

ÜBUNG 8

Vom Rechnen zum Verstehen – Schulalgebra mit dem Werkzeug der Gruppentheorie

In der vergangenen Vorlesungswoche haben wir gesehen, dass die „Rechenregeln“, die Ihnen aus der eigenen Schulzeit vertraut sind, keineswegs vom Himmel gefallen sind. Sie sind vielmehr direkte Konsequenzen einer einzigen, bemerkenswert kompakten Idee: der **Gruppe**. Das Besondere an diesem Zugang – wir kommen ohne Tortenstücke, Wasserstände, Waagen oder Schuldenmodelle aus. Es genügen die Gruppenaxiome und die Bereitschaft, sie konsequent anzuwenden.

Auf diesem Übungsblatt wollen wir genau das tun: Wir leiten viele aus der Schule vertraute Regeln **ausschließlich** aus den Definitionen und Eigenschaften her, die wir an eine Gruppe gestellt haben. Manche dieser Regeln haben Sie in abstrakter Form – also für eine beliebige Gruppe $(G, *)$ – bereits bewiesen. Ganz bewusst begegnen sie Ihnen hier in einem **neuen Gewand** – konkret in $(\mathbb{R}, +)$ und (\mathbb{R}^*, \cdot) . So gewinnen Sie Sicherheit, dieselbe Idee in der vertrauten Umgebung wiederzuerkennen.

Warum lohnt sich das gerade für Sie? Als angehende Grundschullehrkraft werden Sie wiederholt auf Fragen stoßen wie „Warum ist 2 mal 2 eigentlich 4 und 2 plus 2 auch?“ oder „Warum ergibt jede Zahl mal null wieder null?“. Eine tragfähige Antwort beruht weder auf einer Geschichte noch auf einem Zahlenstrahl-Trick, sondern auf dem **strukturellen Verständnis** der beteiligten Operationen. Genau dieses Verständnis möchten wir mit diesem Blatt vertiefen.

Die sorgfältige Bearbeitung verfolgt damit ein doppeltes Ziel: Sie schärft Ihren eigenen Begriff vom Rechnen und liefert Ihnen das Rüstzeug, um später **kindgerechte Erklärungen aus solidem mathematischen Boden** heraus zu entwickeln. So wird sichtbar, dass sich die gesamte schulische Algebra im Kern auf wenige fundamentale Rechenregeln zurückführen lässt – ein zentraler Baustein für kompetenzorientiertes mathematisches Arbeiten in Schule und Studium.

Vereinbarungen für dieses Übungsblatt

Wir nehmen ab nun als gesichert an: $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot) := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind **abelsche Gruppen**. Beide Verknüpfungen treten in der Schule meist gemeinsam auf – etwa beim Vereinfachen des Terms

$$T(x, y) = (x + y) \cdot (x + 2y) \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Das Zusammenspiel von „+“ und „·“ muss daher eigens geregelt werden. Wir ergänzen unsere Liste der Grundregeln deshalb um eine fünfte – wie auch in der Vorlesung am Montag kurz besprochen wird:

Definition [Distributivgesetz]

(G5) $(\mathbb{R}, +)$ und (\mathbb{R}^*, \cdot) erfüllen das **Distributivgesetz**, d. h.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Hinzu kommen die üblichen Bezeichnungen für neutrale und inverse Elemente sowie einige Abkürzungen, die uns das Aufschreiben erleichtern.

Definition[Bezeichnungen für neutrale und inverse Elemente]

Wir definieren

- Das neutrale Element e in $(\mathbb{R}, +)$ bezeichnen wir mit 0 , also $e = 0$.
- Das neutrale Element e in (\mathbb{R}^*, \cdot) bezeichnen wir mit 1 , also $e = 1$.
- Das zu a inverse Element a' in $(\mathbb{R}, +)$ bezeichnen wir mit $(-a)$, also $a' = (-a)$.
- Das zu a inverse Element a' in (\mathbb{R}^*, \cdot) bezeichnen wir mit a^{-1} , also $a' = a^{-1}$.

Definition[abkürzende Bezeichnungen]

Wir definieren für alle reellen Zahlen a, b, c

- $-a := (-a)$
- $a - b := a + (-b)$ (Minus als Rechenzeichen)
- $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}, b \neq 0$ (Brüche)
- $a^2 := a \cdot a$ (Exponenten)
- $a + b + c := a + (b + c) = (a + b) + c$ (Klammereinsparungsregel)
- $abc := a \cdot b \cdot c := a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Klammereinsparungsregel)

Hinweis zur Bearbeitung

Auf den folgenden Seiten finden Sie die angekündigten Aufgaben. Bitte dokumentieren Sie bei jeder Umformung die verwendete Regel – so wird transparent, an welcher Stelle welches Axiom in Anspruch genommen wird. Eine bewährte Notation dafür ist:

$$\dots \stackrel{=}{\text{wegen (G1) in } (\mathbb{R}, +)} \dots$$

Viel Erfolg und Freude beim Entdecken!

AUFGABE 1

Man beweise

- Die neutralen Elemente in $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind eindeutig bestimmt.
- Die zu a inversen Elemente in $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind eindeutig bestimmt.

AUFGABE 2

Man beweise

- Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $-(-a) = a$.
- Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $((a^{-1})^{-1}) = a$.

AUFGABE 3

Man beweise

- Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $a + b = a + c$ folgt $b = c$.
- Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: Aus $a \cdot b = a \cdot c$ folgt $b = c$.

AUFGABE 4

Man beweise

- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot 0 = 0$.
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(-1) \cdot a = -a$.

AUFGABE 5

Man beweise

- Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x := b - a$

- b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x := \frac{b}{a}$

AUFGABE 6

Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

- a) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.
b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

AUFGABE 7

Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

AUFGABE 8

Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $b, d \neq 0$ gilt:

- a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.
c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, c \neq 0$.