ÜBUNG 6

AUFGABE 1

Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $z \mapsto f(z) := \begin{cases} 2z+1, & z \geq 0 \\ -2z, & z < 0 \end{cases}$ eine Funktion.

Wie leicht zu zeigen ist, ist f eine bijektive Funktion und $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ihre Umkehrfunktion.

$a)$ Man bestimme $f^{-1}(3), f^{-1}(4)$ und $f^{-1}(5)$.

Wir definieren eine Verknüpfung $\circ$ auf $\mathbb{N}$ so, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \circ b := f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)).$$

$b)$ Man zeige, dass im allgemeinen $a \circ b \neq a + b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

$c)$ Man zeige, dass das Verknüpfungspaar $(\mathbb{N}, \circ)$ $(G1), (G2), (G3)$ und $(G4)$ erfüllt.

$d)$ Man bestimme die Lösungen der Gleichung $x \circ x \circ 11 = 23$ in $(\mathbb{N}, \circ)$.

AUFGABE 2

Sei f eine Relation auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x \text{ oder } y = -x\}$ und sei g die bekannte reelle Funktion g definiert durch $g(x) := x^2$.

$a)$ Man beweise, dass f keine Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

$b)$ Man beweise, dass $g \circ f$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

$c)$ Ist auch die Verkettung $h \circ f$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := x^3$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$?

AUFGABE 3

a) Sei $N_3 = \{1, 2, 3\}$ und $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Man zeige durch die Angabe einer konkreten Bijektion f mit
$$f : N_3 \times N_4 \to \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 12\},$$
dass $N_3 \times N_4$ eine endliche Menge ist.

b) Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Man zeige: Die Menge $N_k \times N_l$ ist endlich.
Dabei ist wie oben $N_i := \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq i\}$.

AUFGABE 4

Man zeige die Gleichmächtigkeit der Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ mit Hilfe der Funktion

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

mit

$$(i, j) \mapsto f((i, j)) := \frac{(i + j - 2) \cdot (i + j - 1)}{2} + i.$$