ÜBUNG 7

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 5. Mai bis 12 Uhr

AUFGABE 1

In der letzten Vorlesung wurden die beiden folgenden Sätze thematisiert, wobei Satz 0.1 noch nicht bewiesen wurde.

Satz 0.1. *Sei A, B nichtleere Mengen und $B \subseteq A$. Wenn es eine injektive Funktion von A in B gibt, dann gibt es auch eine bijektive Funktion von A auf B.*

Satz 0.2 (SCHRÖDER-BERNSTEIN-THEOREM)**.** *Seien A, B nichtleere Mengen. Wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann gilt $|A| = |B|$.*

Unten ist eine Kurzform des Beweises vom SCHRÖDER-BERNSTEIN-THEOREM (hatten wir auch schon in der Vorlesung besprochen), allerdings ist sie ein wenig „durcheinander geraten“. Man ordne (und vervollständige) die Kurzform und formuliere einen schönen Beweistext.

daher gilt $|A| = |B|$

$g_1^{-1} : W(g) \to B$ ist bijektiv

ex. injektive Funktionen f, g mit $f : A \to B, g : B \to A$

$g_1 : B \to W(g)$ definiert $g_1(x) = g(x)$ für alle $x \in B$ ist bijektiv

daher ist $g_1^{-1} \circ h : A \to B$ eine bijektive Funktion

$h : A \to W(g)$ und $g_1^{-1} : W(g) \to B$ sind bijektive Funktionen

da $W(g) \subseteq A$, ex eine bijektive Funktion $h : A \to W(g)$

$g_1 \circ f : A \to W(g)$ ist injektiv

AUFGABE 2

Man zeige mit Hilfe von Satz 0.2 die Gleichmächtigkeit der Mengen $(0, 1)$ und $[0, 1]$, also die Gleichmächtigkeit des offenen Intervalls $(0, 1)$ und des geschlossenen Intervalls $[0, 1]$.

AUFGABE 3

Wir definieren für jede reelle Zahl r eine Abrundungsfunktion $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ durch

$$r \mapsto \lfloor r \rfloor := max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}$$

a) Man zeige, dass $\lfloor . \rfloor$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

b) Sei f eine Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der ganzen Zahlen, definiert durch

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ ,\ n \mapsto f(n) := (-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Man zeige, dass dann f eine Bijektion ist. Was bedeutet dies inhaltlich?

AUFGABE 4

Man zeige, dass die Menge $(0, 2) := \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$ gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen ist, d.h. es gilt

$$|(0, 2)| = |\mathbb{R}|,$$

indem man den in der Vorlesung getätigten Beweis für $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$ umschreibt.

Hinweis. Für den Beweis kann man die reelle Funktion f definiert durch $f : (0, 2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \frac{1-x}{x\cdot(x-2)}$ verwenden.

AUFGABE 5

Sei eine Menge S definiert durch

$$S := \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Man beweise oder widerlege:
Es gilt $|\mathbb{N}| = |S|$.