ÜBUNG 5

AUFGABE 1

Man bestimme drei verschiedene bijektive Funktionen f, g, h mit $f, g, h : [1, 3] \to [2, 6]$.

Hinweis: Für reelle a, b wird definiert: $[a, b] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

AUFGABE 2

Man untersuche die folgenden Funktionen f, g, h auf Injektivität und Surjektivität (mit Beweis)

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (3x - 2, 5y + 7)$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{5\},\ x \mapsto \frac{5x+1}{x-2}$

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ (Fallunterscheidung)

d) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ (Fallunterscheidung)

AUFGABE 3

Man beweise oder widerlege:

a) Es gibt Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ so, dass f nicht surjektiv ist aber die Verkettung $g \circ f$.

b) Es gibt Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ so, dass f nicht injektiv ist aber die Verkettung $g \circ f$.

c) Seien f, g, h reelle Funktionen (also Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$).
Dann gilt $(g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$

d) Seien f, g, h reelle Funktionen (also Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$).
Dann gilt $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$

AUFGABE 4

Man zeige: Es gibt eine Permutation π von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } |\pi(n) - n| = 1.$$

AUFGABE 5

a) Sei $S = \{a, b, c, d\}$ eine 4-elementige Menge und sei T die 6-elementige Menge aller 2-elementigen Teilmengen von S.
Man zeige: Es gibt eine injektive Funktion $f : S \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, |T|\}$ so, dass die Funktion $g : T \to \{1, 2, 3, \ldots, |T|\}$ mit $\{i, j\} \mapsto g\big(\{i, j\}\big) := |f(i) - f(j)|$ bijektiv ist.

b) Sei $S = \{a, b, c, d, e\}$ eine 5-elementige Menge und sei T die 10-elementige Menge aller 2-elementigen Teilmengen von S.
Man zeige: Es gibt keine injektive Funktion $f : S \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, |T|\}$ so, dass die Funktion $g : T \to \{1, 2, 3, \ldots, |T|\}$ mit $\{i, j\} \mapsto g\big(\{i, j\}\big) := |f(i) - f(j)|$ bijektiv ist.

AUFGABE OHNE ABGABE

Student C. aus Kleinkleckersdorf schreibt: Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f((r, s)) = 4r + 5s$ ist 100%ig surjektiv, denn sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dann ist $x, y \in \mathbb{R}$ und da $4, 5 \in \mathbb{R}$ sind, gilt damit $4x, 5y \in \mathbb{R}$ und schließlich damit $4x + 5y \in \mathbb{R}$. Warum studiert C. nicht an der EUF?

☐ Behauptung falsch und Beweis falsch ☐ Behauptung falsch und Beweis wahr

☐ Behauptung wahr und Beweis falsch ☐ Behauptung wahr und Beweis wahr