schreiben Sie zunächst die sechs blauen und sechs roten Geraden hier auf (dies müssen Sie nicht als Übung abgeben!):

$$\begin{aligned}
 G_{blau} &= \{ \{P_1, P_2, P_3\}, \{ \quad \}, \{ \quad \}, \{ \quad \}, \{ \quad \}, \{ \quad \} \} \\
 G_{rot} &= \{ \{P_2, P_6, P_7\}, \{ \quad \}, \{ \quad \}, \{ \quad \}, \{ \quad \}, \{ \quad \} \}
 \end{aligned}$$

Man hat also in dieser endlichen euklidischen Ebene zwei Sorten von Geraden (das ist typisch für endliche Ebenen), halt die blauen und die roten. Innerhalb einer Sorte sollen Geraden genau dann senkrecht zueinander sein, wenn sie nicht parallel sind, also genau einen gemeinsamen Punkt haben. Das führt uns zu folgender Definition der Relation  $\perp$  auf der Menge  $\mathcal{G}$ , die auch mit unserer Visualisierung von oben übereinstimmt:

$$g \perp h \quad :\Leftrightarrow \quad [g \nparallel h] \text{ und } [g, h \in G_{\text{blau}} \text{ oder } g, h \in G_{\text{rot}}]$$

Für die Kongruenzrelation  $\equiv$  entscheiden wir uns in Ermangelung und auch Vermeidung an Zahlen für folgende etwas ungewöhnliche aber doch harmlose Definition, die sich auf die Geradenmenge stützt, was den etwas ungewöhnlichen Umstand hervorruft, dass insbesondere alle drei bzw. genau genommen sechs echte Strecken auf einer Geraden kongruent zueinander sind. Die nicht-echten Strecken werden dabei zuallererst kongruent gemacht.

$$AB \equiv CD \quad :\Leftrightarrow \quad [A = B, C = D] \text{ oder } [A \neq B, C \neq D, \overline{AB} \parallel \overline{CD}]$$

$$\text{oder } [A \neq B, C \neq D, \overline{AB} \perp \overline{CD}]$$

Damit gibt es im 9-Punkte Modell gewissermaßen 3 Kategorien von „Längen“. Die Kongruenzrelation ist ja eine Äquivalenzrelation und damit haben wir mit der Definition sozusagen 3 Kongruenzklassen. So sollen echte Strecken genau dann kongruent sein, wenn sie derselben Sorte (also entweder der blauen oder der roten Geradenmenge) angehören, die dritte Klasse liefern die nicht-echten Strecken, zusammengefasst sind die 3 Kongruenzklassen also:

- \* die Menge der nicht-echten Strecken
- \* die Menge der echten Strecken, deren Verbindungsgeraden in  $G_{\text{blau}}$  sind
- \* die Menge der echten Strecken, deren Verbindungsgeraden in  $G_{\text{rot}}$  sind

Erneut: Es gibt also gewissermaßen 3 „Längen“. Überprüfen Sie ruhig einige Streckenkongruenzen, um sich mit der Definition vertraut zu machen. Es gilt z.B. die Kongruenz  $P_1P_3 \equiv P_2P_3$  (die anschaulich in unserer Visualisierung alles andere als kongruent sind), denn es gilt ja  $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_3}$  und damit folgt ja  $\overline{P_1P_3} \parallel \overline{P_2P_3}$ , also

die zweite Bedingung in der obigen Definition. Auch gilt  $P_2P_7 \equiv P_4P_9$ , die beiden Strecken gehören der roten Geradenmenge an, und die Begründung für deren Kongruenz lautet:  $\overline{P_2P_7} \perp \overline{P_4P_9}$ , parallel sind sie offenbar nicht, erfüllen also die dritte Bedingung in der Definition von  $\equiv$ . Natürlich sind nicht alle echten Strecken kongruent (wäre auch langweilig), dazu wählt man einfach eine Strecke aus der roten, die andere aus der blauen, also aus den beiden Sorten. Probieren Sie die Wirkungsweise der Definition, um  $P_1P_5 \not\equiv P_6P_9$  einzusehen.

Sei nun wie oben  $\mathcal{P} := \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$  und  $\mathcal{G} = G_{\text{blau}} \cup G_{\text{rot}}$ . Zunächst wollen wir zeigen, dass durch die obige Konstruktion  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$  wunschgemäß eine euklidische Ebene ist.

### AUFGABE 1

- a) Man zeige, dass  $(\mathcal{P}, \equiv)$  eine Kongruenzstruktur ist.
- b) Man zeige die Gültigkeit des Axioms (K).
- c) Man zeige die Gültigkeit des Axioms (O), indem man für die Relation  $\perp$  zeigt:
  - (i)  $\perp$  ist irreflexiv und symmetrisch
  - (ii) Es gilt die Verträglichkeit von  $\perp$  und  $\parallel$ .
- d) Man zeige die Gültigkeit des Axioms (PR).
- e) Die Gültigkeit des Axioms (MR) zeigen wir in der Vorlesung, natürlich dürfen Sie dies auch jetzt schon! Man zeigt (MR), indem man am besten zunächst den Spezialfall beweist, bei dem  $ABC$  kollinear ist. Dann kann man den allgemeinen Fall darauf zurückführen.

So, nun haben wir mit Hilfe der Aufgabe 1 (hoffentlich) eingesehen, dass das oben eingeführte 9-Punkte-Modell tatsächlich eine euklidische Ebene ist. Es gibt eine Fülle von Aufgabenstellungen im 9-Punkte-Modell, die teilweise zu recht eigentümlichen Einsichten führen, sie stellen ein wertvolles Übungsmaterial dar, weil sie das Wechselspiel zwischen *Anschauung* und *Begrifflichkeit* thematisieren, die Anschauung induziert Begriffe einerseits, andererseits erzeugen Begriffe Wahrnehmungen, die - wie auch immer - anschaulich expliziert werden können. Gerade weil die Anschauung im 9-Punkte-Modell zu falschen Annahmen verleitet, kann die Notwendigkeit für den Gebrauch von mathematischen Begriffen eingesehen wer-

den und damit das intellektuelle Zusammenspiel von begrifflichem Denken und rein sinnlicher Wahrnehmung. Hier passen Zitate von Kant, wenn er schreibt:

„Gedanken ohne Anschauung sind leer, Anschauung ohne Begriffe sind blind.“

oder aber auch

„Anschauung und Begriffe [zwei Grundquellen des Gemüths] machen also die Elemente aller unserer Erkenntniß aus, . . .“

Sei also nun das 9-Punkte-Modell ( $\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp$ ) für die folgenden Aufgaben gegeben. Beginnen wir mit der . . .

### AUFGABE 2

- a) Man zeige, dass für jedes echte Dreieck  $ABC$  gilt

$$ABC \text{ ist rechtwinklig} \Leftrightarrow ABC \text{ ist gleichschenkelig}$$

Definition. Ein Dreieck  $ABC$  heiße genau dann gleichschenkelig, wenn  $AC \equiv BC$  gilt.

- b) Man zeige für alle echten Dreiecke:  
Eines der Dreiecke  $ABC, BCA, CAB$  ist gleichschenkelig und rechtwinklig.
- c) Man bestimme die Anzahl der rechtwinkligen Dreiecke.
- d) Man bestimme die Anzahl der Rechtecke, dabei sei ein echtes Viereck genau dann ein Rechteck, wenn seine benachbarten Seitenlinien senkrecht zueinander sind.
- e) Man bestimme die Anzahl der Quadrate, dabei sei ein echtes Viereck genau dann ein Quadrat, wenn es ein Rechteck und eine Raute ist.

### AUFGABE 3

Man zeige für jedes Dreieck  $ABC$ :

- a) Ist  $ABC$  kollinear und nicht-entartet, so ist  $C$  Mittelpunkt von  $AB$ .
- b) Ist  $C$  Mittelpunkt von  $AB$ , so ist  $C$  auch Verdopplungspunkt von  $AB$ .

**AUFGABE 4**

Sei  $L = \{g, h, i, j\}$  eine Menge von vier Geraden, die paarweise nicht parallel sind.

Man zeige:

Es gibt einen Punkt  $S$ , durch den mindestens drei der Geraden aus  $L$  gehen.

**AUFGABE 5**

Ein Parallelogramm  $ABCD$  heiße **Fanofigur**, wenn sich seine Diagonallinien schneiden, wenn also  $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$ .

Man zeige:

Jedes Parallelogramm ist eine Fanofigur.

Wie sieht es eigentlich im 4-Punkte-Modell aus?