

ÜBUNG 11

Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ eine euklidische Ebene von Charakteristik $\neq 3$ gegeben.

AUFGABE 1

Sei $ABCD$ ein echtes Viereck und sei $KLMN$ ein echtes Seitenmittenviereck von $ABCD$. Man zeige, dass dann gilt:

$$KM \equiv LM \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

AUFGABE 2

Sei ABC ein echtes Dreieck und M der Mittelpunkt von CA . Man zeige: Die Seitenhalbierendenlinie des Dreiecks ABM von A aus schneidet BC im 2:1-Teilungspunkt von CB .

AUFGABE 3

In einem echten Dreieck ABC sei w eine Winkelhalbierende bei C . Dann verlaufen die Gerade w , das Lot von B auf w und die Mittelparallele zu \overline{AC} im Dreieck in ABC durch einen gemeinsamen Punkt.

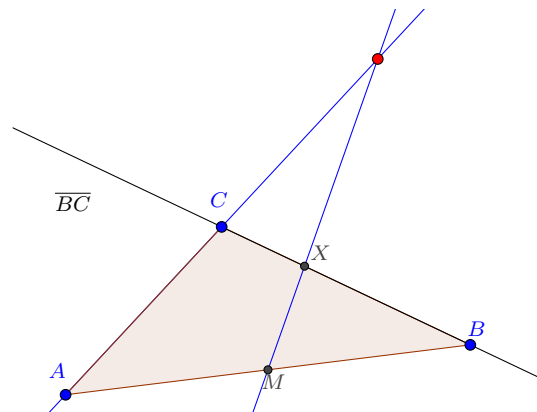
AUFGABE 4

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und sei M der Mittelpunkt der Seite AD . Sei E der Fußpunkt des Lotes von B auf \overline{MC} . Man zeige, dass dann $AB \equiv AE$ gilt.

AUFGABE 5

Sei ABC ein echtes Dreieck und M der Mittelpunkt von AB und $X \in \overline{BC}$.

- a) Man zeichne die Figur mit *GeoGebra* und variiere die Lage der Punkte.
- b) Man zeige: Wenn X nicht der Mittelpunkt der Strecke BC ist, dann schneiden sich die Geraden \overline{MX} und \overline{AC} in einem Punkt.
- c) Man zeige: Wenn X der 2:1 Teilungspunkt der Strecke BC ist, dann ist der Schnittpunkt von \overline{MX} und \overline{AC} der Verdopplungspunkt von AC .



Es folgen unten wie gewünscht noch Beispiele von alten Klausuraufgaben (meist aus der Corona-Zeit), die Sie nicht abgeben brauchen. Bei den letzten beiden Aufgaben empfehlen wir, die angegebenen Beweisschritte zunächst nicht zu lesen.

AUFGABE

Man beurteile folgende Aussagen:

- a) Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt: ABC ist rechtwinklig \Leftrightarrow für den Höhenschnittpunkt H von ABC gilt: $C = H$.

beide Richtungen sind falsch ' \Leftrightarrow ' gilt nur ' \Rightarrow ' gilt nur ' \Leftarrow ' gilt

- b) Sei $ABCD$ ein echtes Viereck. Dann gilt: $ABCD$ ist ein Trapez \Leftrightarrow $ABCD$ ist ein Parallelogramm

beide Richtungen sind falsch ' \Leftrightarrow ' gilt nur ' \Rightarrow ' gilt nur ' \Leftarrow ' gilt

- c) Im 9-Punkte Modell gilt: Ein echtes Dreieck ABC ist genau dann gleichschenkelig wenn es - also ABC - rechtwinklig ist.

beide Richtungen sind falsch ' \Leftrightarrow ' gilt nur ' \Rightarrow ' gilt nur ' \Leftarrow ' gilt

AUFGABE

Man beurteile folgende Aussagen.

	wahr	falsch
Es gilt $\overline{AB} = AB$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ABC rechtwinklig \Rightarrow BAC rechtwinklig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt ein Viereck das sowohl ein symmetrischer Dachen als auch ein Trapez ist.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jede Parallelprojektion ist bijektiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist ABC kollinear und nicht-entartet, so ist C Mittelpunkt von AB (im 9-Pkte Modell)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

AUFGABE

Vorweg die folgende

Definition. Seien a, b parallele und verschiedene Geraden. Sei p eine weitere zu a parallele Gerade mit $\forall X \in p : XX_a \equiv XX_b$. Diese Gerade p nennen wir die Mittelparallele von a und b .

Satz. Sei p die Mittelparallele zweier Geraden a, b . Dann gilt für jedes kollineare Dreieck APB mit $A \in a$, $P \in p$ und $B \in b$ die Kongruenz $AP \equiv PB$, d.h. P ist der Mittelpunkt der Seite AB .

a) Man zeichne eine passende Figur.

b) Man sortiere die einzelnen Beweisschritte in eine schlüssige Reihenfolge.

- (1) Da p parallel zu $a = \overline{AC}$ und N Mittelpunkt von BC ist, folgt mit dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck ABC , dass der Schnittpunkt P von p mit der Geraden \overline{AB} der Mittelpunkt der Seite AB ist.
- (2) Dann ist ABC ein echtes Dreieck.
- (3) Wenn $\overline{AB} \perp a$ gilt die Behauptung nach Definition von p .
- (4) Sei APB ein kollineares Dreieck mit $A \in a$, $P \in p$ und $B \in b$.
- (5) Damit gilt die Behauptung $AP \equiv PB$.
- (6) Sei nun \overline{AB} zu a nicht senkrecht und sei $C := B_a$.
- (7) Dann sind A, P, B nach Definition paarweise verschieden und liegen auf der Geraden \overline{AB} .
- (8) Dann ist nach Definition von p dieser Schnittpunkt N der Mittelpunkt der Seite BC .
- (9) Sei N der Schnittpunkt von \overline{BC} mit p .

Meine Reihenfolge lautet

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

AUFGABE

Sei ABC ein echtes Dreieck, h die Höhenlinie von C aus, $X \in h$, M der Mittelpunkt von BC und Y der Verdopplungspunkt von XM . Man zeige: Der Mittelpunkt von AY liegt auf dem Mittellot von AB .

a) Man zeichne eine passende Figur.

b) Man sortiere die einzelnen Beweisschritte in eine schlüssige Reihenfolge.

- (1) Dann h die Höhenlinie von C aus ist, ist $h = \overline{BC}$.
- (2) Da Y der Verdopplungspunkt von XM ist, gilt damit $Y = B$.
- (3) Fall. $X \neq C$.
- (4) Damit liegt D auch auf dem Mittellot von AB .
- (5) Da nach Voraussetzung $h = \overline{XC}$ die Höhenlinie auf AB ist, gilt auch $\overline{BY} \perp \overline{AB}$.
- (6) Fall $h \parallel \overline{BC}$.
- (7) Also folgt wie oben nach Thales $AD \equiv DB$, also gilt damit auch $D \in A \oplus B$, d.h. D liegt auf dem Mittellot von AB .
- (8) Damit ist ACB rechtwinklig, und da Y auf $h = \overline{BC}$ liegt ist auch AYB rechtwinklig.
- (9) Wegen Thales gilt für den Mittelpunkt D von AY insbesondere $AD \equiv BD$, also ist damit D auf dem Mittellot von AB .
- (10) Wir führen den Beweis mit einer Fallunterscheidung.
- (11) Folglich ist D der Mittelpunkt von AB .
- (12) Dann ist $XYBC$ ein echtes Viereck und da M der gemeinsame Mittelpunkt der Diagonalen XY und BC ist, ist nach dem Diagonalensatz $XYBC$ ein Parallelogramm.
- (13) Also gilt $\overline{BY} \parallel \overline{XC}$.
- (14) Fall. $X = C$.
- (15) Sei D der Mittelpunkt von AY .
- (16) Fall $h \nparallel \overline{BC}$.
- (17) Da D als Mittelpunkt von AY auf \overline{AY} liegt, ist AYB wieder ein (echtes und) rechtwinkliges Dreieck.

Meine Reihenfolge lautet

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------