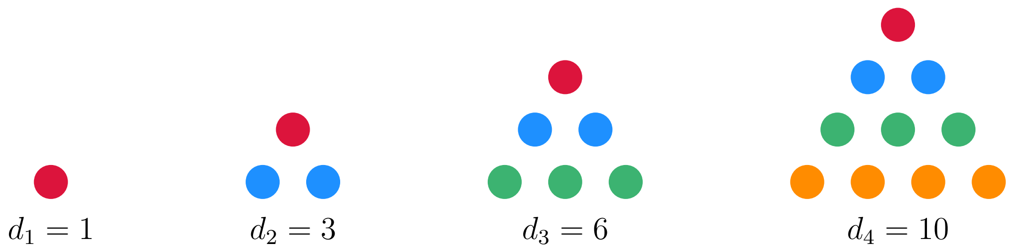
ÜBUNG 8

AUFGABE 1

In dieser kleinen Aufgabe betrachten wir eine Folge (d_n), die durch eine Bildfolge bunter Kreise visualisiert wird. Wir sehen die ersten vier Folgenglieder.



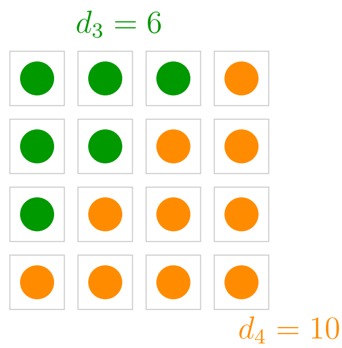
a) Setzen Sie das Muster für die beiden nächsten Folgenglieder d_5, d_6 fort.

Bestimmt fällt Ihnen auf, dass der Index k der Folge mit der Anzahl und der Farbe der neu hinzukommenden Kreise zusammenhängt: zuerst blau, dann grün, anschließend orange . . .

b) Entwickeln Sie daraus zum Startwert $d_1 = 1$ eine rekursive Bildungsvorschrift, also

$$d_{n+1} := \ldots + \ldots$$

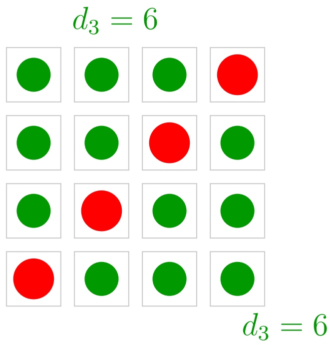
Durch geometrische Veränderungen einer Figur, kann man oft zu ganz anderen Einsichten gelangen.
Betrachten wir beispielsweise die beiden aufeinanderfolgenden Glieder d_3, d_4. Bilden wir die Summe der beiden, ergibt sich eine Quadratzahl, nämlich $6 + 10 = 16 = 4^2$.
Das folgende Bild visualisiert den Zusammenhang.



$$d_3 + d_4 = 16 = 4^2$$

c) Untersuchen Sie, ob sich dieser Zusammenhang auch bei anderen Folgengliedern ergibt und formulieren Sie eine Verallgemeinerung.

d) Entwickeln Sie zunächst einen konkreten Term, der zur folgenden Veranschaulichung führt.



$$\textbf{\textit{Mein Term lautet}}: \quad \ldots + \ldots + \ldots = 16 = 4^2$$

e) Nun können Sie sicher eine Verallgemeinerung $n^2 = \ldots$ angeben.

f) Visualisieren und begründen Sie die folgende Gleichheit

$$d_{2n} = 2 \cdot d_n + n^2$$

zunächst für $n = 2$, dann allgemein.

g) Denken Sie sich selbst eine weitere Visualisierung in diesem Zusammenhang aus (Stichwort: Rechtecke.)

AUFGABE 2

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns wieder mit einigen schönen Zahlenfolgen, die wir auf dem letzen Übungsblatt schon studiert haben.

Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge (a_n) ist mit zwei zunächst beliebigen natürlichen Zahlen p, q rekursiv gegeben durch ihre ersten beiden Startwerte

- $a_1 = p, a_2 = q,$

und dann durch die Bildungsvorschrift mit $n > 0$

- $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n.$

Für die Startwerte $p = 1$ und $q = 2$ ergeben sich nacheinander die folgenden ersten acht Glieder der Folge (bitte überprüfen Sie die Werte, wir verrechnen uns leicht):

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1, & a_2 = 2, & a_3 = 2 - 1 = 1, \\ a_4 = 1 - 2 = -1, & a_5 = -1 - 1 = -2, & a_6 = -2 - (-1) = -1, \\ a_7 = -1 - (-2) = 1, & a_8 = 1 - (-1) = 2. & \end{array}$$

Oder kurz

$$(a_n) = (1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, \dots).$$

a) Begründen Sie, dass man jetzt ohne Rechnung alle folgenden Folgenglieder $a_9, a_{10}, \dots$ aufschreiben könnte.

b) Bestimmen Sie nun die ersten etwa zehn Folgenglieder für die neuen Startwerte $p = 2$ und $q = 5$ und geben Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zur ersten Folge an.

Sicher haben Sie festgestellt, dass sich *Sequenzen* der Folge wiederholen. Man könnte in Anlehnung an periodische Kommazahlen etwa bei $1{,}234234234\dots$ auch hier bei den Folgen von einer Folge mit *Periode* sprechen. So wollen wir für eine Folge der Zahlen

$$(1, 2, 2, 0, 3, 1, 2, 2, 0, 3, 1, 2, 2, 0, 3, \dots)$$

also sagen: diese Folge ist periodisch und hat eine Länge von 5.

Mathematisiert könnte man sagen: Eine Folge (a_n) heiße periodisch, wenn es eine natürliche Zahl k so gibt, dass für jedes Folgenglied a_n gilt: $a_n = a_{n+k}$. Im vorliegenden Fall wäre *ein* $k = 5$, denn es gilt $a_1 = 1 = a_{1+5} = a_6, a_2 = a_7, \dots$ Da natürlich dann sehr viele solche k existieren (warum eigentlich?), wählen wir für den Begriff *Länge einer Folgenperiode* das jeweils kleinste natürliche k.

c) Bestimmen Sie bei den obigen beiden Folgen jeweils die Periodenlänge.

d) Untersuchen Sie die Folge (a_n) mit beliebigen Startwerten p und q.

e) Zeigen Sie, dass sich die Zahlenfolge nach einer gewissen Anzahl von Schritten wiederholt (also periodisch ist), ganz egal, welche Anfangswerte p und q man wählt. Bestimmen Sie außerdem, welche Periodenlängen die Folge haben kann.

Jetzt schauen wir uns ähnliche Folge an, und zwar:

weitere Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge (b_n) ist mit einer zunächst beliebigen natürlichen Zahl p rekursiv gegeben durch ihre ersten beiden Startwerte

- $b_1 = p, b_2 = 2p$,und dann wieder durch obige Bildungsvorschrift mit $n > 0$
- $b_{n+2} = b_{n+1} - b_n$.

f) Bestimmen Sie nun die ersten zehn Folgenglieder von (b_n) für den Startwert $p = 2$.

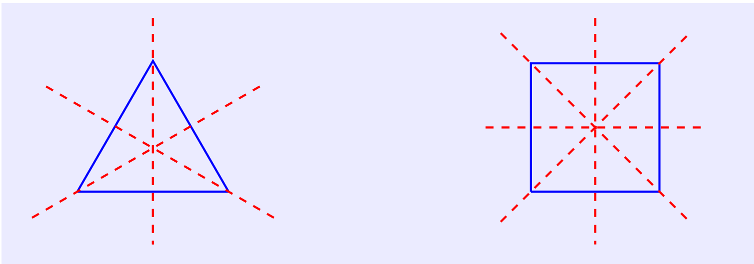
g) Untersuchen Sie die Folge (b_n) mit beliebigen Startwert p.

h) Zeigen Sie, dass auch diese Zahlenfolge nach einer gewissen Anzahl von Schritten sich wiederholt (also periodisch ist), ganz egal, welche Anfangswert p man wählt.

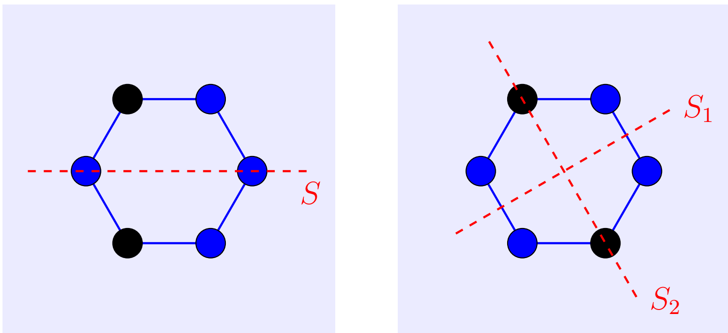
i) Bestimmen Sie außerdem, welche Periodenlängen die Folge haben kann.

AUFGABE 3

In dieser Aufgabe möchten wir Symmetriegruppen ebener und räumlicher Figuren studieren. Beispiele ebener Figuren sind das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und der Kreis, Beispiele räumlicher Figuren sind regelmäßige Tetraeder, der Würfel und die Kugel. Das Wort griechische Symmetrie bedeutet Ebenmaß, die Ordnung der Symmetriegruppe ist also ein Maß für die Symmetrie einer Figur.
Ein gleichseitiges Dreieck hat sechs Symmetrietransformationen, nämlich die Drehungen um 120° bzw. 240° (gegen den Uhrzeigersinn) um den Mittelpunkt, drei Achsenspiegelungen sowie die Identität, die wir als Drehung um 0° auffassen können. Ein Quadrat dagegen besitzt acht Symmetrietransformationen, nämlich vier Drehungen und vier Achsenspiegelungen. Man beachte, dass die Punktspiegelung am Ursprung gleich der Drehung um 180° ist.



Interessant sind auch Symmetriegruppen farbiger Objekte, d.h. wir färben Eckpunkte eines Objekts in verschiedenen Farben und suchen Symmetrietransformationen, die jede Ecken auf eine Ecke gleicher Farbe abbilden, wie auf dem letzten Übungsblatt.



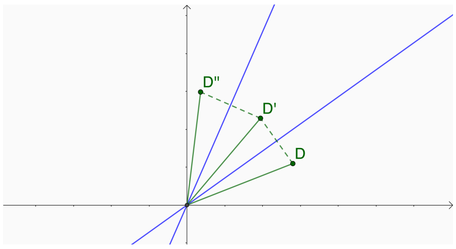
In den Beispielen erhalten wir eine Menge $G_1 = \{\mathrm{id}, S\}$ der Mächtigkeit 2 und eine Menge $G_2 = \{\mathrm{id}, S_1, S_2, D_{180^\circ}\}$ der Mächtigkeit 4. Hierbei ist id die identische Abbildung, S, S_1 und S_2 Achsenspiegelungen an den eingezeichneten Achsen und D_{180° die Drehung um 180°.
Die Mengen machen wir durch die Verkettung zu Gruppen $(G_1, \circ)$ und $(G_2, \circ)$. Zum Beispiel gilt in G_1 die Gleichung

$$S \circ S = \mathrm{id}, \tag{1}$$

da eine Spiegelung zu sich selbst invers ist. In G_2 gilt die Gleichung

$$S_2 \circ S_1 = D_{180^\circ}, \tag{2}$$

da die beiden Achsen senkrecht zueinander sind. Man beachte, dass die Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelungen an zwei Ursprungsgeraden, die sich in einem Winkel α schneiden, eine Drehung um den Winkel 2α ist, wie das folgende Bild veranschaulicht.



Nun tragen wir die Gleichungen (1) und (2) in die Verknüpfungstabellen der beiden Gruppen ein. Dabei schreiben wir Ergebnis D_{180° der Rechnung $S_2 \circ S_1$ in die Zeile S_2 und in die Spalte S_1, da wir dem Merkspruch:

„***Z**eile **z**uerst, **Sp**alte **sp**äter!*“

folgen.

$\circ$	id	S
id		
S		id

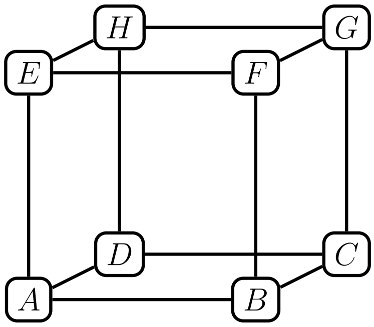
$\circ$	id	S_1	S_2	D_{180°
id				
S_1				
S_2		D_{180°		
D_{180°				

a) Vervollständigen Sie die Verknüpfungstabellen von $(G_1, \circ)$ und $(G_2, \circ)$. Es reicht eine Angabe der Ergebnisse ohne Nebenrechnungen.

b) Ermitteln Sie die Verknüpfungstabelle der Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Es reicht eine Angabe der Ergebnisse ohne Nebenrechnungen. Geben Sie den Symmetrietransformationen dabei passende Namen.

c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungstabelle einer endlichen Gruppe immer ein lateinisches Quadrat ist.

d) Nun betrachten wir einen Würfel $ABCDEFGH$. Wir interessieren uns für die Drehgruppe $(G, \circ)$ des Würfels, die Grundmenge G besteht also aus allen Drehungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden.

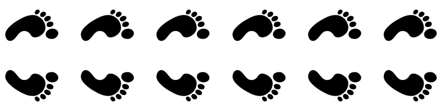


Zum Beispiel ist die Abbildung d_1 mit $A \mapsto B$, $B \mapsto C$, $C \mapsto D$, $D \mapsto A$ und $E \mapsto F$, $F \mapsto G$, $G \mapsto H$, $H \mapsto E$ eine Drehung um 90° um die Achse $\overline{MN}$, wenn M der Mittelpunkt der Grundfläche $ABCD$ und N der Mittelpunkt der Deckfläche $EFGH$ ist.

(i) Es mögen R der Mittelpunkt der Strecke AB und S der Mittelpunkt der Strecke GH sein. Ferner sei d_2 die Drehung um $\overline{RS}$ um 180°. Geben Sie die Wertetabellen der Funktionen d_2 und $d_2 \circ d_1$ an und beschreiben Sie die Abbildung $d_2 \circ d_1$ geometrisch.

(ii) Die Gruppe $(G, \circ)$ hat die Ordnung 24. Klassifizieren Sie die 24 Drehungen geometrisch.

e) Wir betrachten Muster aus Fußabdrücken, zum Beispiel den *Sprung*:

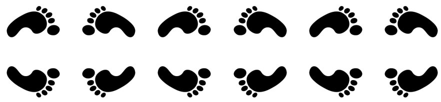


Auch hier möchten wir die Symmmetrietransformationen anschauen, die das Muster auf sich selbst abbilden. Im Beispiel des Sprungs haben wir zum Beispiel Verschiebesymmetrien $(x, y) \mapsto (x + n \cdot w, y)$, wobei $w \in \mathbb{R}^+$ die Sprungweite und $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist. Ferner weist das Muster die Spiegelsymmetrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$ auf, wenn wir die x-Achse in die Mitte der Füße legen. Hierbei stellen wir uns vor, das Muster werde in beide Seiten beliebig weit fortgesetzt.

Schreiben Sie nun möglichst viele Symmetrietransformationen zu den folgenden Mustern auf:

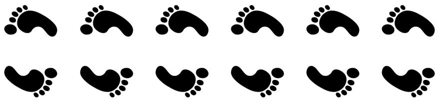
Der *Schritt*:

Der *Drehsprung*:



Der *Hüpfer* (einbeinig):

Der *Drehhüpfer* (einbeinig):



AUFGABE 4

Untersuchen Sie, welche Mengen durch die angegebenen Verknüpfungen zu Gruppen werden.

a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Addition $(x, y) \mapsto x + y$.

b) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

c) Die Menge der geraden Zahlen $2\mathbb{Z}$ mit der Addition $(x, y) \mapsto x + y$.

d) Die Menge der geraden Zahlen $2\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

e) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Mittelwertbildung $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}$.

f) Die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

g) Die Menge $\{a + b \cdot \sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Addition $(x, y) \mapsto x + y$.

h) Die Menge $\{a + b \cdot \sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.