ÜBUNG 10

In der kommenden Woche können wir leider die Vorlesung nicht online anbieten.

AUFGABE 1

Man zeige für jeden symmetrischen Drachen ABCD die folgende Äquivalenz:

$$ABCD \text{ hat einen Umkreis} \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC} \text{ und } \overline{CD} \perp \overline{DA}.$$

AUFGABE 2

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, w eine Winkelhalbierende von ABC bei A und m das Mittellot von BC.
Man zeige ohne Verwendung des Umkreis-Winkelhalbierenden-Satzes (den werden wir am Montag in der Vorlesung behandeln): m, w schneiden sich auf dem Thaleskreis von ABC.

AUFGABE 3

Sei ABC ein echtes Dreieck und M der Mittelpunkt von AC und $X \in \overline{MB}$. Man betrachte den Schnittpunkt Y von $\overline{AX}$ mit $\overline{BC}$.

a) Man zeichne die Figur mit GeoGebra und variiere die Lage der Punkte.

b) Man zeige: Wenn X der $2:1$ Teilungspunkt von BM ist, dann ist Y der Mittelpunkt von BC.

c) Sei X der Mittelpunkt der Strecke BM.

   (i) Man zeige: Y ist der $2:1$ Teilungspunkt von CB.

   (ii) Man zeige: Sei D ein Punkt so gewählt, dass $ABDC$ ein Parallelogramm ist und sei H der Schnittpunkt von $\overline{AX}$ mit $\overline{BD}$. Dann ist Y der $2:1$ Teilungspunkt von AH.

AUFGABE 4

Sei ABC ein echtes Dreieck. Man zeige:

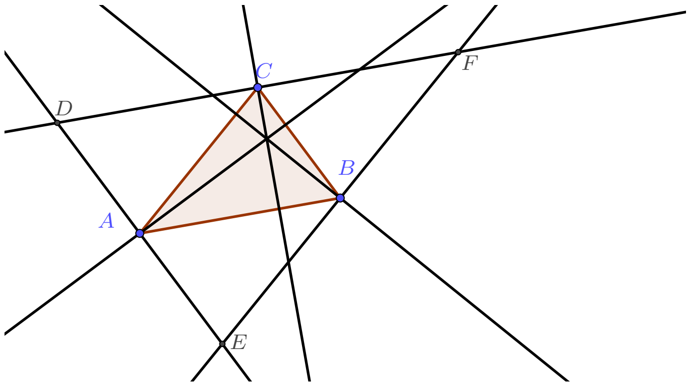
Der Lotfußpunkt von B auf $\overline{AC}$ liegt auf dem Umkreis des Dreiecks $ABA_{\overline{BC}}$.

AUFGABE 5

Gilt für jedes echte Dreieck ABC die Aussage: Die Seitenhalbierendenlinie von C ist eine Winkelhalbierende bei C Genau dann, wenn ABC gleichschenklig ist?

AUFGABE 6

Es folgt nun ein (fast zu) ausführlicher Beweis mit 22 Zeilen des bereits bekannten Satzes, dass sich die drei Höhenlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, allerdings ist die Rei- henfolge der einzelnen Beweisschritte etwas durcheinander geraten. Bringen Sie die Schritte in eine sinnvolle Reihenfolge (es sind gewisse Variationen möglich). Zur Hilfe sei folgende Skizze gegeben:



Satz. *Die drei Höhenlinien eines echtes Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis.

(1.) für die gilt: $AE \equiv AD$

(2.) damit schneiden sich in jedem echten Dreieck die drei Höhenlinien in einem Punkt

(3.) also gilt $h_A = D \oplus E$, $h_B = E \oplus F$ und $h_C = F \oplus D$

(4.) seien $D \in g \cap h$, $E \in h \cap i$ und $F \in gcapi$ die jeweiligen Schnittpunkte

(5.) sei h die Parallele durch A zur Geraden durch B und C

(6.) da ABC echt ist, schneiden sich g und h, h und i bzw. g und i

(7.) da $h \parallel \overline{CB}$ und $A, D \in h$ und $g \parallel \overline{AB}$ und $C, D \in g$ gilt, folgt $ABCD$ ist ein Parallelogramm

(8.) da sich nach einem Satz aus der Vorlesung die drei Mittelsenkrechten der Seiten in einem Punkt, (9.) damit sind die Höhenlinien die Mittelsenkrechten des Dreiecks DEF

(10.) also gilt auch hier mit dem Diagonalensatz $CB \equiv AE$

(11.) insgesamt hat man paarweise verschiedene Punkte E, A, D, die allesamt auf einer Geraden, nämlich h, liegen

(12.) sei ABC ein echtes Dreieck

(13.) also ist A der Mittelpunkt der echten Strecke ED

(14.) sei g die Parallele durch C zur Geraden durch A und B

(15.) also sind die drei Höhenlinien h_A, h_B , h_C die drei Mittelsenkrechten von DE, EF und FD

(16.) vollkommen analog erhält man, dass auch B der Mittelpunkt der echten Strecke EF und C der Mittelpunkt der echten Strecke DF ist

(17.) also ist ABC das Seitenmittendreieck von DEF

(18.) mit dem Diagonalensatz folgt $CB \equiv AD$

(19.) seien h_A, h_B , h_C die Höhenlinien von ABC

(20.) sei i die Parallele durch B zur Geraden durch A und C

(21.) nämlich dem Umkreismittelpunkt, schneiden, schneiden sich auch die drei Höhenlinien des Dreiecks ABC in einem Punkt

(22.) analog folgt $EBCA$ ist ein Parallelogramm

$\square$