Übung 9

In der Vorlesung am Mittwoch wurde besprochen, wie unsere gewohnten „Rechengesetze bzw. Rechenregeln“ aus der Schule mit den Eigenschaften einer Gruppe zusammenhängen, dies aber ohne Torten, Wasserstände, Waagen o.ä.
Wir wollen nun ausschließlich mit Hilfe unserer Definitionen und Eigenschaften, die wir an Gruppen gestellt haben, viele bekannte Regeln aus der Schule herleiten. Bevor wir uns an den Speisetisch der „Regeln“ setzen, müssen wir Besteck und einige harmlose Ingredienzien, meist Bezeichnungs- und Abkürzungskonventionen bereitstellen, um im Bild zu bleiben (siehe unten).
Ihnen wird - wie erwähnt - dabei auffallen, dass wir einige dieser Regeln schon in abstrakteren Situationen also allgemein in einer Gruppe $(G, *)$ bewiesen haben. Ganz bewusst sollen sie sich diese (in einem „anderen Gewand“) nochmals klarmachen und unter den neuen Begebenheiten beweisen.

Die sorgfältige Bearbeitung dieses Übungsblatts verfolgt das Ziel, ein vertieftes Verständnis für die Prinzipien der Buchstabenrechnung zu fördern. Dabei soll deutlich werden, dass sich die gesamte schulische Algebra im Kern auf wenige, fundamentale und intuitiv nachvollziehbare Rechenregeln zurückführen lässt. Ein sicheres Beherrschen dieser elementaren Regeln bildet die Grundlage für kompetenzorientiertes mathematisches Arbeiten – sowohl in der Schule als auch im Studium.

Wir haben bereits festgestellt und nehmen ab nun dieses als Grundlage des Übungsblattes, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot) := (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind. Wir wissen, dass die darin involvierten Verknüpfungen „$+$“ und „$\cdot$“ auch in gemeinsamen Kontexten in der Schule vorkommen, so zum Beispiel beim Vereinfachen des Terms $T(x, y) = (x + y) \cdot (x + 2y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Das Zusammenspiel dieser Verknüpfungen müssen wir organisieren. Dazu definieren wir, wie auch am Mittwoch in der Vorlesung kurz besprochen wird, eine neue Grundregel, nämlich (**G5**).

Definition [Distributivgesetz]

(**G5**) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ erfüllen das Distributivgesetz, d.h.

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \ : \ a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Es folgen weitere übliche Definitionen bzw. Abkürzungen

Definition[Bezeichnungen für neutrale und inverse Elemente]
Wir definieren

- Das neutrale Element e in $(\mathbb{R}, +)$ bezeichnen wir mit 0, also $e = 0$.
- Das neutrale Element e in $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ bezeichnen wir mit 1, also $e = 1$.
- Das zu a inverse Element a' in $(\mathbb{R}, +)$ bezeichnen wir mit $(-a)$, also $a' = (-a)$.
- Das zu a inverse Element a' in $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ bezeichnen wir mit a^{-1}, also $a' = a^{-1}$.

Die letzten Abkürzungen definieren wir durch

Definition[abkürzende Bezeichnungen]
Wir definieren für alle reellen Zahlen a, b, c

- $-a := (-a)$
- $a - b := a + (-b)$ (Minus als Rechenzeichen)
- $\dfrac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{b}, b \neq 0$ (Brüche)
- $a^2 := a \cdot a$ (Exponenten)
- $a + b + c := a + (b + c) = (a + b) + c$ (Klammereinsparungsregel)
- $abc := a \cdot b \cdot c := a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Klammereinsparungsregel)

Es folgen nun die angekündigten Aufgaben, wobei Begründungen jeweils zu dokumentieren sind, z.B. in der Form

$$\ldots \underset{\text{wegen } (G1) \text{ in } (\mathbb{R},+)}{=} \ldots$$

AUFGABE 1
Man beweise:

a) Die neutralen Elemente in $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R}^*\cdot)$ sind eindeutig bestimmt.

b) Die zu a inversen Elemente in $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ sind eindeutig bestimmt.

AUFGABE 2 (Invertierungen)
Man beweise:

a) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(-(-a)) = a$.

b) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}^*$ gilt: $((a^{-1})^{-1}) = a$.

AUFGABE 3 (Kürzungen)
Man beweise:

a) Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $a + b = a + c$ folgt $b = c$.

b) Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ gilt: Aus $a \cdot b = a \cdot c$ folgt $b = c$.

AUFGABE 4
Man beweise:

a) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot 0 = 0$.

b) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(-1) \cdot a = -a$.

AUFGABE 5 (Gleichungen)
Man beweise:

a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x := b - a$.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}^*$ hat die Gleichung $a \cdot x =$b genau eine Lösung, nämlich $x := \frac{b}{a}$.

AUFGABE 6 (Vorzeichenregeln)
Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

a) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

AUFGABE 7 (Annulierungsregel)
Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

AUFGABE 8 (Bruchrechenregeln)
Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $b, d \neq 0$ gilt:

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $c \neq 0$.