ÜBUNG 10

Wir hatten in der Vorlesung einen Ersatz für das oft fehlende Maximum einer reellen Menge gesucht (und gefunden) und hatten dann definiert

Definition[kleinste obere Schranke - Supremum].
Eine reelle Zahl s ist genau dann ein Supremum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ [im Zeichen $s = \sup M$], wenn

i) für jedes $y \in M$ gilt: $y \leq s$, und

ii) keine Zahl x kleiner als s ist eine weitere obere Schranke von M, d.h. für alle $x < s$ gibt es mindestens eine Zahl $y \in M$ mit $x < y$.

Nun hatten wir folgende oft nützliche Variante für *ii*) inhaltlich diskutiert

ii)' Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in M$ mit $s - \epsilon < y$

Man beweise nun die Gleichwertigkeit von ii) und ii)', also:

AUFGABE 1

Sei $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig: keine reelle Zahl x kleiner als s ist eine weitere obere Schranke von T $\Leftrightarrow$ für jedes reelles $\epsilon > 0$ gibt es ein $t \in T$ mit $s - \epsilon < t$

AUFGABE 2

Man zeige:
Sei A eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen. Für $t \in \mathbb{R}$ sei eine Menge $t + A$ definiert durch $t + A := \{t + a \mid a \in A\}$. Dann gilt

$$\sup(c + A) = c + \sup A$$

Man formuliere und beweise eine entsprechende Aussage für eine Menge $c \cdot A$.
Hinweis: Man untersuche zunächst konkrete Beispiele mit $c < 0$ und $c \geq 0$.

AUFGABE 3

Man gebe für die folgenden Aussagen Beispiele oder begründe, dass es keine gibt.

a) Alle Mengen mit einem Maximum enthalten auch ein Minimum.

b) Es gibt eine Menge B mit $\inf B \geq \sup B$.

c) Es gibt eine endliche Menge, die ihr Infimum aber nicht ihr Supremum enthält.

d) Es gibt eine nach oben beschränkte Teilmenge von der rationalen Zahlen, die ihr Suprmum aber nicht ihr Infimum enthält.

AUFGABE 4

Für reelle Mengen A, B definiere man $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Man zeige zunächst an einem Beispiel dann allgemein die Gültigkeit von

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

AUFGABE 5

Man gebe ohne Beweis inf und sup (wenn sie existieren) von folgenden Mengen an:

a) $A = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}$

b) $B = \{4 - (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \left\{\frac{(-1)^m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $D = \left\{\frac{n}{3n + 4} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$