

## ÜBUNG 3

### AUFGABE 1

Man beweise oder widerlege:

- Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge mit der Mächtigkeit 3. Sei  $\mathcal{G}_a$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathcal{P}$ . Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_a)$  eine affine Ebene.
- Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge mit der Mächtigkeit 4. Sei  $\mathcal{G}_b$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathcal{P}$ . Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_b)$  eine affine Ebene.
- Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge mit der Mächtigkeit 5. Sei  $\mathcal{G}_c$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathcal{P}$ . Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_c)$  eine affine Ebene.
- Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge mit der Mächtigkeit 6. Sei  $\mathcal{G}_d$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathcal{P}$ . Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_d)$  eine affine Ebene.

### AUFGABE 2

Man überprüfe die folgenden Aussagen daraufhin, ob sie in jeder affinen Ebene  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  gelten.

- Zu jedem Punkt  $A$  gibt es mindestens 2 Geraden, die nicht durch  $A$  gehen.
- Zu jeder Geraden  $g$  gibt es mindestens 2 Punkte, die nicht auf  $g$  liegen.
- Zu je zwei Punkten  $A, B$  gibt es mindestens eine Gerade, die weder durch  $A$  noch durch  $B$  geht.
- In je zwei Geraden  $g, h$  gibt es mindestens einen Punkt, der weder auf  $g$  noch auf  $h$  liegt.

### AUFGABE 3

Für diese Aufgabe machen wir folgende Vereinbarungen

- $(V_{ein})$  bedeutet die Eindeutigkeitsaussage des Axioms  $(V)$
- $(V_{ex})$  bedeutet die Existenzaussage des Axioms  $(V)$
- $(P_{ein})$  bedeutet die Eindeutigkeitsaussage des Axioms  $(P)$
- $(P_{ex})$  bedeutet die Existenzaussage des Axioms  $(P)$

Für jede Aussage  $(X)$  aus den 5 Aussagen

$$(V_{ein}), (V_{ex}), (P_{ein}), (P_{ex}), (D)$$

gebe man eine Inzidenzstruktur  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  an, die  $(X)$  nicht erfüllt, aber die übrigen 4 Aussagen erfüllt. Es genügt die Angabe der jeweiligen Inzidenzstruktur, ein Beweis ist nicht erforderlich.

**AUFGABE 4**

Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine affine Ebene. Man zeige:

- a) Zu jedem echten Dreieck  $ABC$  gibt es genau einen Punkt  $P$  derart, dass  $APBC$  ein Parallelogramm ist.
- b) Für alle Geraden  $g, h$  mit  $g \not\parallel h$  gibt es einen Punkt  $A$  mit  $A \notin g$  und  $A \notin h$ .
- c) Zu jedem echten Dreieck  $ABC$  gibt es einen Punkt  $D$  mit

$$D \notin \overline{AB}, \quad D \notin \overline{BC}, \quad D \notin \overline{CA}.$$

\*\*\*\*\*

Es folgt wieder eine Aufgabe, die mit Schulmitteln zu bearbeiten ist.

**AUFGABE\* 5**

Sei  $ABC$  ein Dreieck. Sei  $M$  der Mittelpunkt der Seite  $AC$ .

- a) Eine Parallele  $p$  durch  $M$  zu der Seitenlinie  $\overline{AB}$  schneide die Seitenlinie  $\overline{BC}$  in einem Punkt  $N$ .
  - Man konstruiere die Situation mit *GeoGebra*.
  - Man beweise, dass  $N$  der Mittelpunkt der Seite  $BC$  ist.
- b) Sei  $N$  der Mittelpunkt der Seite  $BC$ 
  - Man konstruiere die Situation mit *GeoGebra*.
  - Man beweise, dass  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$  gilt.

Bemerkung: Offenbar ist das Paar  $(\{A, B, C, D\}, \mathcal{G}_b)$  (vgl. 1 b) und die Vorlesung am Montag) eine affine Ebene, die wohl kleinste Ebene. Sei  $\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}_b$ . Hier der Beweis, dass der Name „Affines Minimalmodell“ gerechtfertigt ist:

**Satz.** (Das Affine Minimalmodell)

- a) Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge mit der Mächtigkeit 4. Sei  $\mathcal{G}_2$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathcal{P}$ . Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_2)$  ein affines Minimalmodell.
- b) Jedes affine Minimalmodell hat die Ordnung 2 und entsteht so, wie in a) beschrieben.

**Beweis.**

Zu a) Aufgrund der Definition der Geradenmenge ist Axiom (V) trivial. Offenbar gilt für alle Geraden  $g, h : g \parallel h \Leftrightarrow g = h$  oder  $g = \mathcal{P} \setminus \{h\}$ . Daraus folgt sofort Axiom (P). Axiom (D) gilt offensichtlich.

Zu b) Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ein affines Minimalmodell. Also ist seine Ordnung  $n \geq 2$ . Wegen Axiom (D) ist  $n < 4$  (denn anderenfalls würden alle 4 Punkte auf einer Geraden liegen).

*Annahme:*  $n=3$

Man wählt eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $A$  außerhalb von  $g$ . Auf  $g$  liegen drei Punkte und auf der Parallelen zu  $g$  durch  $A$  (die disjunkt zu  $g$  ist) auch drei Punkte, ein Widerspruch. Also ist  $n=2$ .

Wir zeigen noch:  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2$

Da jede Gerade aus genau 2 Punkten besteht, ist  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_2$

Zu  $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}_2$ :

Sei  $\{A, B\}$  eine 2-elementige Punktmenge. Dann ist  $\{A, B\} \subseteq \overline{AB}$ . Auch  $\overline{AB}$  ist eine 2-elementige Punktmenge, also folgt  $\{A, B\} = \overline{AB} \in \mathcal{G}$ .

□

Aus obigen Satz ergibt sich sofort, dass je zwei affine Minimalmodelle isomorph zueinander sind. Daher spricht man von *dem* affinen Minimalmodell. Dieses Modell zeigt in krasser Weise die Allgemeinheit der Theorie der affinen Ebenen. Es sieht ja vollkommen anders aus, als unsere gewohnte Zeichenebene. Eine Veranschaulichung könnte durch folgende Figur dargestellt werden:

