ÜBUNG 11

Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$ eine euklidische Ebene von Charakteristik $\neq 3$ gegeben.

AUFGABE 1

Sei $ABCD$ ein echtes Viereck und sei $KLMN$ ein echtes Seitenmittenviereck von $ABCD$. Man zeige, dass dann gilt:

$$KM \equiv L\cancel{M} \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

N

AUFGABE 2

Sei ABC ein echtes Dreieck und M der Mittelpunkt von CA. Man zeige: Die Seitenhalbierendenlinie des Dreiecks ABM von A aus schneidet BC im 2:1-Teilungspunkt von CB.

AUFGABE 3

In einem echten Dreieck ABC sei w eine Winkelhalbierende bei C. Dann verlaufen die Gerade w, das Lot von B auf w und die Mittelparallele zu $\overline{AC}$ im Dreieck in ABC durch einen gemeinsamen Punkt.

AUFGABE 4

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und sei M der Mittelpunkt der Seite AD. Sei E der Fußpunkt des Lotes von B auf $\overline{MC}$. Man zeige, dass dann $AB \equiv AE$ gilt.

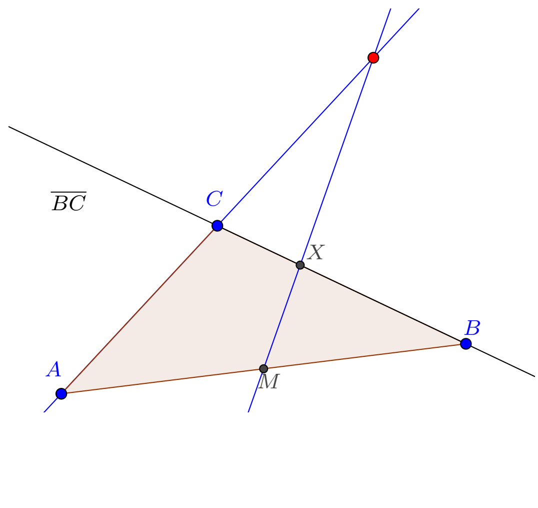
AUFGABE 5

Sei ABC ein echtes Dreieck und M der Mittelpunkt von AB und $X \in \overline{BC}$.

a) Man zeichne die Figur mit *GeoGebra* und variiere die Lage der Punkte.

b) Man zeige: Wenn X nicht der Mittelpunkt der Strecke BC ist, dann schneiden sich die Geraden $\overline{MX}$ und $\overline{AC}$ in einem Punkt.

c) Man zeige: Wenn X der 2:1 Teilungspunkt der Strecke BC ist, dann ist der Schnittpunkt von $\overline{MX}$ und $\overline{AC}$ der Verdopplungspunkt von AC.



Es folgen unten wie gewünscht noch Beispiele von alten Klausuraufgaben (meist aus der Corona-Zeit), die Sie nicht abgeben brauchen. Bei den letzten beiden Aufgaben empfehlen wir, die angegebenen Beweisschritte zunächst nicht zu lesen.

AUFGABE

Man beurteile folgende Aussagen:

a) Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt: ABC ist rechtwinklig $\Leftrightarrow$ für den Höhenschnittpunkt H von ABC gilt: $C = H$.

☐ beide Richtungen sind falsch ☐ '$\Leftrightarrow$' gilt ☐ nur '$\Rightarrow$' gilt ☐ nur '$\Leftarrow$' gilt

b) Sei $ABCD$ ein echtes Viereck. Dann gilt: $ABCD$ ist ein Trapez $\Leftrightarrow$ $ABCD$ ist ein Parallelogramm

☐ beide Richtungen sind falsch ☐ '$\Leftrightarrow$' gilt ☐ nur '$\Rightarrow$' gilt ☐ nur '$\Leftarrow$' gilt

c) Im 9-Punkte Modell gilt: Ein echtes Dreieck ABC ist genau dann gleichschenklig wenn es - also ABC - rechtwinklig ist.

☐ beide Richtungen sind falsch ☐ '$\Leftrightarrow$' gilt ☐ nur '$\Rightarrow$' gilt ☐ nur '$\Leftarrow$' gilt

AUFGABE

Man beurteile folgende Aussagen.	wahr	falsch
Es gilt $\overline{AB} = AB$	☐	☐
ABC rechtwinklig $\Rightarrow$ BAC rechtwinklig	☐	☐
Es gibt ein Viereck das sowohl ein symmetrischer Dachen als auch ein Trapez ist.	☐	☐
Jede Parallelprojektion ist bijektiv	☐	☐
Ist ABC kollinear und nicht-entartet, so ist C Mittelpunkt von AB (im 9-Pkte Modell)	☐	☐

AUFGABE
Vorweg die folgende

Definition. Sein a, b parallele und verschiedene Geraden. Sei p eine weitere zu a parallele Gerade mit $\forall X \in p : XX_a \equiv XX_b$. Diese Gerade p nennen wir die Mittelparallele von a und b.

Satz. Sei p die Mittelparallele zweier Geraden a, b. Dann gilt für jedes kollineare Dreieck APB mit $A \in a$, $P \in p$ und $B \in b$ die Kongruenz $AP \equiv PB$, d.h. P ist der Mittelpunkt der Seite AB.

a) Man zeichne eine passende Figur.

b) Man sortiere die einzelnen Beweisschritte in eine schlüssige Reihenfolge.

(1) Da p parallel zu $a = \overline{AC}$ und N Mittelpunkt von BC ist, folgt mit dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck ABC, dass der Schnittpunkt P von p mit der Geraden $\overline{AB}$ der Mittelpunkt der Seite AB ist.

(2) Dann ist ABC ein echtes Dreieck.

(3) Wenn $\overline{AB} \perp a$ gilt die Behauptung nach Definition von p.

(4) Sei APB ein kollineares Dreieck mit $A \in a$, $P \in p$ und $B \in b$.

(5) Damit gilt die Behauptung $AP \equiv PB$.

(6) Sei nun $\overline{AB}$ zu a nicht senkrecht und sei $C := B_a$

(7) Dann sind A, P, B nach Definition paarweise verschieden und liegen auf der Geraden $\overline{AB}$.

(8) Dann ist nach Definition von p dieser Schnittpunkt N der Mittelpunkt der Seite BC.

(9) Sei N der Schnittpunkt von $\overline{BC}$ mit p.

Meine Reihenfolge lautet

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

AUFGABE

Sei ABC ein echtes Dreieck, h die Höhenlinie von C aus, $X \in h$, M der Mittelpunkt von BC und Y der Verdopplungspunkt von XM. Man zeige: Der Mittelpunkt von AY liegt auf dem Mittellot von AB.

a) Man zeichne eine passende Figur.

b) Man sortiere die einzelnen Beweisschritte in eine schlüssige Reihenfolge.

(1) Dann h die Höhenlinie von C aus ist, ist $h = \overline{BC}$.

(2) Da Y der Verdopplungspunkt von XM ist, gilt damit $Y = B$.

(3) $\square$. Fall. $X \neq C$.

(4) Damit liegt D auch auf dem Mittellot von AB.

(5) Da nach Voraussetzung $h = \overline{XC}$ die Höhenlinie auf AB ist, gilt auch $\overline{BY} \perp \overline{AB}$.

(6) $\square$. Fall $h \parallel \overline{BC}$.

(7) Also folgt wie oben nach Thales $AD \equiv DB$, also gilt damit auch $D \in A \oplus B$, d.h. D liegt auf dem Mittellot von AB.

(8) Damit ist ACB rechtwinklig, und da Y auf $h = \overline{BC}$ liegt ist auch AYB rechtwinklig.

(9) Wegen Thales gilt für den Mittelpunkt D von AY insbesondere $AD \equiv BD$, also ist damit D auf dem Mittellot von AB.

(10) Wir führen den Beweis mit einer Fallunterscheidung.

(11) Folglich ist D der Mittelpunkt von AB.

(12) Dann ist $XBYC$ ein echtes Viereck und da M der gemeinsame Mittelpunkt der Diagonalen XY und BC ist, ist nach dem Diagonalensatz $XBYC$ ein Parallelogramm.

(13) Also gilt $\overline{BY} \parallel \overline{XC}$.

(14) $\square$. Fall. $X = C$.

(15) Sei D der Mittelpunkt von AY.

(16) $\square$. Fall $h \nparallel \overline{BC}$.

(17) Da D als Mittelpunkt von AY auf $\overline{AY}$ liegt, ist AYB wieder ein (echtes und) rechtwinkliges Dreieck.

Meine Reihenfolge lautet

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$