ÜBUNG 4

AUFGABE 1 (mit Korrektur)
In der letzten Teilaufgabe von Aufgabe 3 der Übung 3 haben Sie sicher erkannt, dass hier unsere Brüche etabliert wurden. Sie haben gezeigt, dass die Relation B_3 auf $T \times T$

$$\sim := B_3 = \{((a,b),(c,d)) \mid a,b,c,d \in T, a \cdot d = b \cdot c\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $T \times T$ ist. Wir schreiben ab jetzt für

$$((a,b),(c,d)) \in \sim \ \ bzw.\ (a,b) \sim (c,d)$$

einfacher

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}.$$

Dies führt uns zur Kennzeichnung

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \ :\Leftrightarrow \ a \cdot d = b \cdot c$$

Brüche der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ bestehen aus einem Zähler a und einem Nenner b. Zwei Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ nennen wir gleichwertig oder äquivalent, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt. Wir schreiben dann zunächst $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$.
Wir überlegen uns jetzt (noch einmal), dass $\sim$ auch eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist, sie zerlegt also $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in Klassen.

a) Formulieren Sie die drei bekannten Eigenschaften und zeigen Sie anschließend, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

- $\sim$ ist reflexiv, d.h. $\forall a, b \in \mathbb{N} : \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N} : \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N} : \ldots\ldots\ldots\ldots$

Die Relation $\sim$ (ist äquivalent zu) zerlegt also unsere Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und damit die Menge aller Brüche, in Klassen jeweils zueinander äquivalenter Brüche. Diese Klassen nennen wir **Bruchzahlen**.

Einige Bemerkungen.
Aus Sicht der Didaktik scheint es wichtig zu sein, den Unterschied zwischen einem Bruch und einer Bruchzahl zu kennen. Vereinfacht könnten wir schreiben:
(1) Zwei Brüche sind genau dann gleich, wenn sowohl ihr Zähler als auch ihr Nenner übereinstimmen.
(2) Zwei Bruchzahlen sind genau dann gleich, wenn sie zur gleichen Zahlenklasse gehören, also denselben Wert

haben.
Natürlich könnte man auch die beiden Begriffe vertauschen (klingt auch gut), üblicherweise werden diese aber wie beschrieben genutzt. Auch könnte man den Begriff Bruchzahl gleich durch *Wert eines Bruches* eliminieren. Oder man könnte nur von Brüchen und ihren verschiedenen Darstellungen sprechen, nach dem Motto: Der Bruch $\frac{1}{2}$ hat eben noch unendlich viele weitere Darstellungen, etwa $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{6}$.
Ganz ähnliche Phänomene gibt es bei den Begrifflichkeiten *Fläche* und *Flächeninhalt*, *Winkel* und *Winkelgröße*, *Strecke* und *Streckenlänge*, etc.
Im Mathematikunterricht wird dieser Unterschied oft nicht klar gemacht, weil eine genaue Unterscheidung die Sprache unnötig kompliziert machen würde. Solange es nicht zu Missverständnissen kommt, ist das vielleicht unproblematisch.
Wir halten fest:
- Eine Bruchzahl ist eine Zahl, die durch unendlich viele verschiedene Brüche dargestellt werden kann. Zum Beispiel steht $\frac{1}{2}$ für dieselbe Bruchzahl wie $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{6}$. Bei den sogenannten Dezimalbrüchen (oder Kommazahlen) haben wir dieses Phänomen nicht, es gibt also dort i.d.R. nur eindeutige Darstellungen.

- Viele Schüler betrachten Bruchzahlen als zwei separate natürliche Zahlen – eine im Zähler, eine im Nenner – ohne das Verhältnis zwischen ihnen zu verstehen. Das führt oft zu typischen Fehlern im Umgang mit Brüchen.

Jetzt wollen wir ein wenig mit Brüchen (Bruchzahlen) rechnen (lernen). Inzwischen können wir guten Gewissens statt $\frac{1}{2} \sim \frac{6}{12}$ auch wie gewohnt $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ schreiben. Seien dazu a, b, c, d natürliche Zahlen. Dann definieren wir eine Addition

$$(D_1) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d},$$

und eine Multiplikation

$$(D_2) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

In der Vorlesung werden wir bzgl. dieser Definition noch einen kleinen Hinweis zur sogenannten **Repräsentantenunabhängigkeit** geben. Denn Sie können sich vorstellen, dass wir hier eigentlich nur mit einem Repräsentanten aus der Klasse rechnen bzw. die Operationen definiert haben, also nur für die 'Klassensprecherin einer Klasse', nun gut, kommen wir endlich zu ein paar Aufgaben.

Seien dazu im folgenden $a, b, c, d, \ldots, n, \ldots$ natürliche Zahlen.

b)

- Berechnen Sie: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \dots$
- Berechnen Sie: $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{6} = \dots$
- Berechnen Sie: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \dots$
- Berechnen Sie: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) = \dots$

Jetzt dürfen Sie einige bekannte Rechenregeln für unsere Brüche beweisen, wie das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz, natürlich nur mit den obigen zwei Definitionen und den entsprechenden Regeln für natürliche Zahlen. Wir geben ein Bespiel dafür, dass das Kommutativgesetz bzgl. der Addition bei den Brüchen gilt.

Behauptung. Für alle natürlichen Zahlen a, b, c, d gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$
Beweis. Seien nun $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach obiger Definition (D_1)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Weiterhin gilt nach Kommutativgesetz für natürliche Zahlen angewandt auf den Zähler und Nenner

$$\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b}$$

Mit Hilfe der Definition (D_1) folgt jetzt

$$\frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

c) Beweisen Sie analog:

- Es gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
- Es gilt $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$
- Es gilt $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$
- Es gilt $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right)$

Wir definieren weiter

$$(D_3) \quad \frac{a}{a} := 1,$$

und

$$(D_4) \quad 1 \cdot \frac{a}{b} := \frac{a}{b}.$$

Sie kennen natürlich viele Gleichheiten in Bezug auf Rechenregeln mit Brüchen, wie z.B.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n},$$

von links nach rechts bekannt unter dem Namen 'erweitern mit n', von rechts nach links nennen wir dies 'kürzen mit n'. So schreiben wir beispielsweise $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{15}{6}$, und fühlen uns dabei wohl. Jetzt dürfen Sie einige solcher Regeln beweisen.

d) Beweisen Sie mit Hilfe der (D_i):

- Es gilt $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$.
- Es gilt $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$.
- Es gilt $n \cdot \frac{b}{c} = \frac{n \cdot b}{c}$.

Und zum Schluss

e) Geben Sie jeweils ein Produkt zweier Bruchzahlen an, bei dem das Ergebnis

- kleiner ist als beide Faktoren,
- kleiner ist als der erste und größer als der zweite Faktor,
- kleiner ist als der zweite und größer als der erste Faktor,
- größer ist als beide Faktoren.
- Und: Gibt es eigentlich eine kleinste positive Bruchzahl?

Aufgabe 2

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einigen Anwendungen der Modulo Rechnung. Schreiben Sie jeweils Ihren Rechenweg mit Hilfe von Kongruenzen.

a) Der 2. Januar 2019 war ein Mittwoch. Welcher Tag war der 3. Januar 2024? (2020 war ein Schaltjahr.)

b) Eine Digitaluhr zeigt aktuell 9 Uhr an. Welche Uhrzeit wird sie in folgenden Fällen anzeigen?

  (i) Nach 15 Stunden
  (ii) Nach 37 Stunden
  (iii) Nach 100 Stunden

c) Gesucht ist die Anzahl aller 6-stelligen Zahlen der Form $38ab43$ mit $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ so, dass sie durch 9 teilbar sind.

d) Es war einmal ein weiser Mathematiker namens Leon, der in einem kleinen Dorf lebte. Die Dorfbewohner kamen oft zu ihm, wenn sie knifflige Rätsel oder mathematische Probleme hatten. Eines Tages kam ein reisender Händler namens Marco mit einem besonderen Anliegen zu Leon.

„Oh, weiser Leon," begann Marco, „ich habe eine Zahl verloren, die mir sehr wichtig ist! Die Zahl war kleiner als 100. Diese Zahl hat eine ganz besondere Eigenschaft: Wenn ich sie durch 2 teile, bleibt 1 übrig. Teile ich sie durch 3, bleibt 2 übrig. Bei einer Teilung durch 4 bleibt 3, durch 5 bleibt 4 und durch 6 bleibt 5 übrig. Kannst du mir helfen, sie wiederzufinden?"

Leon kratzte sich am Kopf und dachte nach. „Das ist interessant, einen Moment bitte, da muss ich mal einen Studierenden der EUF fragen ... "

e) In einem weit entfernten Königreich lebte ein weiser Mathematiker namens Alaric. Er war bekannt für seine außergewöhnliche Fähigkeit, Muster in Zahlen zu erkennen. Eines Tages wurde er vom König gerufen, der eine wichtige Frage hatte.

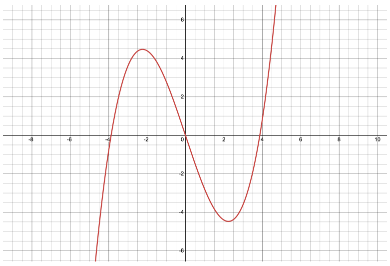
„Oh weiser Alaric,“ begann der König, „ich habe vier Schatztruhen in meinem Palast, jede mit einer anderen (natürlichen) Zahl versehen. Mein Hofmagier behauptet, dass es unter diesen Zahlen immer zwei gibt, deren Differenz stets durch 3 teilbar ist. Kann das wirklich wahr sein?“

Alaric lächelte und nahm sich einen Moment Zeit zum Nachdenken. Dann sagte er „Oh, da muss ich noch einmal einen Studierenden der EUF fragen ...“

AUFGABE 3

In dieser Aufgabe möchten wir Funktionen graphisch darstellen. Zur Visualisierung der Funktionen und ihrer Graphen gibt es verschiedene Applikationen, wir holen die Webseite `desmos`.

Zu der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{5} \cdot x^3 - 3 \cdot x$ liefert `desmos` zum Beispiel das folgende Bild.



Aus dem Bild lesen wir verschiedene Eigenschaften ab: die Funktion f ist nicht streng monoton steigend, es gilt $f(0) = 0$, der Punkt $(0, 0)$ ist eine Art Symmetriezentrum des Graphen der Funktion, der Graph schneidet die x-Achse dreimal, aber die y-Achse nur einmal, der Wert $f(5)$ sprengt den Rahmen, etc.

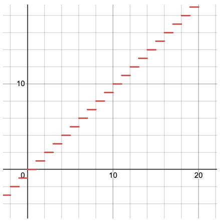
a) Rekonstruieren Sie das Bild, indem Sie auf den `Link` klicken.

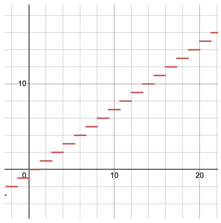
b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

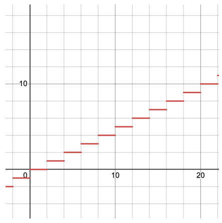
$$g(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \frac{10}{|x \cdot (x+3)| + |(x+1) \cdot (x+2)|}$$

sowie zweier selbstgewählter Funktionen. Geben Sie anhand der Skizzen für jeden der vier Graphen drei charakteristische Merkmale an.

Manchmal machen wir eine Funktion von einem Parameter abhängig, um eine Funktionenvielfalt zu bekommen. (Manche Menschen sprechen auch von einer Funktionenschar oder einer Parameterfunktion.)
Zum Beispiel gibt es für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lfloor ax \rfloor$, wobei die Klammern mit den Füßen die Abrundungsfunktion bedeuten, die wir im letzten Semester kennengelernt haben. Die Graphen für $a = 1$, $a = 0{,}75$ und $a = 0{,}5$ sehen wie folgt aus:







Aus der Folge der Bilder lesen wir verschiedene Merkmale ab: die Funktionsgraphen sind treppenförmig, die Höhe einer Stufe ist immer 1, aber die Breite variiert mit dem Parameter a, die Funktion ist mononoton steigend, falls $a > 0$, aber niemals streng monoton steigend, etc.

c) Rekonstruieren Sie die Animation, indem Sie auf den `Link` klicken.

d) Animieren Sie die Funktionenvielfalt $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{10}x^3 + ax^2$ für Werte des Parameters a von -5 bis 5. Geben Sie zudem drei charakteristische Merkmale dieser Funktionenschar an.

e) Animieren Sie die Funktionenvielfalt $h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x - a\sqrt{x}$ für Werte des Parameters a von 2 bis 4. Geben Sie zudem drei charakteristische Merkmale dieser Funktionenschar an.

f) Erfinden Sie eine eigene Funktionenvielfalt.

AUFGABE 4 (mit Korrektur)
Manche Funktionen sind nicht streng monoton steigend, wären es aber, wenn man den Definitionsbereich einschränken würde.
Wir versuchen, das Phänomen zu formalisieren. Zu diesem Zweck sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich D. Ferner sei $I \subseteq D$ eine Teilmenge von D, zum Beispiel ein Intervall. Wir sagen nun, die Funktion f ist streng monoton steigend auf I, falls für alle Elemente $x_1, x_2 \in I$ gilt:

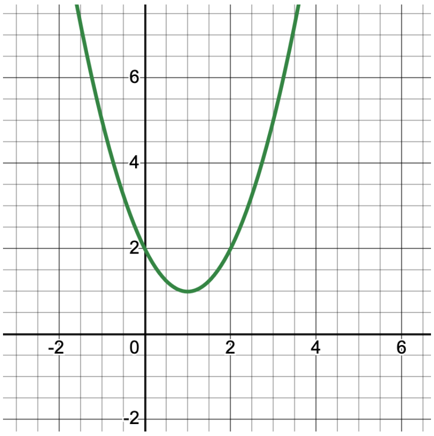
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

In Analogie sagen wir, die Funktion ist streng monoton fallend auf I, falls für alle Elemente $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{\hspace{6cm}}.$$

a) Füllen Sie die Lücke in der obigen Definition.

Zum Beispiel betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Die Funktion ist nicht streng monoton steigend, denn es gilt $f(0) > f(1)$.



Sie ist aber streng monoton steigend auf dem Intervall $(1, \infty)$, wie der folgende Beweis zeigt:

- Es seien $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ zwei reelle Zahlen größer als 1.
- Angenommen, es gelte $x_1 < x_2$.
- Dann ist die Differenz der Funktionswerte

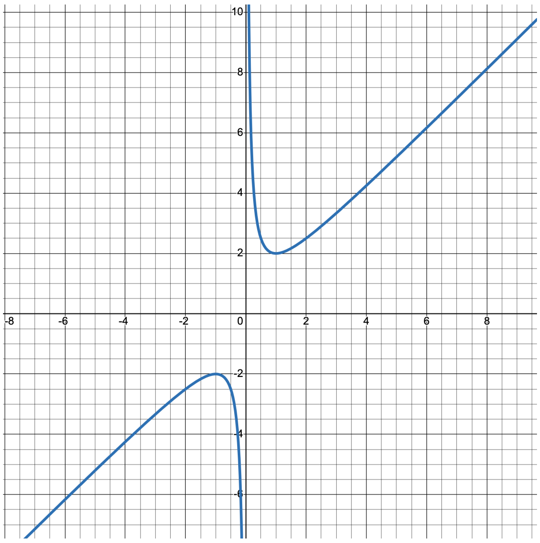
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left(x_2^2 - 2x_2 + 2\right) - \left(x_1^2 - 2x_1 + 2\right) \\ &= x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1 \\ &= (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 + x_1 - 2)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

  dank der dritten binomischen Formel.
- Aus der Annahme $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ folgt $x_2 + x_1 - 2 > 1 + 1 - 2 = 0$; aus der Voraussetzung $x_1 < x_2$ folgt $x_2 - x_1 > 0$. Damit ist $f(x_2) - f(x_1)$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren, also selbst positiv.
- Aus $f(x_2) - f(x_1) > 0$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

Nun laden wir die Studierenden ein, in anderen Situationen eigenständige Monotoniebeweise zu führen.

b) Zeigen Sie, dass die obige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2x + 2$ auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ streng monoton fallend ist.

c) Es sei $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Nennen Sie eine Menge I von reellen Zahlen und zeigen Sie, dass die Funktion h auf I streng monoton steigend ist.



AUFGABE 5

In dieser Aufgabe untersuchen wir Funktionen auf Injektivität. Zu diesem Zweck sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich X und dem Zielbereich Y. Definitionen der Injektivität sind wie Brausepulver: sie kommen in verschiedenen Geschmacksrichtungen. Die Funktion f ist genau dann injektiv, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

- **Anschauliche Definition:** Die Funktion f bewahrt die Individualität in dem Sinne, dass sie niemals zwei verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf dasselbe Element im Zielbereich abbildet.

  Zum Beispiel ist die Funktion, die jedem Menschen auf der Welt seinen Geburtstag zuordnet, nicht injektiv, da die Zwillinge Paula und Louise am gleichen Tag geboren sind.

- **Gleichungslöser-Definition:** Für jedes vorgegebene Element $y \in Y$ aus dem Zielbereich hat die Gleichung $f(x) = y$ höchstens eine Lösung.

Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10 \cdot x - x^2$ nicht injektiv, da die Gleichung $10 \cdot x - x^2 = 21$ zwei Lösungen hat, wenn wir $y = 21$ vorgeben, nämlich $x = 3$ und $x = 7$.

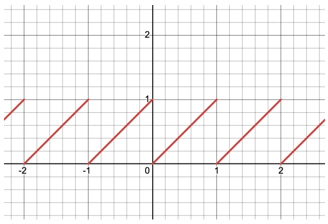
- **Formale Definition:** $\forall x_1, x_2 \in X\colon (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$.

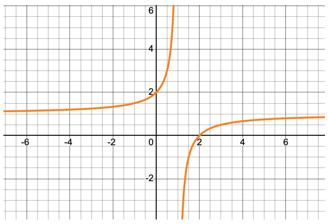
  Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 2$ injektiv, wie der folgende Beweis zeigt:

  - Es seien $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_2 \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen.
  - Angenommen, es gelte $f(x_1) = f(x_2)$.
  - Gemäß der Definitionsvorschrift gilt dann $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$.
  - Eine Subtraktion von 2 impliziert $3x_1 = 3x_2$.
  - Eine Division durch 3 impliziert $x_1 = x_2$. $\square$

Nun laden wir die Studierenden ein, zu beurteilen, ob die folgenden Funktionen injektiv sind und passende Begründungen zu finden.

a) Die Funktion $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $s(x) = x - \lfloor x \rfloor$ heißt Nachkommaanteil oder Sägezahnfunktion (oder in Anspielung auf Bill Murray Murmeltierfunktion). Überprüfen Sie s auf Injektivität.





b) Amelia, Lea, Isla und Henriette sitzen im Wartezimmer einer Arztpraxis, um sich gegen Grippe impfen zu lassen. Die Funktion i ordne jeder Patientin die Injektionsnadel zu, mit der sie heute geimpft werden soll. Überprüfen Sie i auf Injektivität.

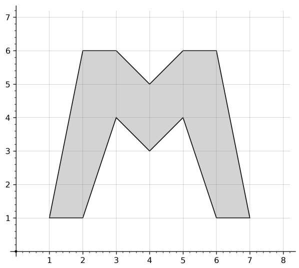
c) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$h(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Der Graph von h beschreibt eine Hyperbel. Überprüfen Sie h auf Injektivität.

d) Wir betrachten die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Die Funktion $t\colon P(A) \to P(B)$ sei definiert durch $t(X) = X \cap B$ für alle Teilmengen $X \subseteq A$. Überprüfen Sie t auf Injektivität.

e) Die Funktion $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sei definiert durch $(x, y) \mapsto (x + y, y)$. Zum Beispiel ist $d((3, 4)) = (3 + 4, 4) = (7, 4)$.



Berechnen und skizzieren Sie die Bilder der Punkte $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, $(6, 6)$, $(5, 6)$, $(4, 5)$, $(3, 6)$ und $(2, 6)$, also der Eckpunkte des abgebildeten M, unter der Funktion d. Beschreiben Sie den geometrischen Effekt der Funktion und überprüfen Sie, ob d injektiv ist.