Übung 4

Aufgabe 1

Bei Puzzles und Rätseln geht es oft darum, Zahlen, Buchstaben, Symbole, Farben, Personen oder andere Dinge in einem Quadrat anzuordnen, sodass kein Element in einer Zeile oder in einer Spalte mehrfach vorkommt.
Ein Beispiel: „Ordnen Sie die Buben, Damen, Könige und Asse eines Skatspiels in vier Reihen mit jeweils vier Karten an, sodass kein Bild und keine Farbe zweimal in einer Reihe oder in einer Spalte erscheint.“

$\clubsuit A \quad \clubsuit K \quad \clubsuit D \quad \clubsuit B$

$\spadesuit A \quad \spadesuit K \quad \spadesuit D \quad \spadesuit B$

$\heartsuit A \quad \heartsuit K \quad \heartsuit D \quad \heartsuit B$

$\diamondsuit A \quad \diamondsuit K \quad \diamondsuit D \quad \diamondsuit B$

Ein anderes Beispiel: Beim Sudoku soll man die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9$ in ein Quadrat der Größe 9×9 eintragen, sodass in keiner Zeile, in keiner Spalte und zusätzlich auch in keinem 3×3-Unterquadrat eine Zahl doppelt vorkommt.

	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Im Fachjargon nennen wir solche Anordnungen *lateinische Quadrate*. Für eine formelle Definition sei M eine endliche Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$. Ein lateinisches Quadrat ist dann eine Befüllung einer Tabelle der Größe $n \times n$ mit den Elementen der Menge M, sodass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element aus M genau einmal vorkommt. Der Name geht auf den legendären Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) zurück, der sein Quadrat gerne mit lateinischen Buchstaben befüllte.

C	B	A	D
A	D	C	B
D	A	B	C
B	C	D	A

(Besuchen Sie uns gerne im Gebäude RIG 1, wo Sie im Flur eine weitere Euler-Spielerei finden werden.)
In dieser Aufgabe möchten wir anschauen, wie Verknüpfungstafeln von Restklassenmengen uns helfen, lateinische Quadrate zu konstruieren und kombinatorische Probleme zu lösen.

a) Die Additionstafel der Restklassenmenge $\mathbb{Z}_4$ ist ein lateinisches Quadrat der Größe 4×4, wie wir leicht nachrechnen können (wenn wir uns die Kopfzeile und die linke Seitenspalte wegdenken, die wir nur zum besseren Indizieren hinzugefügt haben):

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

(i) Untersuchen Sie, ob die Additionstafel der Restklassenmenge $\mathbb{Z}_5$ ebenfalls ein lateinisches Quadrat ist.

(ii) Formulieren Sie eine möglichst allgemeine Bedingung an eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, die garantiert, dass die Additionstafel von $\mathbb{Z}_n$ ein lateinisches Quadrat ist.

b) Wir betrachten nun Multiplikationstafeln von Restklassenmengen. Bei der Multiplikation spielt die Restklasse [0] eine besondere Rolle. Zum Beispiel gilt für alle $[k] \in \mathbb{Z}_5$ die Gleichung $[0] \cdot [k] = [0]$. Diese Beziehung ist erstens langweilig, zweitens vorhersehbar und wird uns drittens nicht helfen, ein lateinisches Quadrat zu konstruieren.

Daher ignorieren wir die Restklasse [0] in der Multiplikationstafel. Die Multiplikationstafel der Restklassenmenge $\{[1], [2], [3], [4]\} \subseteq \mathbb{Z}_5$ ist ein lateinisches Quadrat der Größe 4×4:

$\cdot$	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]

(i) Untersuchen Sie, ob die Multiplikationstafel der Restklassenmenge

$$\{[1],[2],[3],[4],[5],[6]\} \subseteq \mathbb{Z}_7$$

ebenfalls ein lateinisches Quadrat ist.

(ii) Formulieren Sie eine möglichst allgemeine Bedingung an eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, die garantiert, dass die Multiplikationstafel von $\mathbb{Z}_n \setminus \{[0]\}$ ein lateinisches Quadrat ist.

c) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

heißt *Chautisa Yantra* (deutsch: 34-Diagramm). Menschen haben sie im 10. Jahrhundert in einen Stein geritzt und in den Tempel Parshwanath in der Nähe der Stadt Khajuraho in Indien gebracht.

Die Matrix C enthält als Einträge die Zahlen von 1 bis 16, welche so angeordnet sind, dass sie sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem 2×2-Unterblock zur Summe 34 ergänzen.

Eine solche Anordnung nennen wir auch ein *magisches Quadrat.*

Wir machen nun die Ersetzungen $16 \mapsto 12$, $12 \mapsto 8$, $8 \mapsto 4$ und $4 \mapsto 0$, um eine Matrix D zu erhalten, die als Einträge die Zahlen $0, 1, \ldots, 15$ enthält, die wir im Vierersystem mit höchstens zwei Ziffern schreiben können:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 4 & 11 \\ 12 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Wandeln Sie die Einträge der Matrix D ins Vierersystem um.

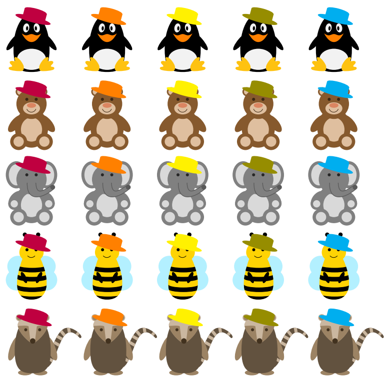
(ii) Lösen Sie das Kartenspielproblem aus der Einleitung, indem Sie die gefundenen Einerziffern durch $0 \mapsto B$, $1 \mapsto D$, $2 \mapsto K$ und $3 \mapsto A$ und die gefundenen Viererziffern durch $0 \mapsto \clubsuit$, $1 \mapsto \spadesuit$, $2 \mapsto \heartsuit$ und $3 \mapsto \diamondsuit$ ersetzen.

d) (i) Berechnen Sie die Additions- und die Subtraktionstafel der Restklassenmenge $\mathbb{Z}_5$.

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$					
$[1]$					
$[2]$					
$[3]$					
$[4]$					

$-$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$					
$[1]$					
$[2]$					
$[3]$					
$[4]$					

(ii) Arrangieren Sie die 25 Kuscheltiere, sodass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Tierart und jede Hutfarbe vorkommt.



Aufgabe 2

In der letzten Teilaufgabe von Aufgabe 3 der Übung 3 haben Sie sicher erkannt, dass hier unsere Brüche etabliert wurden. Sie haben gezeigt, dass die Relation B_3 auf $T \times T$

$$\sim := B_3 = \{((a,b),(c,d)) \mid a,b,c,d \in T, a \cdot d = b \cdot c\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $T \times T$ ist. Wir schreiben ab jetzt für

$$((a,b),(c,d)) \in \sim \ \ bzw. \ (a,b) \sim (c,d)$$

einfacher

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}.$$

Dies führt uns zur Kennzeichnung

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \;:\Leftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$$

Brüche der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ bestehen aus einem Zähler a und einem Nenner b. Zwei Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ nennen wir gleichwertig oder äquivalent, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt. Wir schreiben dann zunächst $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$.
Wir überlegen uns jetzt (noch einmal), dass $\sim$ auch eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist, sie zerlegt also $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in Klassen.

a) Formulieren Sie die drei bekannten Eigenschaften und zeigen Sie anschließend, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

- $\sim$ ist reflexiv, d.h. $\forall a, b \in \mathbb{N} :$ . . . .
- $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N} :$ . . . .
- $\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N} :$ . . . .

Die Relation $\sim$ (ist äquivalent zu) zerlegt also unsere Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und damit die Menge aller Brüche, in Klassen jeweils zueinander äquivalenter Brüche. Diese Klassen nennen wir **Bruchzahlen**.

Einige Bemerkungen.
Aus Sicht der Didaktik scheint es wichtig zu sein, den Unterschied zwischen einem Bruch und einer Bruchzahl zu kennen. Vereinfacht könnten wir schreiben:
(1) Zwei Brüche sind genau dann gleich, wenn sowohl ihr Zähler als auch ihr Nenner übereinstimmen.
(2) Zwei Bruchzahlen sind genau dann gleich, wenn sie zur gleichen Zahlenklasse gehören, also denselben Wert haben.
Natürlich könnte man auch die beiden Begriffe vertauschen (klingt auch gut), üblicherweise werden diese aber wie beschrieben genutzt. Auch könnte man den Begriff Bruchzahl gleich durch *Wert eines Bruches* eliminieren. Oder man könnte nur von Brüchen und ihren verschiedenen Darstellungen sprechen, nach dem Motto: Der Bruch $\frac{1}{2}$ hat eben noch unendlich viele weitere Darstellungen, etwa $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{6}$.
Ganz ähnliche Phänomene gibt es bei den Begrifflichkeiten *Fläche* und *Flächeninhalt*, *Winkel* und *Winkelgröße*, *Strecke* und *Streckenlänge*, etc.
Im Mathematikunterricht wird dieser Unterschied oft nicht klar gemacht, weil eine genaue Unterscheidung die Sprache unnötig kompliziert machen würde. Solange es nicht zu Missverständnissen kommt, ist das vielleicht unproblematisch.
Wir halten fest:
- Eine Bruchzahl ist eine Zahl, die durch unendlich viele verschiedene Brüche dargestellt werden kann. Zum Beispiel steht $\frac{1}{2}$ für dieselbe Bruchzahl wie $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{6}$. Bei den sogenannten Dezimalbrüchen (oder Kommazahlen) haben wir dieses Phänomen nicht, es gibt also dort i.d.R. nur eindeutige Darstellungen.

- Viele Schüler betrachten Bruchzahlen als zwei separate natürliche Zahlen – eine im Zähler, eine im Nenner – ohne das Verhältnis zwischen ihnen zu verstehen. Das führt oft zu typischen Fehlern im Umgang mit Brüchen.

Jetzt wollen wir ein wenig mit Brüchen (Bruchzahlen) rechnen (lernen). Inzwischen können wir guten Gewissens statt $\frac{1}{2} \sim \frac{6}{12}$ auch wie gewohnt $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ schreiben. Seien dazu a, b, c, d natürliche Zahlen. Dann definieren wir eine Addition

$$(D_1) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d},$$

und eine Multiplikation

$$(D_2) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

In der Vorlesung werden wir bzgl. dieser Definition noch einen kleinen Hinweis zur sogenannten **Repräsentantenunabhängigkeit** geben. Denn Sie können sich vorstellen, dass wir hier eigentlich nur mit einem Repräsentanten aus der Klasse rechnen bzw. die Operationen definiert haben, also nur für die 'Klassensprecherin einer Klasse', nun gut, kommen wir endlich zu ein paar Aufgaben.

Seien dazu im folgenden $a, b, c, d, \ldots, n, \ldots$ natürliche Zahlen.

b)

- Berechnen Sie: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \ldots$
- Berechnen Sie: $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{6} = \ldots$
- Berechnen Sie: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \ldots$
- Berechnen Sie: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) = \ldots$

Jetzt dürfen Sie einige bekannte Rechenregeln für unsere Brüche beweisen, wie das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, natürlich nur mit den obigen zwei Definitionen und den entsprechenden Regeln für natürliche Zahlen. Wir geben ein Bespiel dafür, dass das Kommutativgesetz bzgl. der Addition bei den Brüchen gilt.

Behauptung. Für alle natürlichen Zahlen a, b, c, d gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$
Beweis. Seien nun $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach obiger Definition (D_1)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Weiterhin gilt nach Kommutativgesetz für natürliche Zahlen angewandt auf den Zähler und Nenner

$$\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b}$$

Mit Hilfe der Definition (D_1) folgt jetzt

$$\frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

c) Beweisen Sie analog:

- Es gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
- Es gilt $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$
- Es gilt $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$
- Es gilt $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right)$

Wir definieren weiter

$$(D_3) \quad \frac{a}{a} := 1,$$

und

$$(D_4) \quad 1 \cdot \frac{a}{b} := \frac{a}{b}.$$

Sie kennen natürlich viele Gleichheiten in Bezug auf Rechenregeln mit Brüchen, wie z.B.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n},$$

von links nach rechts bekannt unter dem Namen 'erweitern mit n', von rechts nach links nennen wir dies 'kürzen mit n'. So schreiben wir beispielsweise $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{15}{6}$, und fühlen uns dabei wohl. Jetzt dürfen Sie einige solcher Regeln beweisen.

d) Beweisen Sie mit Hilfe der (D_i):

- Es gilt $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot n}{b \cdot n}$.
- Es gilt $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n} = \dfrac{a+b}{n}$.
- Es gilt $n \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{n \cdot b}{c}$.

Und zum Schluss

e) Geben Sie jeweils ein Produkt zweier Bruchzahlen an, bei dem das Ergebnis

- kleiner ist als beide Faktoren,
- kleiner ist als der erste und größer als der zweite Faktor,
- kleiner ist als der zweite und größer als der erste Faktor,
- größer ist als beide Faktoren.
- Und: Gibt es eigentlich eine kleinste positive Bruchzahl?

AUFGABE 3

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einigen Anwendungen der Modulo Rechnung. Schreiben Sie jeweils Ihren Rechenweg mit Hilfe von Kongruenzen.

a) Der 2. Januar 2019 war ein Mittwoch. Welcher Tag war der 3. Januar 2024? (2020 war ein Schaltjahr.)

b) Ein Uhr zeigt aktuell 9 Uhr an. Welche Uhrzeit wird sie in folgenden Fällen anzeigen?

(i) Nach 15 Stunden

(ii) Nach 37 Stunden

(iii) Nach 100 Stunden

c) Gesucht ist die Anzahl aller 6-stelligen Zahlen der Form $38ab43$ mit $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ so, dass sie durch 9 teilbar sind.

d) Es war einmal ein weiser Mathematiker namens Leon, der in einem kleinen Dorf lebte. Die Dorfbewohner kamen oft zu ihm, wenn sie knifflige Rätsel oder mathematische Probleme hatten. Eines Tages kam ein reisender Händler namens Marco mit einem besonderen Anliegen zu Leon.

   „Oh, weiser Leon," begann Marco, „ich habe eine Zahl verloren, die mir sehr wichtig ist! Die Zahl war kleiner als 100. Diese Zahl hat eine ganz besondere Eigenschaft: Wenn ich sie durch 2 teile, bleibt 1 übrig. Teile ich sie durch 3, bleibt 2 übrig. Bei einer Teilung durch 4 bleibt 3, durch 5 bleibt 4 und durch 6 bleibt 5 übrig. Kannst du mir helfen, sie wiederzufinden?"

   Leon kratzte sich am Kopf und dachte nach. „Das ist interessant, einen Moment bitte, da muss ich mal einen Studierenden der EUF fragen ... "

e) In einem weit entfernten Königreich lebte ein weiser Mathematiker namens Alaric. Er war bekannt für seine außergewöhnliche Fähigkeit, Muster in Zahlen zu erkennen. Eines Tages wurde er vom König gerufen, der eine wichtige Frage hatte.

   „Oh weiser Alaric," begann der König, „ich habe vier Schatztruhen in meinem Palast, jede mit einer anderen (natürlichen) Zahl versehen. Mein Hofmagier behauptet, dass es unter diesen Zahlen immer zwei gibt, deren Differenz stets durch 3 teilbar ist. Kann das wirklich wahr sein?"

   Alaric lächelte und nahm sich einen Moment Zeit zum Nachdenken. Dann sagte er „Oh, da muss ich noch einmal einen Studierenden der EUF fragen ... "