ÜBUNG 8

Folgende Aufgaben sind durch Induktion zu beweisen. Zur Erinnerung:

Satz 0.1 (Induktionsprinzip)**.** *Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ eine Aussage. Wenn*

(1) $P(1)$ wahr ist, und

(2) die Implikation $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$ auch wahr ist,

dann gilt $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $P(n)$ wahr.

AUFGABE 1

a) Für alle natürlichen Zahlen wird eine Aussage $A(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ definiert.
Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Aussage $A(n)$ wahr ist.

b) Für alle natürlichen Zahlen wird eine Aussage $B(n) : 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = 2n^2 - n$ definiert.
Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Aussage $B(n)$ wahr ist.

Ab jetzt verzichten wir auf die explizite Definition der Aussage.

AUFGABE 2

Man zeige: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

AUFGABE 3

Man zeige: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

a) $5 \mid (n^5 - n)$

b) $24 \mid (5^{2n} - 1)$

AUFGABE 4

Man zeige: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

a) $4^n > n^3$

b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2 \cdot \sqrt{n} - 1$