

## ÜBUNG 5

### AUFGABE 1

Hier folgt eine Aufgabe (in mehreren Teilen) zur MatheZeit App. Sie brauchen diese Aufgaben nicht schriftlich abgeben, ihre Bearbeitung wird im System erfasst. Alles weitere erklären wir Ihnen am Montag in der Vorlesung, aber fangen Sie ruhig schon an. Die Aufgabentexte, die jetzt folgen, finden Sie auch alle online unter dem angegebenen link.

Bearbeitung und Abgabe digital unter  
<https://h5p.mathezeit-euf.de/task-review.html>

**Hintergrund:** Die MatheZeit-App besteht aus zwei Lernsystemen für Grundschulkindern (Klasse 1–4):

- **Knobelbox** — über 70 adaptive Aufgabentypen mit KI-Tutor (nur in der App, iPhone/iPad)
- **MatheZeiten** — interaktive Trainings mit Bildern, Audio und verschiedenen Aufgabenformaten (App + Browser)

**Ablauf:** Die gesamte Bearbeitung erfolgt geführt auf der Review-Plattform. Öffnen Sie den QR-Code oder Link, geben Sie Ihren Namen (oder Ihren Code) ein und folgen Sie den Schritten. Die Plattform weist Ihnen automatisch diese folgenden Aufgaben zu.

**Schüler-Code:** Ihren persönlichen Code finden Sie auf der Plattform — geben Sie dort einfach Ihren Namen ein. Beim Login in der App: Code eingeben, Nachname der Lehrkraft: *Lorenzen*.

**Zugang (iPhone/iPad):** Installieren Sie die App (juhu sie ist jetzt online im App Store)



**Jetzt im App Store herunterladen**

<https://apps.apple.com/de/app/mathezeit/id6757925746>

**Kein iPhone/iPad?** Kein Problem. Die Plattform erkennt Ihr Gerät und weist Ihnen stattdessen MatheZeiten-Trainings im Browser zu.

**Wählen Sie auf der Plattform Ihr Gerät (iPhone/iPad oder Laptop/Android).**

Abhängig davon erhalten Sie automatisch einen von zwei Pfaden.

— PFAD A: KNOBELBOX TESTEN (IPHONE/IPAD) —

**AUFGABEN 1–3: KNOBELBOX-AUFGABENTYPEN REVIEWEN**

Die Plattform weist Ihnen automatisch **3 Aufgabentypen** zu (bevorzugt solche, die noch wenig getestet wurden).

Für jeden der drei Typen:

- a) Öffnen Sie die **Knobelbox** in der App und wählen Sie den zugewiesenen Aufgabentyp im Filter.
- b) Spielen Sie den Typ auf verschiedenen **Schwierigkeitsstufen** (L1–L4).
- c) Beantworten Sie **absichtlich falsch**, um den **KI-Tutor** (Mazio) zu testen. Bewerten Sie: Hilft er? Verrät er die Lösung zu früh? Wie würden *Sie* es einem Kind erklären?
- d) Identifizieren Sie **typische mathematische Fehler** und Fehlvorstellungen, die Kinder bei diesem Typ machen könnten.
- e) Füllen Sie das Feedback-Formular auf der Plattform aus.

*Hinweis:* Nutzen Sie den **Melde-Button** (Flagge oben rechts) bei jedem Problem — auch bei Kleinigkeiten. Dort können Sie auch Screenshots hochladen.

— PFAD B: MATHEZEITEN TESTEN (LAPTOP/ANDROID/ALLE GERÄTE) —

**AUFGABEN 1–3: MATHEZEITEN-TRAININGS DURCHSPIELEN**

Die Plattform weist Ihnen automatisch **3 Trainings** zu.

Für jedes der drei Trainings:

- a) Öffnen Sie das Training über den Link auf der Plattform (öffnet sich im Browser).

- b) Spielen Sie es **komplett durch** (alle Level bis zum Abschluss-Screen).
- c) Bewerten Sie: Funktioniert alles? Laden die Bilder? Funktioniert Audio, Drag & Drop, Hotspots?
- d) Beurteilen Sie: Wäre das Training für ein Kind der angegebenen Klassenstufe **verständlich**?
- e) Füllen Sie das Feedback-Formular auf der Plattform aus.

**Aufgabe 4 bearbeiten alle Studierenden (unabhängig vom Gerät).**

#### **AUFGABE 4: NEUEN AUFGABENTYP ERFINDEN**

Wechseln Sie auf der Plattform zum letzten Schritt. Hier sind Sie komplett frei — je kreativer, desto besser!

- a) Erfinden Sie einen **neuen interaktiven Aufgabentyp** für Grundschulkin-der (Kl. 1–4).
- b) Denken Sie an Touchscreens: Schieben, Drehen, Bauen, Zeichnen, Puzzlen — nicht nur Quizfragen!
- c) Beschreiben Sie auf der Plattform:
  - Name, Beschreibung, Zielklasse, Kompetenzbereich
  - Spielregeln: Was tut das Kind Schritt für Schritt?
  - Je ein Beispiel für eine leichte und eine schwere Variante
  - Wie wird die Schwierigkeit gesteigert?
  - Wie sieht der Bildschirm aus?
  - Warum macht es Kindern Spaß?

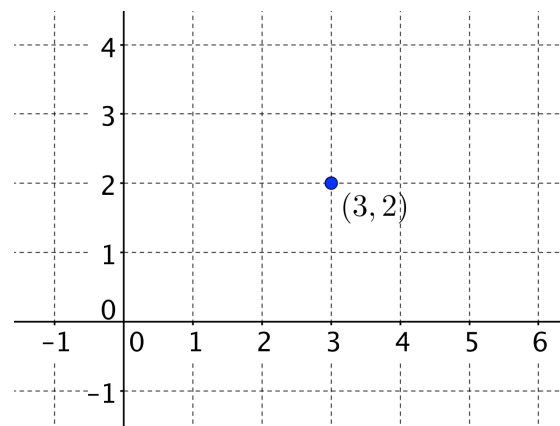
**Inspiration:** Bestehende interaktive Typen in der App: Spiegel-Schieber (Spiegel über Bilder ziehen), Gewichtswaage (Gewichte balancieren), Geobrett (Gummi-bänder spannen), Geschwindigkeitsrennen (Strecke und Zeit berechnen), Stadtwege (kürzesten Weg finden), Münzwechsler (Geld aufteilen). Alles was auf einem Tablet interaktiv Spaß macht, ist erlaubt — grenzenlose Kreativität!

**AUFGABE 2**

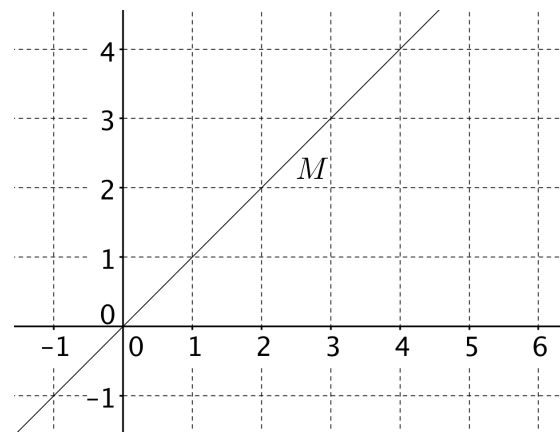
Die Veranschaulichung des kartesischen Produkts

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

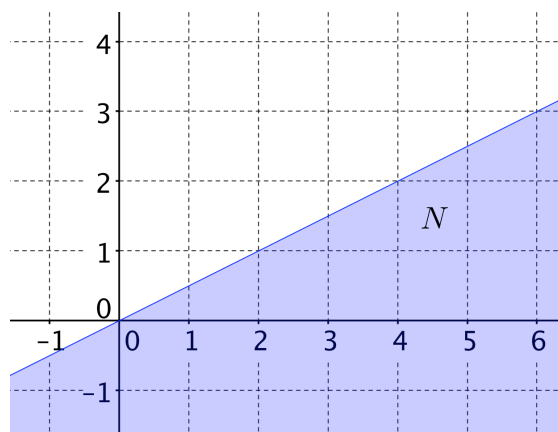
(auch kurz  $\mathbb{R}^2$  (gesprochen „ $\mathbb{R}$ -zwei“)) wurde in der Vorlesung in einem kartesischen Koordinatensystem von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vorgenommen und diskutiert. Jedes Paar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  kann dort als Punkt mit einer  $x$ - und einer  $y$ -Koordinate eingezeichnet werden. Im Bild ist das Paar  $(3, 2)$  visualisiert (in der Sprache der Funktionen: der Stelle 3 wird der Wert 2 zugeordnet). Natürlich kann auch jedem Punkt der Ebene nach Festlegung zweier nichtparalleler Geraden durch senkrechte Projektionen auf den beiden Geraden in eindeutiger Weise zwei reelle Zahlen zugeordnet werden.



Man kann natürlich auch Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  visualisieren. Machen Sie sich klar, dass im folgenden Bild eine Visualisierung der Menge  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$  dargestellt ist.



Machen Sie sich nun klar, dass das folgende Bild eine Visualisierung der Menge  $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{2}x\}$  zeigt.



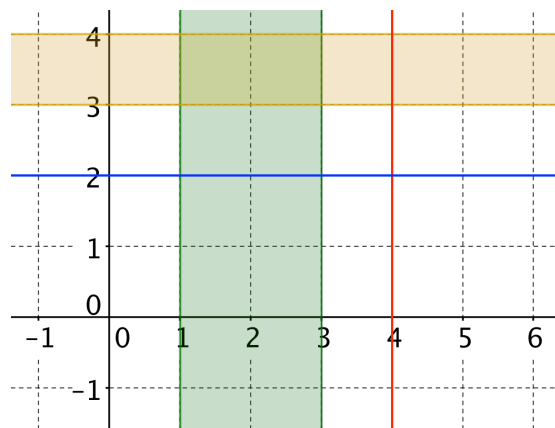
Spezielle Teilmengen der reellen Zahlen sind Intervalle. Wir definieren

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

für beliebige reelle Zahlen  $a, b$  mit  $a \leq b$  und nennen  $[a, b]$  das abgeschlossene Intervall mit der linken Intervallgrenze  $a$  und der rechten Intervallgrenze  $b$ . Machen Sie sich klar, wie die Veranschaulichung eines Intervalls auf der Zahlengeraden aussieht.

a) Identifizieren Sie die folgenden Mengen. Dabei ist zu beachten, dass einige Mengen auf verschiedene Arten ausgedrückt wurden.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 3 \leq y \leq 4\}$
- $C = \mathbb{R} \times \{2\}$ .
- $D = [1, 3] \times \mathbb{R}$
- $E = \mathbb{R} \times [3, 4]$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\}$
- $G = [1, 3] \times [3, 4]$
- $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq y \leq 4\}$
- $I = \{4\} \times \mathbb{R}$ .



b) Visualisieren Sie die folgenden Mengen in einem Koordinatensystem:

- (i)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 4\}$
- (ii)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4 = 4y\}$
- (iii)  $C = \{0\} \times \mathbb{R}$
- (iv)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3\}$
- (v)  $E = \emptyset \times \mathbb{R}$
- (vi)  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$
- (vii)  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 2\}$

c) Gegeben seien nun folgende Mengen:

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
  - $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
  - $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3 \wedge y - 2 \leq x \leq 4 - y\}$
  - $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3 \wedge 4 - y \leq x \leq 7 - y\}$
- (i) Bestimmen und skizzieren Sie  $A \cup B \cup C \cup D$  und  $A \cap B \cap C \cap D$ .
  - (ii) Bestimmen Sie nun  $A \cup B \cup C \cup D$  und  $A \cap B \cap C \cap D$  für den Fall, dass  $x, y \in \mathbb{N}$  sind.

**AUFGABE 3**

In dieser Aufgabe soll es um Geraden in einer Ebene gehen. Als Ebene  $E$  wählen wir unser bekanntes Koordinatensystem, also  $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit seiner bekannten Veranschaulichung.

Wir definieren die Menge aller Geraden durch

$$G := \{g_{a,b} \mid g_{a,b} = \{(x, y) \mid a \cdot x + b = y\} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir ignorieren in dieser Aufgabe die zur y-Achse parallelen Geraden, also beispielsweise Teilmengen der Form  $\{(2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Zeichnen Sie - zum Beispiel mit Desmos - die folgenden vier Geraden in  $E$ .

a)  $g_{1,3}$ ,  $g_{\frac{1}{2}, -1}$ ,  $g_{-3,0}$  und  $g_{0,4}$

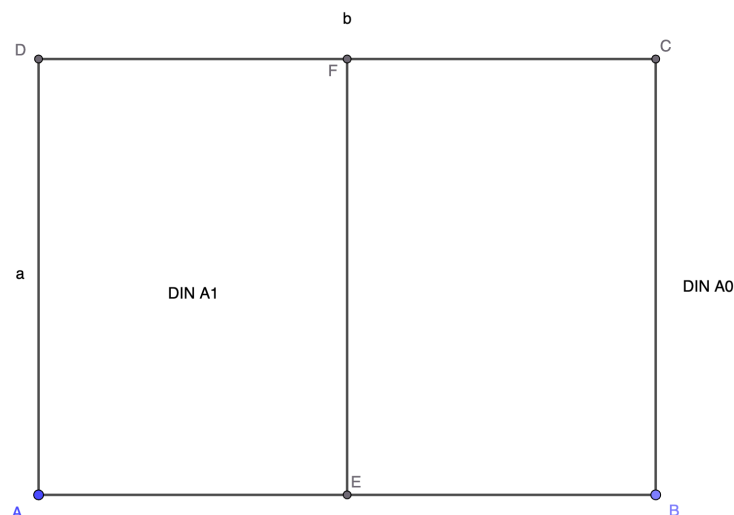
Die sogenannte *DIN-Norm* ist ein gutes Beispiel für die Anwendung von linearen Funktionen, also speziellen Geraden.

Alle DIN-Blätter haben dasselbe Seitenverhältnis: Länge  $|AB|$  und Breite  $|BC|$  stehen immer im gleichen Verhältnis zueinander, alle Rechtecke sind also ähnlich zueinander.

Ein kleineres DIN-Blatt entsteht durch Halbieren. Wenn man ein größeres DIN-Blatt an der langen Seite halbiert, erhält man das nächstkleinere Format (siehe Abbildung DIN A0 (Rechteck  $ABCD$ ) zu DIN A1 (Rechteck  $A E F D$ )). Es gilt somit

$$(*) \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{\frac{1}{2} \cdot |AB|}$$

b) Führen Sie nun zeichnerisch dieses Halbierungsverfahren bis zu DIN A10 fort; sie würden zunächst das Rechteck  $EBCF$  halbieren, usw.



Was hat das Ganze mit Proportionen zu tun?

Der Flächeninhalt eines DIN A0 Blattes ist mit  $1m^2$  festgelegt. Von dort aus werden alle kleineren DIN A Größen entsprechend des oben angegebenen Verfahrens abgeleitet. Ein DIN A1 Blatt hat dann natürlich einen Flächeninhalt von  $\frac{1}{2}m^2$ .

- c) Mit diesen Informationen sollen Sie jetzt die jeweiligen Seitenlängen der 11 Rechtecke bestimmen. Kontrollieren Sie ruhig am Ende Ihrer Berechnungen Ihre Ergebnisse mit den Seitenlängen eines üblichen DIN A4 Blattes.

Jetzt dürfen Sie in diesem Kontext eine lineare Funktion der DIN Norm ( $d(x) = m \cdot x + c$ ) aufstellen, die jeder Breite  $x$  die entsprechende Länge  $d(x)$  zuordnet, also:

- d) Bestimmen Sie reelle Zahlen  $m, c$  so, dass die Funktion  $d$  zu jeder Breite die Länge als Wert annimmt. Die Zahl  $m$  nennt man den Proportionalitätsfaktor.
- e) Zeichnen Sie die Funktion  $d$  und stellen Sie die Rechtecke  $DINA0, \dots, DINA6$  passend in dasselbe Koordinatensystem so dar, dass der funktionale Zusammenhang von Breite und Länge sichtbar wird.

Sie werden festgestellt haben, dass  $c = 0$  zu setzen ist. Solche Funktionen sind die aus Klasse 7 bekannten *Proportionalen Zuordnungen*. Diese Geraden gehen alle durch den Ursprung, also den Punkt  $U = (0, 0)$ .

Zum Abschluss wollen wir uns noch mit der Steigung von Geraden beschäftigen. Bekanntlich haben Geraden konstante Steigungen. Der Proportionalitätsfaktor - in unserem obigen Fall  $a$  - ist ein Gradmesser der Steigung: ist er positiv ( $a > 0$ ), so ist die Funktion streng monoton steigend, ist er negativ ( $a < 0$ ), so fällt die Funktion streng monoton.

- f) Zeigen Sie diese beiden Eigenschaften kurz durch eine kleine Umformung.

In der Oberstufe haben Sie den Differenzenquotienten als Maß für die mittlere Steigung in einem Intervall einer beliebigen Funktion kennengelernt.

- g) Sei  $f \in G$  eine lineare Funktion und seien  $t_1, t_2$  zwei verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass dann  $a = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$  gilt. Zeigen Sie auch, dass hier stets  $f(t_1) + f(t_2) = f(t_1 + t_2)$  und  $f(a \cdot t_1) = a \cdot f(t_1)$  gilt.

Jetzt dürfen Sie noch zwei besondere Lagen von Geraden untersuchen und begründen.

Sind  $g, h \in G$  mit  $g(x) = a_1x + b_1$  und  $f(x) = a_2x + b_2$  dann gilt:

- h) Die Geraden  $g, h$  sind genau dann parallel zueinander, wenn  $a_1 = a_2$  gilt.
- i) Die Geraden  $g, h$  sind genau dann senkrecht zueinander, wenn  $a_1 \cdot a_2 = -1$  gilt.

**AUFGABE 4** (mit Korrektur)

In dieser Aufgabe wollen wir uns ein wenig mit quadratischen Funktionen oder auch ganzrationalen Funktionen vom Grad 2 beschäftigen.

Reelle Funktionen  $f$  mit  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  und  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  heißen *quadratische Funktionen*. Spielen Sie ein wenig mit dem folgenden Link zu quadratischen Funktionen, um sich die wesentlichen Eigenschaften wieder in Erinnerung zu rufen, hier finden Sie einen [Link](#) zum Ausprobieren.

- a) (mündlich) Beschreiben Sie den Einfluss der drei Parameter  $a, b, c$  auf die Form und Lage der Funktion.

Betrachten Sie nun den sogenannten Scheitelpunkt  $S$  der Funktion. Ist eine quadratische Funktionen in der Form  $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$  (natürlich mit  $a \neq 0$ ) gegeben, lässt sich der Scheitelpunkt direkt ablesen.

- b) Geben Sie den Scheitelpunkt  $S$  der Funktion  $f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 + 1$  konkret an, kontrollieren Sie Ihr Ergebnis in Desmos und verallgemeinern Sie den Scheitelpunkt bei der allgemeinen Darstellung  $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$ .
- c) Begründen Sie algebraisch an der obigen Funktionsgleichung, dass der Scheitelpunkt der Punkt mit dem maximalen bzw. minimalen Funktionswert sein muss.

Möchte man aus der allgemeinen Darstellung  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  durch Umformungen den Scheitelpunkt ablesen, müssen einige Transformationen vorgenommen werden, Stichwort *Quadratische Ergänzung*. Zeigen Sie:

- d) Ist eine quadratische Funktion der Form  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  gegeben, dann lautet der Scheitelpunkt

$$S = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a} \right)$$

Bei Wikipedia kann man lesen: *Eine Veränderung des Parameters  $b$  bewirkt eine Verschiebung sowohl in  $x$ - als auch in  $y$ -Richtung. Wird  $b$  um eins erhöht, dann wird der Graph um  $\frac{1}{2a}$  Einheiten nach links und  $\frac{2b+1}{4a}$  nach unten verschoben. Wird  $b$  um eins verringert, wird der Graph dagegen um  $\frac{1}{2a}$  Einheiten nach rechts und  $\frac{2b-1}{4a}$  nach oben verschoben.*

[Link, abgerufen am 18.04.2025](#)

e) Zeigen Sie, dass die Aussage stimmt.

Besonders auffällig ist bei quadratische Funktionen die Symmetrie. Es sieht so aus, als wenn jede quadratische Funktion zu Ihrem Scheitelpunkt symmetrisch ist. Wie könnte man diese Eigenschaft beschreiben? Sei dazu  $S(s_1, s_2)$  der Scheitelpunkt einer quadratische Funktion  $f$  mit  $a > 0$ .

f) Zeigen Sie, dass für alle  $\epsilon \in \mathbb{R}$  gilt:  $f(s_1 - \epsilon) = f(s_1 + \epsilon)$

Es folgt noch eine typische Schulbuch-Aufgabe in diesem Kontext, sie lautet:

g) Du planst eine neue Weide für Schafe und hast 100 Meter Zaunmaterial zur Verfügung. Deine Aufgabe ist es, eine rechteckige Fläche abzustecken, in der die Schafe so viel Platz wie möglich bekommen. Welche Maße sollte deine Weide haben?

#### AUFGABE 5 (mit Korrektur)

In dieser Aufgabe untersuchen wir Funktionen auf Surjektivität und Bijektivität. Zu diesem Zweck sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $X$  und dem Zielbereich  $Y$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

- **Anschauliche Definition:** Die Funktion  $f$  trifft jedes Element im Zielbereich.

Zum Beispiel ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  nicht surjektiv, da sich eine negative Zahl nicht als das Quadrat einer reellen Zahl darstellen lässt.

- **Gleichungslöser-Definition:** Für jedes vorgegebene Element  $y \in Y$  aus dem Zielbereich hat die Gleichung  $f(x) = y$  mindestens eine Lösung.

Zum Beispiel ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 2 \cdot x + 1$  surjektiv, da die Gleichung  $2 \cdot x + 1 = y \Leftrightarrow 2 \cdot x = y - 1$  immer  $x = \frac{y-1}{2}$  als Lösung hat, egal wie wir die Zahl  $y$  vorgeben.

- **Formale Definition:**  $\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$ .

Zum Beispiel ist die Funktion  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  mit  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  nicht surjektiv, wie der folgende Beweis zeigt:

Wir müssen zeigen:

$$\neg(\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y).$$

Nach den Regeln der Logik ist diese Aussage äquivalent zu:

$$\exists y \in Y : \forall x \in X : f(x) \neq y.$$

Diese Aussage zeigen wir, indem wir die Quantorenkette auflösen.

- Wähle  $y = 1 \in (0, \infty)$  als Zeugin der Nicht-Surjektivität.
- Sei  $x \in (0, \infty)$  eine beliebige Zahl aus dem Definitionsbereich von  $f$ .
- Dann ist  $x$  entweder größer als 1, gleich 1 oder kleiner als 1.
  - Falls  $x > 1$ , so gilt  $f(x) = x + \frac{1}{x} > x > 1$ .
  - Falls  $x = 1$ , so gilt  $f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2 > 1$ .
  - Falls  $x < 1$ , so gilt  $f(x) = x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} > 1$ .
  - In keinem Fall gilt  $f(x) = 1$ .  $\square$

Nun sind wieder die Studierenden eingeladen, selbstständige Beweise zu führen, dieses Mal zur Surjektivität.

- a) Es sei  $E$  die Menge der Einwohnerinnen und Einwohner der Bundesrepublik Deutschland und  $B$  die Menge der 16 Bundesländer. Die Funktion  $w: E \rightarrow B$  weise einem Menschen das Bundesland zu, in dem er (mit Erstwohnsitz) lebt. Überprüfen Sie, ob  $w$  surjektiv ist.
- b) Die Bruchfunktion  $b: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$b(x) = \frac{x + 2026}{x}.$$

Skizzieren Sie den Graphen von  $b$  mit Hilfe eines Grafikrechners und überprüfen Sie mit einem Beweis, ob  $b$  surjektiv ist.

- c) Die Funktion  $q: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$  sei definiert durch  $q(x) = x^2 - 6x + 10$ . Skizzieren Sie den Graphen von  $q$  mit Hilfe eines Grafikrechners und überprüfen Sie mit einem passenden Beweis, ob  $q$  surjektiv ist.
- d) Überprüfen Sie, ob die Verdopplungsfunktion  $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Funktionsvorschrift  $d(n) = 2n$  surjektiv ist.

Die Funktion  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

- e) Formulieren Sie eine anschauliche Definition, eine Gleichungslöser-Definition und eine formale Definition der Bijektivität der Funktion  $f$ . Illustrieren Sie jede Definition mit einem passenden Beispiel.