

# ÜBUNG 1

## Einführender Text zu den ersten beiden Vorlesungen

Es folgt ein zusammenfassender Text über die gesprochenen, aber nicht immer fixierten Worte der ersten beiden Vorlesungen. Er soll Ihnen helfen, die Grundideen nochmals in Ruhe nachzuvollziehen.

### 1. Worum es geht: Die Zeichenebene als Ausgangspunkt

Wir beschränken uns mit dem Aufbau der ebenen Geometrie. Die Ebene – genauer: die *Zeichenebene* – ist derjenige Phänomen-Bereich, aus dem wir die intuitiven Tatsachen entnehmen, um unsere Raumschauung zu mathematisieren.

Was heißt „mathematisieren“? Es bedeutet, dass wir eine *mathematische Sprache und Symbolik* entwickeln müssen, in der wir die Phänomene der Zeichenebene präzise beschreiben können. Diese Sprache fußt auf zweierlei:

- gewisse **Objekte** bzw. Objekttypen, die wir in der Ebene sichten, und
- gewisse **strukturelle Gegebenheiten**, welche diese Objekte miteinander verbinden.

### 2. Punkte und Abstand – die beiden Grundpfeiler

Die Grundobjekte der Zeichenebene nennen wir **Punkte**. Sie bilden das Material, aus dem alles, was wir betrachten wollen, besteht. Die Zeichenebene selbst ist die volle Punktmenge, die wir mit  $\mathcal{P}$  bezeichnen.

Die grundlegende **Struktur** der Zeichenebene beruht darauf, dass je zwei Punkte einen *Abstand* voneinander haben. Beides zusammen – die Punkte und die Abstandsstruktur – bildet die Basis unseres Raumgefühls.

*Ein einfaches Gedankenexperiment:* Stellen Sie sich vor, Sie sähen die Zeichenebene nur als Ansammlung von Punkten, ohne jegliche Abstandsinformation. Dann könnten Sie nicht unterscheiden, ob drei Punkte ein Dreieck oder eine Strecke bilden – jede geometrische Aussage wäre unmöglich. Erst der Abstand macht aus einer bloßen Punktmenge eine *geometrische* Struktur.

Tatsächlich genügt diese Basis – man braucht nichts darüber hinaus, um die gesamte euklidische Geometrie aufzubauen. Alle weiteren Objekte (Geraden, Kreise, Winkel, Dreiecke, ...) lassen sich allein aus Punkten und ihren Abstandsbeziehungen herleiten.

### 3. Anordnungsphänomene – das Unsichtbare, das immer da ist

Neben dem Abstand gibt es noch eine zweite Schicht von Phänomenen in der Zeichenebene: die **Anordnungsphänomene**, also Lagebeziehungen wie *oben/unten*, *links/rechts*, *innen/außen*, *zwischen*.

Diese Phänomene sind gewissermaßen sehr tief liegend. Sie begleiten *alle* unsere anschaulichen Beobachtungen, ohne dass dies immer bewusst wird – wir können sie nicht „ausblenden“. Hier einige Beispiele:

- Wenn Sie ein **Dreieck** betrachten und einen weiteren Punkt hinzufügen, so registrieren Sie unwillkürlich, ob dieser Punkt *im Inneren*, *im Äußeren* oder *auf dem Rand* des Dreiecks liegt.
- Wenn Sie den **Mittelpunkt einer Strecke** besichtigen, so können Sie nicht umhin, ihn als *zwischen* den Endpunkten liegend zu sehen.
- Zeichnen Sie einen Punkt  $P$  auf eine Gerade  $g$ : Sofort zerfällt  $g$  in Ihrem Auge in zwei Hälften (die beiden *Halbgeraden* mit Anfangspunkt  $P$ ).

Eine ganze Reihe geometrischer „Tatsachen“ beruhen auf solchen Anordnungsphänomenen. Zum Beispiel:

- Wenn eine Gerade eine Kreislinie nicht nur berührt, sondern schneidet, so muss sie die Kreislinie noch mindestens ein zweites Mal schneiden.
- Die beiden Diagonallinien eines Parallelogramms können nicht zueinander parallel sein.
- Liegen zwischen den beiden Endpunkten einer Strecke zwei weitere Punkte, so wird die Strecke dadurch in drei Teile geteilt.
- Eine geschlossene Kurve (z. B. ein Kreis) teilt die Ebene in ein „Inneres“ und ein „Äußeres“. Um vom Inneren ins Äußere zu gelangen, muss man die Kurve überqueren.

Solche „Tatsachen“ sind dank unserer Anschauung mitgegeben und werden oft ohne Weiteres benutzt, häufig ohne explizit genannt zu werden.

#### 4. Historischer Exkurs: Hilbert und die „Katastrophe der Anordnung“

In der tausendjährigen Entwicklung der Geometrie – von Euklid bis ins 19. Jahrhundert – treten Anordnungsphänomene erstaunlicherweise *gar nicht* auf, d. h. sie werden mathematisch nicht erfasst. Erst die Vorgänger David Hilberts und Hilbert selbst (in seinen „Grundlagen der Geometrie“, 1899) haben dies begrifflich expliziert.

Es wurde mit Verblüffung festgestellt, dass viele elementargeometrische Sachverhalte Anordnungsphänomene enthalten, die bei korrekter Behandlung *hätten* genannt werden müssen. Die Abwesenheit dieser Argumente in den vergangenen geometrischen Theorien war eine ernsthafte Lücke.

*Ein berühmtes Beispiel:* Bereits Euklids allererster Satz – die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks über einer gegebenen Strecke  $AB$  mittels zweier Kreise – benutzt stillschweigend, dass sich die beiden Kreise tatsächlich schneiden. Doch warum sollten sie das? Diese „offensichtliche“ Tatsache beruht auf einem Anordnungsargument (einem Schnitt- bzw. Zusammenhangsargument), das Euklid nirgends formuliert hat.

Dies wurde nicht nur mit Verblüffung, sondern geradezu mit Entsetzen festgestellt, da viele ursprünglich recht einfache Argumentationen bei dieser Korrektur unheimlich verwickelt wurden. Es war eine kleine wissenschaftliche Katastrophe – eine der ersten ihrer Art überhaupt.

Für unsere Vorlesung bedeutet dies: Wir werden die Anordnungsphänomene zunächst bewusst *ausklammern* und uns auf die algebraisch-strukturellen Grundlagen konzentrieren. Das ist kein Mangel, sondern eine methodische Entscheidung, die den Aufbau erheblich vereinfacht.

---

### AUFGABE 1

(ohne Abgabe)

Diskutieren Sie in Ihrer Übungsgruppe ausführlich unsere Definition der Kongruenz von Strecken:

**Definition 0.1** (Kongruenz). Sei  $\mathcal{P}$  eine Menge. Eine Relation Kongruenz (im Zeichen  $\equiv$ ) auf der Menge der Strecken, also  $\equiv \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \times (\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ , nennen wir eine **Kongruenz-Relation**, wenn

(1)  $\equiv$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  ist.

(2) für alle verschiedenen Punkte  $A, B$  gilt:  $AA \equiv BB \not\equiv AB \equiv BA$ .

Das Paar  $(\mathcal{P}, \equiv)$  nennen wir eine **Kongruenz-Struktur**.

### Erläuterung und Leitfragen zur Diskussion:

(a) *Von der Messung zur Kongruenz.* Üblicherweise „ordnet“ ein Lineal jeder Strecke eine Zahl als ihre Länge zu – durch schlichtes Messen des Abstandes, wobei es keine Rolle spielt, ob man von  $A$  nach  $B$  misst oder umgekehrt. Durch die Messergebnisse sind Strecken miteinander vergleichbar, und es treten für zwei Strecken  $AB, CD$  drei Vergleichsfälle auf:

$AB$  ist kürzer als  $CD$ ,       $AB$  ist länger als  $CD$ ,       $AB$  ist gleichlang wie  $CD$ .

Mit einer nichtnegativen Abstandsfunktion  $|\cdot|$  geschrieben:  $|AB| < |CD|$ ,  $|AB| > |CD|$ ,  $|AB| = |CD|$ .

Fasst man die ersten beiden Fälle zusammen, so bleibt nur noch die Fallunterscheidung:

$$|AB| = |CD| \quad \text{oder} \quad |AB| \neq |CD|.$$

Man gewinnt so die für uns einzig wertvolle (man sagt: *elementare*) Beziehung zwischen Strecken, nämlich die, **gleichlang** zu sein. Die Ungleichheit spielt zunächst keine große geometrische Rolle.

(b) Warum „Kongruenz“ statt „gleichlang“? Wir bevorzugen den Begriff **Kongruenz** (Zeichen:  $\equiv$ ) gegenüber „gleichlang“, denn Letzterer assoziiert unwillkürlich Messwerte (3 cm, 5 cm, ...). Uns interessiert aber nicht die *eigentliche Länge* einer Strecke, sondern nur die *Beziehung* zwischen Strecken: Sind sie gleichlang oder nicht? Die Kongruenz ist also ein äußerst ökonomischer Ersatz für eine raffinierte, mit reellen Zahlen hantierende Abstandsfunktion.

(c) *Ein kleines Beispiel.* Betrachten Sie drei Punkte  $A, B, C$  mit  $|AB| = |AC| = 3$  und  $|BC| = 5$ . Dann gilt:

$$AB \equiv AC \equiv BA \equiv CA, \quad BC \equiv CB, \quad AB \not\equiv BC.$$

Beachten Sie:  $AB \equiv BA$  gilt, weil die Strecke von  $A$  nach  $B$  dieselbe Länge hat wie die von  $B$  nach  $A$ . Die Strecke  $AA$  hingegen hat die Länge 0; es gilt  $AA \equiv BB \equiv CC$  (alle haben Länge 0), aber  $AA \not\equiv AB$  (denn  $0 \neq 3$ ). Genau dies drückt Bedingung (2) der Definition aus.

(d) *Diskutieren Sie folgende Fragen:*

- i) Warum ist die Kongruenz  $\equiv$  (wie sie aus der Abstandsfunktion hervorgeht) eine *Äquivalenzrelation*? Überprüfen Sie die drei Eigenschaften: Reflexivität ( $AB \equiv AB$ ), Symmetrie ( $AB \equiv CD \Rightarrow CD \equiv AB$ ) und Transitivität ( $AB \equiv CD$  und  $CD \equiv EF \Rightarrow AB \equiv EF$ ).
- ii) Was bedeutet Bedingung (2) anschaulich? Formulieren Sie sie in eigenen Worten.
- iii) Könnte man auf der Menge  $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$  eine Kongruenz-Relation  $\equiv$  definieren, bei der *alle* Strecken zueinander kongruent sind? Warum nicht?
- iv) Wie viele verschiedene Strecken (als Elemente von  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ) gibt es bei  $|\mathcal{P}| = 3$ ? In wie viele Kongruenzklassen zerfallen diese mindestens?

**AUFGABE 2**

Zunächst definieren wir in Anlehnung an oben - aber wesentlich einfacher - eine Art „nichtnegative Abstandsfunktion“:

**Definition 0.2.** Sei  $M$  eine Menge und  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle  $A, B \in M$  gilt:  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .

b) Für alle  $A, B \in M$  gilt:  $d(A, B) = d(B, A)$

Dann heißt  $d$  eine *Pseudo-Metrik auf  $M$* .

Wenn eine Pseudo-Metrik auf einer Menge  $M$  vorliegt, können wir bereits eine spezielle Kongruenz von Strecken  $AB, CD$  mit  $A, B, C, D \in M$  definieren, nämlich

$$(*) \quad AB \equiv CD \quad :\Leftrightarrow \quad d(A, B) = d(C, D)$$

Dies wollen wir uns an den folgenden zwei Konkretisierungen überlegen.

a) Sei  $P$  eine Menge und sei  $d_1$  definiert durch  $d_1(A, B) := 0$  für  $A = B$  und  $d_1(A, B) := 1$  für  $A \neq B$ .

(i) Man zeige, dass  $d_1$  eine Pseudo-Metrik ist.

(ii) Man zeige, dass das Paar  $(P, \equiv)$  eine Kongruenz-Struktur ist, wobei die Relation  $\equiv$  gemäß  $(*)$  definiert ist.

b) Wir betrachten nun eine andere (Ihnen sehr bekannte) Punktmenge  $P$ , nämlich die Menge  $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  und es sei  $d_2$  definiert durch

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

(i) Konkretisieren Sie die Punktmenge und die neue Abstandsfunktion durch einige Beispiele.

(ii) Man zeige, dass  $d_2$  eine Pseudo-Metrik ist.

(iii) Man zeige, dass das Paar  $(\mathbb{R}^2, \equiv)$  eine Kongruenz-Struktur ist, wobei die Relation  $\equiv$  gemäß  $(*)$  definiert ist.

**AUFGABE 3**

Sei  $\mathcal{P} := \{A, B, C, D\}$  eine Menge von Punkten. Offenbar gilt  $|\mathcal{P}| = 4$ .

- Man gebe zwei verschiedene Kongruenz-Relationen  $\equiv_1$  und  $\equiv_2$  auf  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  an (mit Beweis).
- Man bestimme die Anzahl der Inzidenzstrukturen (wird Montag definiert)  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  mit  $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$  und visualisiere einige davon.
- Man bestimme die Anzahl aller echten Strecken, die mit der Punktmenge  $\mathcal{P}$  gebildet werden können.
- Man bestimme die Anzahl aller Dreiecke, die mit der Punktmenge  $\mathcal{P}$  gebildet werden können.
- Man bestimme die Anzahl aller nicht-entarteten Vierecke, die mit der Punktmenge  $\mathcal{P}$  gebildet werden können.
- Man bestimme die Anzahl aller Fünfecke, die mit der Punktmenge  $\mathcal{P}$  gebildet werden können.

**AUFGABE 4**

Wir betrachten die Punktmenge  $\mathcal{P} = \{A, C, G, T\}$ , deren Elemente wir in Anlehnung an die Biowissenschaften als Basen eines genetischen Codes ansehen. In diesem Zusammenhang nennt man ein Vieleck wie zum Beispiel

GTTACCAACGTCTTAACCTGGGCAGTTCGATACAGCATCAAGAT

eine DNA-Sequenz. Ein Dreieck wie zum Beispiel GTT bezeichnet man als Codon.

- Berechnen Sie, wie viele Codons es gibt.
- Beurteilen Sie, ob es mehr oder weniger als tausend DNA-Sequenzen der Länge 5 gibt.
- Die Zahl  $10^{100}$ , also eine Eins mit hundert Nullen, nennt man ein Googol. Menschliche DNA besteht aus etwa drei Milliarden Basen. Beurteilen Sie, ob die Anzahl der DNA-Sequenzen der Länge  $3 \cdot 10^9$  größer oder kleiner als ein Googol ist.

Um herauszufinden, warum genau 20 Codons Aminosäuren sind, bezeichnete der britische Molekularbiologe Francis Crick (1916-2004) eine Menge  $M \subseteq \mathcal{P}^3$  von Dreiecken als kommafrei, falls die folgende Bedingung gilt:

$$(UVW \in M \wedge XYZ \in M) \Rightarrow (VWX \notin M \wedge WXY \notin M).$$

- d) Überprüfen Sie, ob die Mengen  $\{\text{TGC}, \text{ATG}, \text{GCC}\}$  und  $\{\text{TGC}, \text{ATG}, \text{GCC}, \text{CGC}\}$  kommafrei sind.
- e) Angenommen, die Menge  $M \subseteq \mathcal{P}^3$  ist kommafrei. Begründen Sie, warum dann die Dreiecke AAA, CCC, GGG und TTT nicht zu  $M$  gehören können.
- f) Wir möchten eine möglichst große kommafreie Menge

$$M = \{\text{ATA}, \text{CGC}, \text{CGA}, \text{GTC}, \text{CTT}, \text{AGG}, \dots\}$$

konstruieren. Markieren Sie so viele Codons wie möglich, die Sie zu  $M$  hinzufügen könnten, ohne Cricks Bedingung zu verletzen.

AAC CAA ACA	CCT TCC CTC	TTC <b>CTT</b> TCT	ATC CAT TCA
AAG GAA AGA	GGA <b>AGG</b> GAG	TTG GTT TGT	AGT TAG GTA
AAT TAA <b>ATA</b>	GGC CGG GCG	ACG GAC <b>CGA</b>	ATG GAT TGA
CCA ACC CAC	GGT TGG GTG	AGC CAG GCA	CGT TCG <b>GTC</b>
CCG GCC <b>CGC</b>	TTA ATT TAT	ACT TAC CTA	CTG GCT TGC