ÜBUNG 4

AUFGABE 1

Man fülle die u.a. Verknüpfungstabelle so aus, dass das Paar $(S, *)$ mit der Menge $S := \{a, b, c, d\}$ isomorph zur Gruppe a) $(\mathbb{Z}_4, +)$, b) $(\mathbb{Z}_5 \backslash \{[0]\}, \cdot)$ wird.

$*$	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

AUFGABE 2

> Definition. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $e \in G$ das neutrale Element. Ein Element $a \in G$ heißt *selbstinvers*, wenn $a * a = e$ gilt.

Man zeige: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(G, *)$ eine kommutative Gruppe mit $|G| = n$, dann gilt: Das Produkt aller Gruppenelemente von G ist zu sich selbstinvers.

AUFGABE 3

Man beweise, dass $H := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist.

AUFGABE 4

Wie in der Vorlesung gezeigt, ist die Funktion f mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 3x + 2$ weder injektiv noch surjektiv. Man bestimme jeweils Teilmengen T_1, T_2 von $\mathbb{R}$ so, dass $f^* \subseteq f$ mit $f^* : T_1 \to T_2$

(i) injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(ii) surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(iii) injektiv und surjektiv ist.

AUFGABE 5

Man stelle eine bijektive Funktion f der

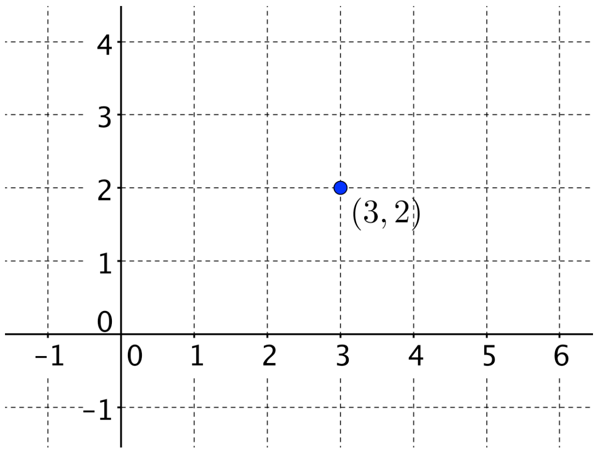
$$\text{Menge } A := \{-3, 2, 7, 12, \dots\} \text{ auf die Menge } B := \{-1, -10, -19, -28, \dots\}$$

durch eine „Formel“ dar, die nur die Grundrechenarten benutzt (mit Beweis).

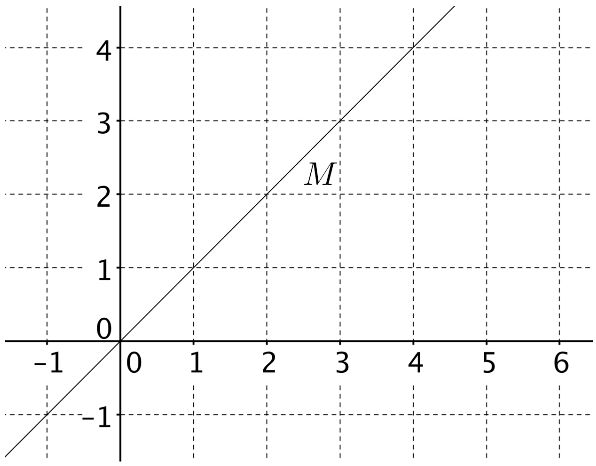
Die Veranschaulichung des kartesischen Produkts

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

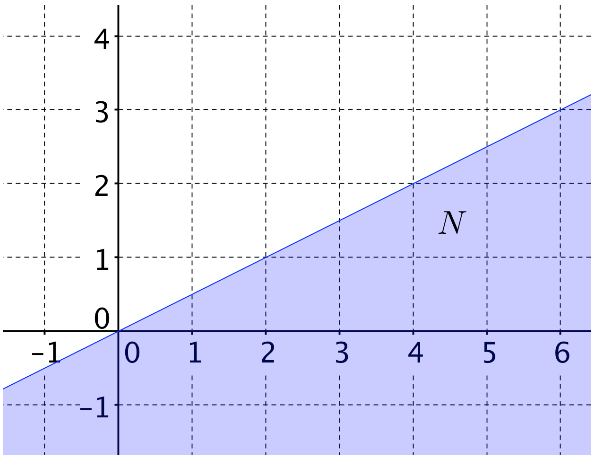
(auch kurz $\mathbb{R}^2$ (gesprochen „$\mathbb{R}$-zwei“)) wurde in der letzten Vorlesung in einem kartesischen Koordinatensystem von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vorgenommen und diskutiert. Jedes Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann dort als *Punkt* mit einer x- und einer y-Koordinate eingezeichnet werden. Im Bild ist das Paar $(3, 2)$ visualisiert (in der Sprache der Funktionen: der Stelle 3 wird der Wert 2 zugeordnet).



Man kann natürlich auch Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ visualisieren. Machen Sie sich klar, dass im folgenden Bild eine Visualisierung der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ dargestellt ist.



Machen Sie sich nun klar, dass das folgende Bild eine Visualisierung der Menge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{2}x\}$ zeigt.



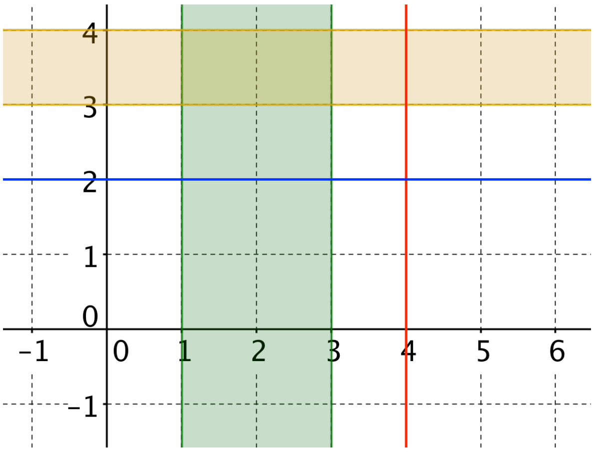
Spezielle Teilmengen der reellen Zahlen sind *Intervalle*. Wir definieren

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

für beliebige reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$ und nennen $[a, b]$ das *abgeschlossene Intervall mit der linken Intervallgrenze a und der rechten Intervallgrenze b*. Machen Sie sich klar, wie die Veranschaulichung eines Intervalls auf der Zahlengeraden aussieht.

AUFGABE 6 NICHT SCHRIFTLICH
Identifizieren Sie in der Abbildung auf der nächsten Seite die folgenden Mengen. Dabei ist zu beachten, dass einige Mengen auf verschiedene Arten ausgedrückt wurden.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 3 \leq y \leq 4\}$
- $C = \mathbb{R} \times \{2\}$.
- $D = [1, 3] \times \mathbb{R}$
- $E = \mathbb{R} \times [3, 4]$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\}$
- $G = [1, 3] \times [3, 4]$
- $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq y \leq 4\}$
- $I = \{4\} \times \mathbb{R}$.



AUFGABE 7 NICHT SCHRIFTLICH
Visualisieren Sie die folgenden Mengen in einem Koordinatensystem:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 3y\}$

c) $C = \{0\} \times \mathbb{R}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

e) $E = \emptyset \times \mathbb{R}$

AUFGABE 8 NICHT SCHRIFTLICH
Gegeben seien nun folgende Mengen:

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
- $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
- $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3 \wedge y - 2 \leq x \leq 4 - y\}$
- $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3 \wedge 4 - y \leq x \leq 7 - y\}$

Bestimmen und skizzieren Sie $A \cup B \cup C \cup D$ und $A \cap B \cap C \cap D$.