ÜBUNG 7

AUFGABE 1

In dieser Aufgabe möchten wir ein weiteres Merkmal besprechen, das manche Funktionen erfüllen und andere nicht, die *Beschränkheit*. Hier nennen wir eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ *nach oben beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle Stellen $x \in D$ des Definitionsbereichs die Ungleichung $f(x) \leq M$ gilt. In diesem Fall nennen wir M auch eine *obere Schranke* von f.
Zum Beispiel ist die *Versiera der Agnesi*, die manche Leute frecherweise die Hexe der Agnesi nennen, also die Parameterfunktion $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

für jede Wahl des Parameters als eine positive reelle Zahl a nach oben beschränkt. Hier sehen Sie ein Bild mit den Graphen der Funktionenvielfalt für $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Was ist eine obere Schranke? Die Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine obere Schranke, denn für jede reelle Zahl x gilt

$$f_a(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \leq \frac{a^3}{a^2} = a.$$

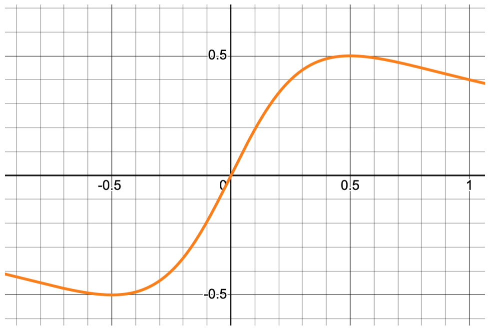
Hier vergrößern wir den Bruch (mit positivem Zähler und Nenner), wenn wir seinen Nenner kleiner machen.

a) Formulieren Sie nun eine Definition, die beschreibt, wann eine Funktion nach unten beschränkt ist, und illustrieren Sie die Definition an einem passenden Beispiel.

b) Beweisen Sie, dass die Parameterfunktion $g_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_a(x) = \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

für jede positive reelle Zahl a sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist. Hier ist ein Link zum Ausprobieren.



Funktionen, die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt sind, nennen wir auch einfach kurz *beschränkt*.

c) Gemäß unserer Definition ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, wenn sie die Aussage

$$\exists M \in \mathbb{R}\colon \forall x \in D\colon f(x) \leq M$$

erfüllt.

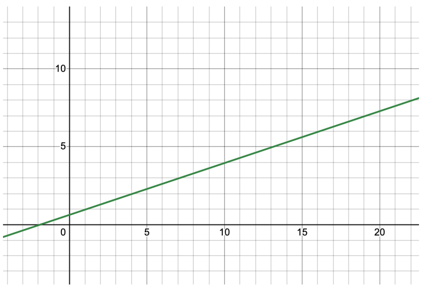
Demnach ist eine Funktion nicht nach oben beschränkt, wenn sie die Aussage

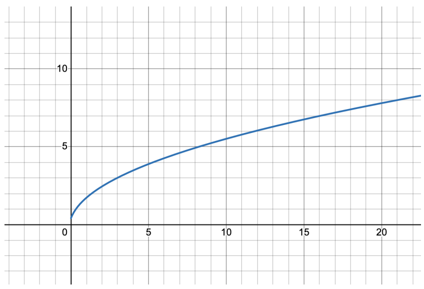
$$\forall M \in \mathbb{R}\colon \exists x \in D\colon f(x) > M$$

erfüllt. Zeigen Sie nun, dass die folgenden Funktionen nicht nach oben beschränkt sind, indem Sie zu jeder denkbaren reellen Zahl $M \in \mathbb{R}$ eine Zahl $x \in D$ mit $f(x) > M$ konstruieren.

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{5}{8}$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{10 \cdot x + 2} - \sqrt{2 \cdot x + 1}$.





AUFGABE 2

Eine *Permutation* einer Menge M ist eine Funktion $p\colon M \to M$, die bijektiv ist und jedem Element der Menge M ein Element aus derselben Menge M zuordnet. Kurz gesagt: Eine Permutation ist eine bijektive Selbstabbildung.
Zum Beispiel ist die Abbildung $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ mit $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$ und $3 \mapsto 1$ eine Permutation, da sie injektiv und surjektiv ist und die Menge $\{1,2,3\}$ auf sich selbst abbildet.

a) Geben Sie ein Beispiel einer Permutation der Menge $\{1,2,3,4\}$ an.

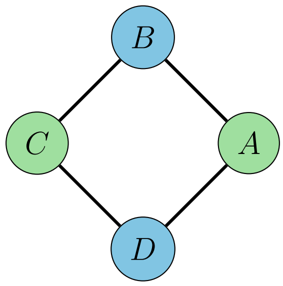
b) Zeigen Sie, dass die Funktion $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $l(x) = 3 \cdot x + 5$ eine Permutation der Menge der reellen Zahlen ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ mit

$$h(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

eine Permutation der Menge $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ ist.

Nun betrachten wir Permutationen, die durch Symmetrietransformationen entstehen. Zum Beispiel sei $ABCD$ ein Quadrat mit zwei grünen Ecken A und C und zwei blauen Ecken B und D.



Eine *Symmetrietransformation* ist nun eine Funktion $f\colon \{A,B,C,D\} \to \{A,B,C,D\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Funktion f ist eine Permutation.

(ii) Die Funktion f bewahrt die Farbe, d.h. sie bildet eine grüne Ecke immer auf eine grüne Ecke und eine blaue Ecke immer auf eine blaue Ecke ab.

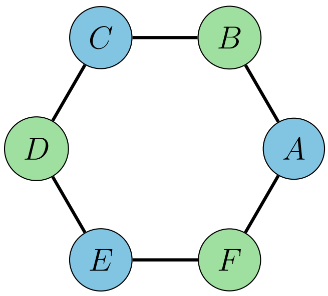
(iii) Die Funktion bewahrt die Nachbarschaft, d.h. sie bildet benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken ab.

Das Quadrat $ABCD$ besitzt genau vier Symmetrietransformationen:

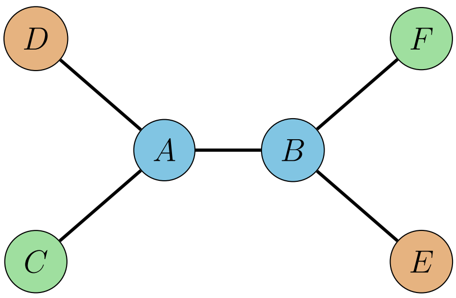
- Die Funktion f_1 mit $f_1(A) = A$, $f_1(B) = B$, $f_1(C) = C$ und $f_1(D) = D$ ist eine Symmetrietransformation. Sie ist die *identische Abbildung*.
- Die Funktion f_2 mit $f_2(A) = A$, $f_2(B) = D$, $f_2(C) = C$ und $f_2(D) = B$ ist eine Symmetrietransformation. Sie beschreibt eine *Achsenspiegelung*.
- Die Funktion f_3 mit $f_3(A) = C$, $f_3(B) = B$, $f_3(C) = A$ und $f_3(D) = D$ ist eine Symmetrietransformation. Sie ist ebenfalls eine *Achsenspiegelung*.
- Die Funktion f_4 mit $f_4(A) = C$, $f_4(B) = D$, $f_4(C) = A$ und $f_4(D) = B$ ist eine Symmetrietransformation. Sie beschreibt eine *Punktspiegelung*.

Nun sind die Studierenden eingeladen, Symmetrietransformationen zu finden.

d) Geben Sie alle Symmetrietransformationen des zweifarbigen Sechsecks an. Beschreiben Sie, was die Transformationen geometrisch bewirken.



e) Geben Sie alle Symmetrietransformationen der dreifarbigen Figur an. Beschreiben Sie, was die Transformationen geometrisch bewirken.



AUFGABE 3

Sicher haben Sie den Begriff einer *Folge* schon einmal gehört, vielleicht im Zusammenhang mit dem Auftrag, das Muster der Folge $2, 4, 6, 8 \ldots$ sinnvoll (was auch immer das heißt) fortzusetzen. Wir können Folgen als spezielle Funktionen $f : A \mapsto B$ etablieren, nämlich mit $A = \mathbb{N}$. Gilt für die Zielmenge $B = \mathbb{R}$, so sprechen wir von reellen Zahlenfolgen.

Dies führt uns zur:

Arbeits-Definition

Eine **Zahlenfolge** (kurz: Folge) ist eine Zuordnung, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine reelle Zahl a_n zuordnet. Wir schreiben kurz:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

Jedes a_n heißt **Folgenglied** der Folge. Die Zahl n bezeichnet den **Index** des Folgenglieds.

Wir geben erste **Beispiele** von reellen Folgen:

a) Der Term $a_n = n$ führt zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

b) $a_n = n^2$ (quadratische Folge): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$

c) $a_n = \frac{1}{n}$ (abnehmende Folge): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

d) $a_n = (-1)^n$ (alternierende Folge): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

e) $a_n = 5$ (konstante Folge): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5, 5, 5, 5, \ldots)$

Wir betrachten eine erste **Übungsaufgabe**

Aufgabe

Gegeben ist die Folge $a_n = 2n + 1$.

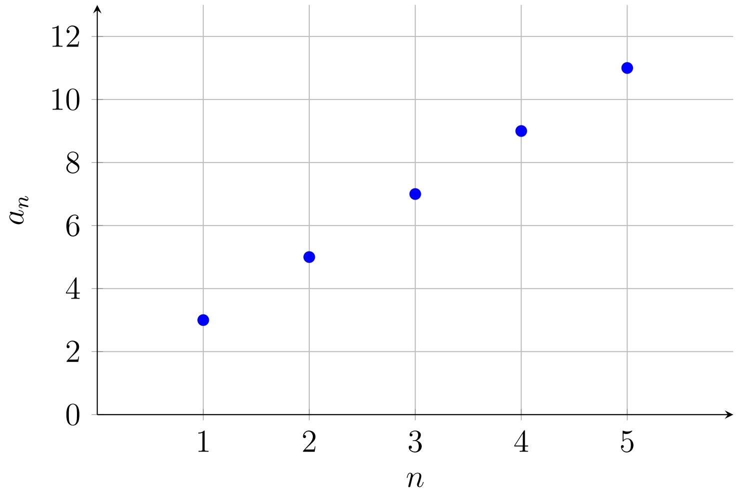
- Berechnen Sie die ersten fünf Glieder dieser Folge.
- Geben Sie eine kurze Beschreibung, wie sich die Folge verhält.

Lösung:

- Die ersten fünf Glieder lauten $(3, 5, 7, 9, 11)$
- Aufeinanderfolgende Folgenglieder besitzen eine Differenz d von 2.

Möchte man Folgen visualisieren, könnten wir unser Koordinatensystem verwenden.
Eine *Visualisierung der Folge* $a_n = 2n + 1$ wäre dann:

Darstellung der Folge $a_n = 2n + 1$



Ist ein solcher Term $a_n = 2n + 1$ einer Folge gegeben, so sprechen wir von einer **expliziten Darstellung** der Folge, man kann einfach die nächsten Folgenglieder durch Einsetzen natürlicher Zahlen berechnen.
Ist dieselbe Folge durch den Startwert $a_1 = 3$ und der Folgevorschrift $a_{n+1} = a_n + 2$ gegeben, so sprechen wir von einer **rekursiven Darstellung** der Folge.
Beide *Bildungsvorschriften* (so sagt man in der Schule) finden in verschiedenen Kontexten ihre Anwendung.
Kommen wir nun zur ersten kleinen Aufwärmaufgabe:

Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ und die Folge $b_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

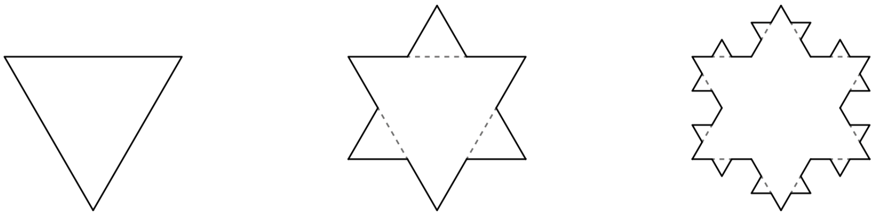
a) Berechnen Sie die ersten acht Glieder der Folgen.

b) Geben Sie eine kurze Beschreibung, wie sich die beiden Folgen verhalten.

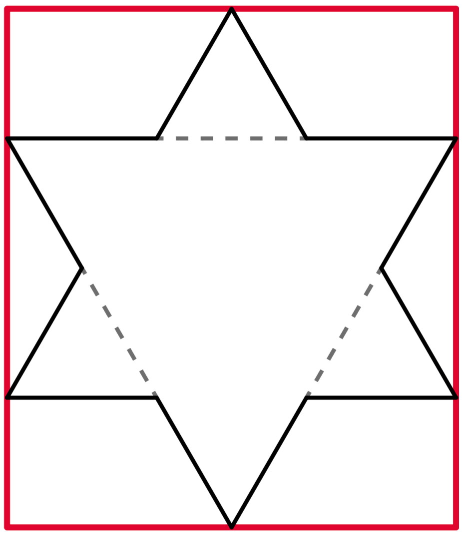
c) Erstellen Sie eine Graphische Darstellung beider Folgen.

Kommen wir zur nächsten etwas anspruchsvolleren und interessanten Aufgabe. Es geht um die *Koch'sche Schneeflocke*, benannt nach Niels Fabian Helge von Koch (1870 – 1924), einem schwedischen Mathematiker. Wir beobachten eine Folge von geometrischen Figuren, die nach einer bestimmten Vorschrift (einem bestimmten Muster) fortwährend verändert werden. Die verbalisierte Vorschrift lautet:

> In einem gleichseitigen Dreieck mit einer Seitenlänge von $1cm$ wird jede Seite in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt und über der mittleren Teilstrecke jeweils ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Die mittlere Teilstrecke wird jeweils gelöscht. Dieses Verfahren wird mehrmals wiederholt. Die folgende Bildsequenz soll Ihnen den Vorgang visualisieren.



d) Wie Sie feststellen können, vergrößert sich der Umfang U der Figur in jedem Schritt. Betrachten Sie das folgende Bild:



Sie erkennen daran, dass die Figur nicht über den Rand des roten Rechtecks "hinauswachsen" kann. Wie groß kann dann der Inhalt der Flocke höchstens sein? Obwohl des immer länger werdenden Umfangs ist der Flächeninhalt der Figur endlich - eine erstaunliche und bemerkenswerte Eigenschaft.

e) Stellen Sie eine rekursive und eine explizite Bildungsvorschrift für den Umfang der *Koch'schen Schneeflocke* nach n Schritten auf und berechnen Sie damit den Umfang der "Schneeflocke" nach dem 10. Schritt.

f) Bestimmen Sie näherungsweise, ab welchem n der Umfang der *Koch'schen Schneeflocke* größer als der Erdumfang (ca. $40000km$) ist. Geben Sie zunächst ruhig eine Schätzung ab.

Eine weitere sehr bekannte Folge (f_n) mit $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \geq 1$ ist unter dem Namen **Fibonacci-Folge** berühmt geworden.
Es existieren tausende von Beispielen zu dieser Folge.

g) Berechnen Sie die ersten acht Glieder der Folgen.

h) Geben Sie eine kurze Beschreibung, wie sich die beiden Folgen verhalten.

i) Recherchieren Sie im Internet über Bedeutung und Auftreten der Fibonacci-Folge in der Natur, den Naturwissenschaften und in der Mathematik.

j) Es wird eine Wand aus (2×1)-Ziegeln gebaut (siehe Bild unten). Die Wand soll eine Höhe von 2 haben. Es sei $a_1 = 1$ und für $n \geq 2$ sei (a_n) die Anzahl solcher möglicher Wände mit der Länge $n - 1$, also Länge 1, Länge 2, Länge 3, ...

Untersuchen Sie, ob es sich bei (a_n) um die Fibonacci-Folge handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.