Übung 6

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe soll es um Geraden in einer Ebene gehen. Als Ebene E wählen wir unser bekanntes Koordinatensystem, also $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit seiner bekannten Veranschaulichung.
Wir definieren die Menge aller Geraden durch

$$G := \{g_{a,b} \mid g_{a,b} = \{(x, y) \mid a \cdot x + b = y\} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

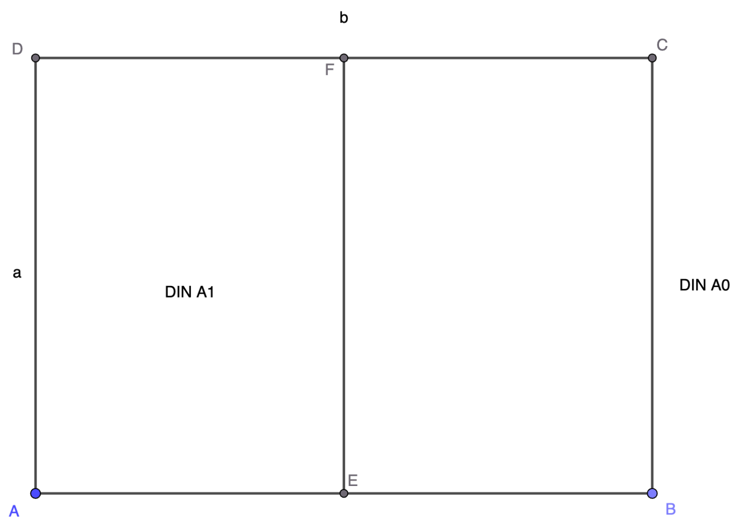
Wir ignorieren in dieser Aufgabe die zur y-Achse parallelen Geraden, also beispielsweise Teilmengen der Form $\{(2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$
Zeichnen Sie - zum Beispiel mit Desmos - die folgenden vier Geraden in E.

a) $g_{1,3}$, $g_{\frac{1}{2},-1}$, $g_{-3,0}$ und $g_{0,4}$

Die sogenannte *DIN-Norm* ist ein gutes Beispiel für die Anwendung von linearen Funktionen, also speziellen Geraden.
Alle DIN-Blätter haben dasselbe Seitenverhältnis: Länge $|AB|$ und Breite $|BC|$ stehen immer im gleichen Verhältnis zueinander, alle Rechtecke sind also ähnlich zueinander.
Ein kleineres DIN-Blatt entsteht durch Halbieren. Wenn man ein größeres DIN-Blatt an der langen Seite halbiert, erhält man das nächstkleinere Format (siehe Abbildung DIN A0 (Rechteck $ABCD$) zu DIN A1 (Rechteck $AEFD$)). Es gilt somit

$$(*)\ \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{\frac{1}{2} \cdot |AB|}$$

b) Führen Sie nun zeichnerisch dieses Halbierungsverfahren bis zu DIN A10 fort; sie würden zunächst das Rechteck $EBCF$ halbieren, usw.



Was hat das Ganze mit Proportionen zu tun?
Der Flächeninhalt eines DIN A0 Blattes ist mit $1m^2$ festgelegt. Von dort aus werden alle kleineren DIN A Größen entsprechend des oben angegebenen Verfahrens abgeleitet. Ein DIN A1 Blatt hat dann natürlich einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}m^2$.

c) Mit diesen Informationen sollen Sie jetzt die jeweiligen Seitenlängen der 11 Rechtecke bestimmen. Kontrollieren Sie ruhig am Ende Ihrer Berechnungen Ihre Ergebnisse mit den Seitenlängen eines üblichen DIN A4 Blattes.

Jetzt dürfen Sie in diesem Kontext eine lineare Funktion der DIN Norm ($d(x) = m \cdot x + c$) aufstellen, die jeder Breite x die entsprechende Länge $d(x)$ zuordnet, also:

d) Bestimmen Sie reelle Zahlen m, d so, dass die Funktion d zu jeder Breite die Länge als Wert annimmt. Die Zahl m nennt man den Proportionalitätsfaktor.

e) Zeichnen Sie die Funktion d und stellen Sie die Rechtecke $DINA0, \ldots, DINA6$ passend in dasselbe Koordinatensystem so dar, dass der funktionale Zusammenhang von Breite und Länge sichtbar wird.

Sie werden festgestellt haben, dass $d = 0$ zu setzen ist. Solche Funktionen sind die aus Klasse 7 bekannten *Proportionalen Zuordnungen*. Diese Geraden gehen alle durch den Ursprung, also den Punkt $U = (0, 0)$.
Zum Abschluss wollen wir uns noch mit der Steigung von Geraden beschäftigen. Bekanntlich haben Geraden konstante Steigungen. Der Proportionalitätsfaktor - in unserem obigen Fall a - ist ein Gradmesser der Steigung: ist er positiv ($a > 0$), so ist die Funktion streng monoton steigend, ist er negativ ($a < 0$), so fällt die Funktion streng monoton.

f) Zeigen Sie diese beiden Eigenschaften kurz durch eine kleine Umformung.

In der Oberstufe haben Sie den Differenzenquotienten als Maß für die mittlere Steigung in einem Intervall einer beliebigen Funktion kennengelernt.

g) Sei $f \in G$ eine lineare Funktion und seien t_1, t_2 zwei verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass dann $a = \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}$ gilt. Zeigen Sie auch, dass hier stets $f(t_1) + f(t_2) = f(t_1 + t_2)$ und $f(a \cdot t_1) = a \cdot f(t_1)$ gilt.

Jetzt dürfen Sie noch zwei besondere Lagen von Geraden untersuchen und begründen.

Sind $g, h \in G$ mit $g(x) = a_1 x + b_1$ und $f(x) = a_2 x + b_2$ dann gilt:

h) Die Geraden g, h sind genau dann parallel zueinander, wenn $a_1 = a_2$ gilt.

i) Die Geraden g, h sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $a_1 \cdot a_2 = -1$ gilt.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe wollen wir uns ein wenig mit quadratischen Funktionen oder auch ganzrationalen Funktionen vom Grad 2 beschäftigen.
Reelle Funktionen f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heißen *quadratische Funktionen*. Spielen Sie ein wenig mit dem folgenden Link zu quadratischen Funktionen, um sich die wesentlichen Eigenschaften wieder in Erinnerung zu rufen, hier finden Sie einen Link zum Ausprobieren.

a) (mündlich) Beschreiben Sie den Einfluss der drei Parameter a, b, c auf die Form und Lage der Funktion.

Betrachten Sie nun den sogenannten Scheitelpunkt S der Funktion. Ist eine quadratischen Funktionen in der Form $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$ (natürlich mit $a \neq 0$) gegeben, lässt sich der Scheitelpunkt direkt ablesen.

b) Geben Sie den Scheitelpunkt S der Funktion $f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 + 1$ konkret an, kontrollieren Sie Ihr Ergebnis in Desmos und verallgemeinern Sie den Scheitelpunkt bei der allgemeinen Darstellung $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$.

c) Begründen Sie algebraisch an der obigen Funktionsgleichung, dass der Scheitelpunkt der Punkt mit dem maximalen bzw. minimalen Funktionswert sein muss.

Möchte man aus der allgemeinen Darstellung $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ durch Umformungen den Scheitelpunkt ablesen, müssen einige Transformationen vorgenommen werden, Stichwort *Quadratische Ergänzung*. Zeigen Sie:

d) Ist eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ gegeben, dann lautet der Scheitelpunkt

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Bei Wikipedia kann man lesen: *Eine Veränderung des Parameters b bewirkt eine Verschiebung sowohl in $x-$ als auch in $y-$Richtung. Wird b um eins erhöht, dann wird der Graph um $\frac{1}{2a}$ Einheiten nach links und $\frac{2b+1}{4a}$ nach unten verschoben. Wird b um eins verringert, wird der Graph dagegen um $\frac{1}{2a}$ Einheiten nach rechts und $\frac{2b-1}{4a}$ nach oben verschoben.*
Link,abgerufen am 18.04.2025

e) Zeigen Sie, dass die Aussage stimmt.

Besonders auffällig ist bei quadratische Funktionen die Symmetrie. Es sieht so aus, als wenn jede quadratische Funktion zu Ihrem Scheitelpunkt symmetrisch ist. Wie könnte man diese Eigenschaft beschreiben? Sei dazu $S(s_1, s_2)$ der Scheitelpunkt einer quadratische Funktion f mit $a > 0$.

f) Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ gilt: $f(s_1 - \epsilon) = f(s_1 + \epsilon)$

Es folgt noch eine typische Schulbuch-Aufgabe in diesem Kontext, sie lautet:

g) Du planst eine neue Weide für Schafe und hast 100 Meter Zaunmaterial zur Verfügung. Deine Aufgabe ist es, eine rechteckige Fläche abzustecken, in der die Schafe so viel Platz wie möglich bekommen. Welche Maße sollte deine Weide haben?

AUFGABE 3

In dieser Aufgabe untersuchen wir Funktionen auf *Injektivität*, *Surjektivität* und *Bijektivität*. Zu diesem Zweck sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich X und dem Zielbereich Y.
Definitionen der Injektivität sind wie Brausepulver: sie kommen in verschiedenen Geschmacksrichtungen. Die Funktion f ist genau dann injektiv, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

- **Anschauliche Definition:** Die Funktion f bewahrt die Individualität in dem Sinne, dass sie niemals zwei verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf dasselbe Element im Zielbereich abbildet.

  Zum Beispiel ist die Funktion, die jedem Menschen auf der Welt seinen Geburtstag zuordnet, nicht injektiv, da die Zwillinge Paula und Louise am gleichen Tag geboren sind.

- **Gleichungslöser-Definition:** Für jedes vorgegebene Element $y \in Y$ aus dem Zielbereich hat die Gleichung $f(x) = y$ *höchstens* eine Lösung.

  Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10 \cdot x - x^2$ nicht injektiv, da die Gleichung $10 \cdot x - x^2 = 21$ zwei Lösungen hat, wenn wir $y = 21$ vorgeben, nämlich $x = 3$ und $x = 7$.

- **Formale Definition:** $\forall x_1, x_2 \in X\colon (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$.

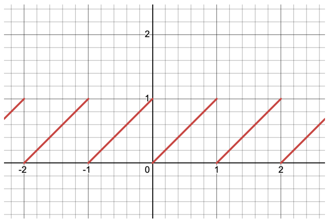
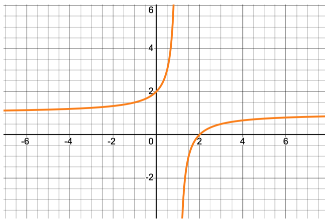
  Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 2$ injektiv, wie der folgende Beweis zeigt:

  – Es seien $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_2 \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen.

- Angenommen, es gelte $f(x_1) = f(x_2)$.
- Gemäß der Definitionsvorschrift gilt dann $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$.
- Eine Subtraktion von 2 impliziert $3x_1 = 3x_2$.
- Eine Division durch 3 impliziert $x_1 = x_2$. $\square$

Nun laden wir die Studierenden ein, zu beurteilen, ob die folgenden Funktionen injektiv sind und passende Begründungen zu finden.

a) Die Funktion $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $s(x) = x - \lfloor x \rfloor$ heißt *Nachkommaanteil* oder *Sägezahnfunktion* (oder in Anspielung auf Bill Murray *Murmeltierfunktion*). Überprüfen Sie s auf Injektivität.

b) Amelia, Lea, Isla und Henriette sitzen im Wartezimmer einer Arztpraxis, um sich gegen Grippe impfen zu lassen. Die Funktion i ordne jeder Patientin die Injektionsnadel zu, mit der sie heute geimpft werden soll. Überprüfen Sie i auf Injektivität.

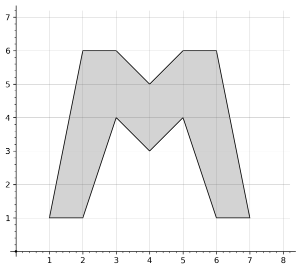
c) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$h(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Der Graph von h beschreibt eine *Hyperbel*. Überprüfen Sie h auf Injektivität.

d) Wir betrachten die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Die Funktion $t\colon P(A) \to P(B)$ sei definiert durch $t(X) = X \cap B$ für alle Teilmengen $X \subseteq A$. Überprüfen Sie t auf Injektivität.

e) Die Funktion $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei definiert durch $(x, y) \mapsto (x + y, y)$. Zum Beispiel ist $d((3, 4)) = (3 + 4, 4) = (7, 4)$.



Berechnen und skizzieren Sie die Bilder der Punkte $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,4)$, $(6,1)$, $(7,1)$, $(6,6)$, $(5,6)$, $(4,5)$, $(3,6)$ und $(2,6)$, also der Eckpunkte des abgebildeten M, unter der Funktion d. Beschreiben Sie den geometrischen Effekt der Funktion und überprüfen Sie, ob d injektiv ist.

Auch die Surjektivität können wir auf verschiedene äquivalente Weisen formulieren. Die Funktion f ist genau dann surjektiv, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

- **Anschauliche Definition:** Die Funktion f trifft jedes Element im Zielbereich.

  Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ nicht surjektiv, da sich eine negative Zahl sich nicht als das Quadrat einer reellen Zahl darstellen lässt.

- **Gleichungslöser-Definition:** Für jedes vorgegebene Element $y \in Y$ aus dem Zielbereich hat die Gleichung $f(x) = y$ *mindestens* eine Lösung.

  Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \cdot x + 1$ surjektiv, da die Gleichung $2 \cdot x + 1 = y \Leftrightarrow 2 \cdot x = y - 1$ immer $x = \frac{y-1}{2}$ als Lösung hat, egal wie wir die Zahl y vorgeben.

- **Formale Definition:** $\forall y \in Y\colon \exists x \in X\colon f(x) = y$.

  Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ nicht surjektiv, wie der folgende Beweis zeigt:

  Wir müssen zeigen:

  $$\neg \left(\forall y \in Y\colon \exists x \in X\colon f(x) = y\right).$$

  Nach den Regeln der Logik ist diese Aussage äquivalent zu:

  $$\exists y \in Y\colon \forall x \in X\colon f(x) \neq y.$$

  Diese Aussage zeigen wir, indem wir die Quantorenkette auflösen.

  - Wähle $y = 1 \in (0,\infty)$ als Zeugin der Nicht-Surjektivität.
  - Sei $x \in (0,\infty)$ eine beliebige Zahl aus dem Definitionsbereich von f.
  - Dann ist x entweder größer als 1, gleich 1 oder kleiner als 1.
    Falls $x > 1$, so gilt $f(x) = x + \frac{1}{x} > x > 1$.
    Falls $x = 1$, so gilt $f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2 > 1$.
    Falls $x < 1$, so gilt $f(x) = x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} > 1$.
    In keinem Fall gilt $f(x) = 1$. $\square$

Nun sind wieder die Studierenden eingeladen, selbstständige Beweise zu führen, dieses Mal zur Surjektivität.

f) Es sei E die Menge der Einwohnerinnen und Einwohner der Bundesrepublik Deutschland und B die Menge der 16 Bundesländer. Die Funktion $w\colon E \to B$ weise einem Menschen das Bundesland zu, in dem er (mit Erstwohnsitz) lebt. Überprüfen Sie, ob w surjektiv ist.

g) Die Bruchfunktion $b\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$b(x) = \frac{x + 2025}{x}.$$

Skizzieren Sie den Graphen von b mit Hilfe eines Grafikrechners und überprüfen Sie mit einem Beweis, ob h surjektiv ist.

h) Die Funktion $q\colon \mathbb{R} \to [1, \infty)$ sei definiert durch $q(x) = x^2 - 6x + 10$. Skizzieren Sie den Graphen von q mit Hilfe eines Grafikrechners und überprüfen Sie mit einem passenden Beweis, ob q surjektiv ist.

i) Amina und Kevin backen wieder einmal Pizza!

Amina findet in ihrer Küche eine Menge $A = \{\texttt{paprika}, \texttt{mais}, \texttt{champignons}\}$ von Belägen vor. Sie sucht eine Teilmenge $A' \subseteq A$ der Zutaten aus, die sie zum Pizzabacken mitbringt. Kevin hat in seiner Küche eine Menge $B = \{\texttt{salami}, \texttt{oliven}, \texttt{mais}\}$ an Belägen und bringt eine Teilmenge $B' \subseteq B$ der Zutaten zum Pizzabacken mit. Amina und Kevin belegen ihre gemeinsame Pizza nun mit den mitgebrachten Zutaten $A' \cup B'$.

Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) &\to P(A \cup B) \\ (A', B') &\mapsto A' \cup B' \end{aligned}$$

surjektiv ist.

j) Überprüfen Sie, ob die Verdopplungsfunktion $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Funktionsvorschrift $d(n) = 2n$ surjektiv ist.

Die Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

k) Formulieren Sie eine anschauliche Definition, eine Gleichungslöser-Definition und eine formale Definition der Bijektivität der Funktion f. Illustrieren Sie jede Definition mit einem passenden Beispiel.

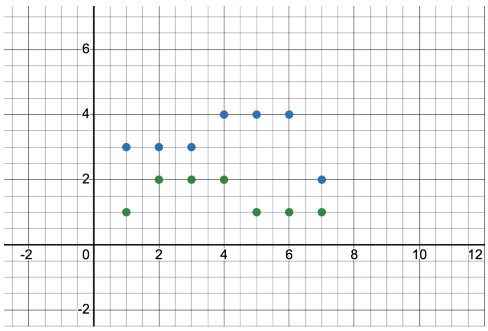
AUFGABE 4

In dieser Aufgabe schauen wir uns an, wie wir aus Funktionen neue Funktionen konstruieren können. Die erste Möglichkeit sind die Grundrechenarten.
Ist zum Beispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = 5 \cdot x + 3$ und ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $g(x) = 4 \cdot x + 1$, so ist $(f + g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $(f + g)(x) = 9 \cdot x + 4$.

a) Berechnen Sie $(a \cdot d - b \cdot c)(x)$, falls $a, b, c, d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit $a(x) = x + 1$, $b(x) = x + 2$, $c(x) = x + 3$ und $d(x) = x + 4$ sind.

b) Es seien $f, g\colon \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 2)\}\,;$$
$$g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}\,.$$



Berechnen und skizzieren Sie die Summe $f + g$.

c) In Deutschland ernähren sich immer mehr Menschen vegetarisch.

Die Funktion $v(t)$ beschreibe die Anzahl der Vegetarierinnen und Vegetarier in Deutschland als Funktion der Zeit. Das Institut für Demoskopie Allensbach hat durch eine Umfrage zum Zeitpunkt t_1 (am Ende des letzten Jahres) den Wert $v(t_1) \approx 8{,}43 \cdot 10^6$ ermittelt.

Es sei ferner $e(t)$ die Einwohnerzahl Deutschlands als Funktion der Zeit. Das statistische Bundesamt gibt den Wert $e(t_1) \approx 8{,}36 \cdot 10^7$ an.

(i) Interpretieren Sie die Funktion $e(t) - v(t)$.

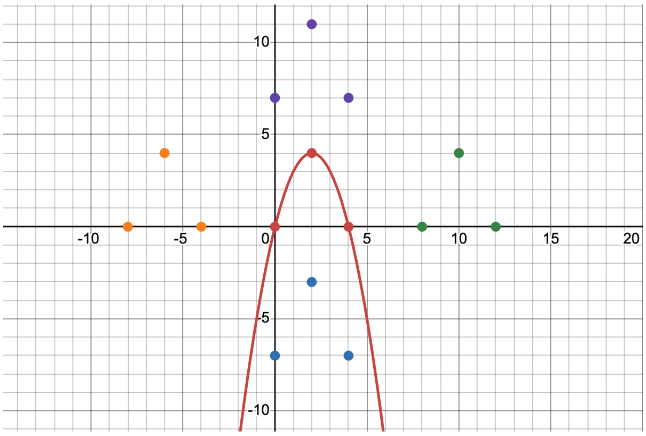
(ii) Interpretieren Sie die Funktion $v(t)/e(t)$.

(iii) Wandeln Sie die Aussage: „Die Funktion v ist monoton steigend.“ in normales Deutsch um.

(iv) Schreiben Sie die Prophezeiung: „In Zukunft wird es mehr Vegetarier als Nichtvegetarier geben.“ in mathematischen Fachjargon um.

Eine andere Konstruktion ist die Verschiebung.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ eine Funktion mit einem Graphen G_f. Dann entsteht der Graph der Funktion $x \mapsto f(x)+c$ durch eine Verschiebung von G_f (nach oben oder unten) um den Wert c. Ferner entsteht der Graph der Funktion $x \mapsto f(x-d)$ durch eine Verschiebung von G_f (nach rechts oder links) um den Wert d.

d) Für jedes Trio aus drei Punkten derselben Farbe gebe man eine Funktionsvorschrift für eine Parabel an, die durch die drei Punkte geht. Für die rote Parabel geben wir Ihnen die Vorschrift $f(x) = 4x - x^2$ vor.



Farbe	Vorschrift
Rot	$4x - x^2$
Lila	
Blau	
Grün	
Orange	

Hier finden Sie einen Link zum Ausprobieren.

e) Manchmal ist einer Aufgabe eine Funktion zu finden, die eine vorgegebene Gleichung erfüllen soll. Solche Aufgaben nennen wir *Funktionalgleichungen*. (Manche Menschen kürzen das Wort als *Funky G* ab.)

(i) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, sodass die Gleichung

$$f(x+1) - f(x) = 2 \cdot x + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an, sodass die Gleichung

$$g(x) - g(x+1) = g(x) \cdot g(x+1)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ gilt.

Nun betrachten wir noch eine weitere Konstruktion, die in unserem Repertoire nicht fehlen darf, die Verkettung von Funktionen (aka Verschachtelung oder Hintereinanderausführung).
Es seien $g\colon A \to B$ und $f\colon B \to C$ zwei Funktionen. Dann ist die Verkettung $f \circ g\colon A \to C$ definiert durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Ist zum Beispiel $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion mit $g(x) = \sqrt{x}$ und $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion mit $f(x) = x + 1$, dann ist $f \circ g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion mit

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 1,$$

was wir nicht verwechseln sollen mit

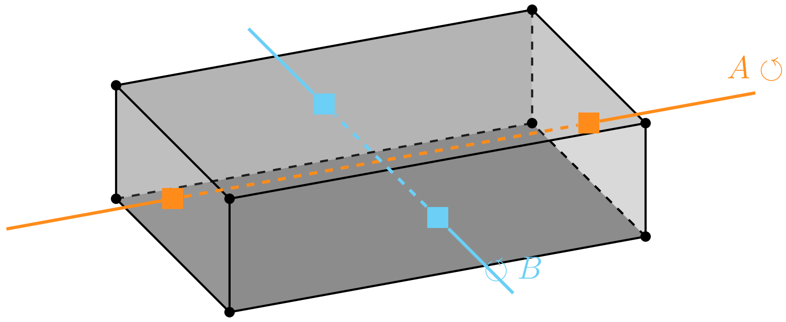
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \sqrt{x+1}.$$

f) Seien $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit $a(x) = x^2$ und $b(x) = 2x-3$. Berechnen Sie $a \circ b$ und $b \circ a$ und überzeugen Sie sich, dass $a \circ b \neq b \circ a$ gilt.

g) Wir sehen, dass die Verkettung das Kommutativgesetz $a \circ b = b \circ a$ verletzt.

Die Nichtkommutativität ist ein Phänomen, das wir auch in der Natur beobachten können. Zu diesem Zwecke nehmen Sie sich einen Backstein und führen zwei Drehungen A und B um 90° um zwei verschiedene Achsen eines Quaders aus.

Überzeugen Sie sich, dass dann auch $A \circ B \neq B \circ A$ gilt.



h) Eine Geschäftsfrau bekommt neben ihrem Grundgehalt einen Bonus, falls sie in einem Jahr Waren im Wert von mehr als 2 000 000 Euro verkauft, und zwar wird sie an den Einnahmen, die diesen Betrag überschreiten, mit 2 Prozent beteiligt.

Wir definieren zwei Funktionen

$$b(x) = 0{,}02 \cdot x, \qquad u(x) = \begin{cases} x - 2\,000\,000, & \text{falls } x > 2\,000\,000; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beschreiben Sie den Bonus der Geschäftsfrau als eine verkettete Funktion.

i) Die Funktion $t\colon x \mapsto x + \frac{11}{100} \cdot x$ beschreibt einen Preisanstieg um 11%. Die Funktion $r\colon x \mapsto x - \frac{11}{100} \cdot x$ einen Preisnachlass um 11%. Berechnen und interpretieren Sie die Funktionen $t \circ r$ und $r \circ t$.

j) Es sei $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $t(x) = 2 \cdot x^2 - 1$. Bestimmen Sie zwei reelle Zahlen a und b, sodass die Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x$ die Gleichung $t \circ u = u \circ t$ erfüllt.