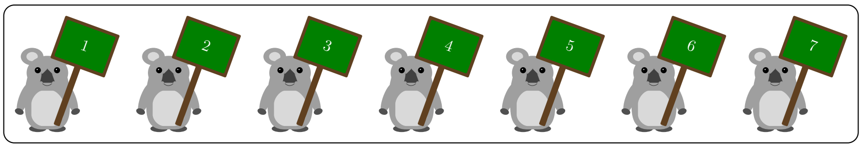
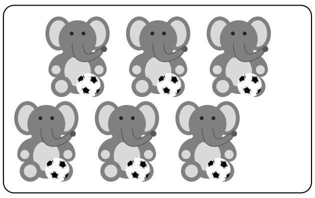
ÜBUNG 3

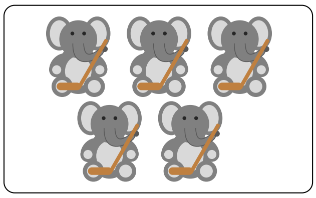
AUFGABE 1

Wir kennen die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ der *natürlichen Zahlen*. Wir benutzen sie, um Dinge zu zählen, zum Beispiel besteht diese Kolonie aus genau *sieben* Koalabären.

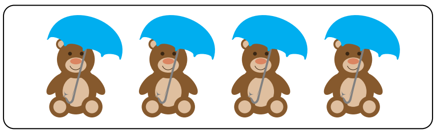


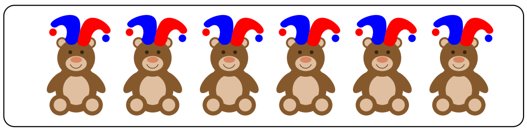
Haben wir zwei verschiedene natürliche Zahlen gegeben, so können wir sie ihrer Größe nach vergleichen. Wenn zum Beispiel genau sechs Elefanten Fußball spielen und genau fünf Elefanten Hockey spielen, so schreiben wir $6 > 5$, denn es gibt mehr Elefanten, die Fußball spielen, als Elefanten, die Hockey spielen.





a) Beschreiben Sie die Situation mit einem Satz und stellen Sie eine passende Ungleichung auf.





Wir möchten nun eine formale Definition der Größenvergleichsrelation geben. Zu diesem Zwecke definieren wir, dass zwei natürliche Zahlen x und y die Relation $x > y$ erfüllen mögen, falls es eine natürliche Zahl n mit $x = y + n$ gibt.
Zum Beispiel ist die Anzahl der Elefanten, die Fußball spielen, d. h. die Zahl $x = 6$, größer als die Zahl der Elefanten, die Hockey spielen, d. h. die Zahl $y = 5$, da der Hockeymannschaft $n = 1$ Elefant fehlt, um die gleiche Mannschaftsstärke wie das Fußballteam zu haben.
In Formeln können wir die größer-Relation auch schreiben als:

$$>= \{(x, y) \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon x = y + n\} .$$

b) Veranschaulichen Sie die Definition mithilfe der Teddybären.

c) Zeigen Sie anhand der Definition, dass $25 > 20$ gilt.

d) Nun möchten wir uns anhand der Definition überlegen, warum die größer-Relation eine *transitive* Relation ist. Dazu seien x, y und z natürliche Zahlen. Wir müssen nun die folgende Aussage zeigen:

> „Wenn sowohl die Ungleichung $x > y$ als auch die Ungleichung $y > z$ gültig sind, dann ist auch die Ungleichung $x > z$ gültig."

Die fragliche Aussage ist eine Implikation. Die Teilaussage $(x > y) \wedge (y > z)$ nennen wir die Prämisse und die Teilaussage $x > z$ die Konklusion. Eine gängige Methode zum Beweisen einer Implikation ist es, die Prämisse als wahr anzunehmen und die Konklusion zu folgern.

Füllen Sie die Lücken im folgenden Beweis der Transitivität.

(i) Angenommen, es gelte sowohl $x > y$ als auch $y > z$.

(ii) Dann gibt es nach der Definition der Relation eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x = \underline{\hspace{4cm}} \tag{1}$$

sowie eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

$$y = \underline{\hspace{4cm}}. \tag{2}$$

(iii) Eine Addition der Gleichungen (1) und (2) liefert die Gleichung

$$x + y = \underline{\hspace{5.5cm}}. \tag{3}$$

(iv) Wir subtrahieren y auf beiden Seiten der Gleichung (3) und erhalten die gleichwertige Gleichung

$$x = \underline{\hspace{4cm}}. \tag{4}$$

(v) Aus Gleichung (4) und $n + m \in \mathbb{N}$ folgt $x > z$. $\square$

AUFGABE 2

In dieser Aufgabe möchten unter anderem untersuchen, welche Auswirkungen *Vereinigungen* und *Durchschnitte* auf Relationen haben.
Zu diesem Zwecke sei M eine Menge. Ferner seien $R \subseteq M \times M$ und $S \subseteq M \times M$ zwei Relationen auf M. Dann erhalten wir zwei neue Relationen auf M, einerseits die Vereinigung

$$R \cup S = \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid (m_1, m_2) \in R \text{ oder } (m_1, m_2) \in S\}$$

und andererseits den Durchschnitt

$$R \cap S = \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid (m_1, m_2) \in R \text{ und } (m_1, m_2) \in S\}\,.$$

Beispiel: Es sei $M = \{1, 2, 3\}$, es sei $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ die kleiner-Relation auf M und es sei $S = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ die größer-Relation auf M. Dann ist

$$R \cup S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

die ungleich-Relation auf M. (In einer Gleichung könnten wir diese Beziehung auch als $< \cup > = \neq$ schreiben, aber bei solchen Formeln müssen aufpassen, dass wir unsere Leserinnen und Leser nicht verwirren.) Auf der anderen Seite gilt $R \cap S = \varnothing$, denn es gibt keine Zahlen $m_1, m_2 \in M$, für die sowohl $m_1 < m_2$ als auch $m_1 > m_2$ gültig sind.

a) In dieser Teilaufgabe betrachten wir die Menge der Wörter W der deutschen Sprache. Jedes solche Wort ist eine Folge von Buchstaben aus dem Alphabet $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{z}, \texttt{ß}, \texttt{ä}, \texttt{ö}, \texttt{ü}\}$, wobei wir der Einfachheit halber alle Buchstaben klein schreiben.

   Wir betrachten nun zwei Relationen auf W. Die erste Relation A sei definiert als: „ist ein Anagramm von". Zum Beispiel ist die Aussage „`endziffer` A `differenz`" gültig, da das Wort `endziffer` ein Anagramm des Wortes `differenz` ist (also durch eine Permutation der Buchstaben aus ihm hervorgeht).

   Die zweite Relation B sei definiert als „endet mit denselben zwei Buchstaben wie". Zum Beispiel ist die Aussage „`flensburg` B `gartenzwerg`" gültig, da beide Wörter mit der Buchstabenfolge `rg` enden.

   (i) Geben Sie drei verschiedene Paare $(w_1, w_2) \in W \times W$ an, für die die Aussage $(w_1, w_2) \in (A \cup B) \setminus A$ gültig ist.

   (ii) Geben Sie drei verschiedene Paare $(w_1, w_2) \in W \times W$ an, für die die Aussage $(w_1, w_2) \in (A \cup B) \setminus B$ gültig ist.

   (iii) Geben Sie zwei verschiedene Paare $(w_1, w_2) \in W \times W$ an, für die die Aussage $(w_1, w_2) \in A \cap B$ gültig ist.

   (iv) Finden Sie ein 4. Wort (oder sollte man besser sagen ein *5. Wort*), das äquivalent zu den Wörtern `senf`, `hanf` und `genf` bezüglich der Relation B ist.

b) Nun definieren wir zwei Relationen auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Für zwei ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $m \bumpeq n$, falls $m^2 + m = n^2 + n$ gilt; ferner schreiben wir $m \Bumpeq n$, falls $m^2 - m = n^2 - n$ gilt.

(i) Finden Sie eine Zahl $m \in \mathbb{Z} \setminus \{4\}$ mit $m \bumpeq 4$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\bumpeq$ und $\Bumpeq$ transitiv sind, aber ihre Vereinigung nicht.

(iii) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt von $\bumpeq$ und $\Bumpeq$ zur Gleichheitsrelation $=$ identisch ist.

(iv) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse von $\bumpeq$ aus genau zwei Elementen besteht.

c) Nun lösen wir uns von den konkreten Beispielen und betrachten wieder eine allgemeine Grundmenge M und zwei Relationen R und S auf M.

Mikel Maniac behauptet: „Wenn die Relationen R und S beide transitiv sind, dann muss die Vereinigung $R \cup S$ auch transitiv sein.“

Clemens Clever behauptet: „Wenn die Relationen R und S beide transitiv sind, dann ist auch der Durchschnitt $R \cap S$ transitiv.“

(i) Widerlegen Sie Mikels Behauptung.

(ii) Beweisen Sie Clemens’ Behauptung.

(iii) Prüfen Sie, ob die Umkehrung von Clemens’ Behauptung gilt.

AUFGABE 3

In dieser Aufgabe wollen wir nicht zwei einzelne natürliche Zahlen in Beziehung setzen, sondern zwei Paare von natürlichen Zahlen. Sei also B_1 eine Relation auf einer Menge $T \times T$, mit $T := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Dann ist

$$T \times T := \{(a, b) \mid a, b \in T\},$$

und es gilt

$$B_1 \subseteq (T \times T) \times (T \times T).$$

- Geben Sie einige Elemente von $T \times T$ an.
- Bestimmen Sie die Anzahl von Elementen von $T \times T$, also $|T \times T|$

Es gibt sehr viele Relationen auf $T \times T$, bekanntlich sind es $2^{|(T \times T) \times (T \times T)|}$ Stück! Beispielsweise - um mit einer anzufangen - könnten wir schreiben, dass das Paar $(4, 5)$ in irgendeiner Relation zum Paar $(1, 8)$ steht, also $(4, 5) B_1 (1, 8)$. Haben Sie eine Idee, welche Relation dahinter stehen könnte? Bestimmt, denn es gilt hier sicher $4 + 5 = 1 + 8$.
Wir könnten also definieren

$$B_1 := \{((a, b), (c, d)) \mid a, b, c, d \in T, a + b = c + d\},$$

oder kurz

$$(a, b)\ B_1\ (c, d) :\Leftrightarrow a + b = c + d.$$

Es gilt also $((4, 5), (1, 8)) \in B_1$.
Kommen wir zur zweiten kleinen Aufgabe.

- Bestimmen Sie die Menge B_1.
- Es gilt $B_1 = \{((4, 5), (1, 8)), \ldots\}$

Wir können gleich als weitere Übung in diesem Kontext folgende kleine Aufgabe anbieten, nämlich

- Untersuchen Sie B_1 auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Sie haben jetzt aus einer gegebenen Relation ihre Elemente bestimmt. Nun wollen wir umgekehrt vorgehen. Es sind einige - aber nicht alle - Elemente einer noch unbekannten Relation B_2 gegeben,

$$B_2 := \{((1, 1), (1, 1)), ((1, 2), (1, 2)), ((2, 4), (8, 1)), ((3, 6), (2, 9)), ((,), (,)), \ldots\}$$

- Definieren Sie eine (naheliegende) Relation B_2 auf $T \times T$
- $B_2 := \{((a, b), (c, d)) \mid a, b, c, d \in T, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- Vervollständigen Sie die Menge B_2 durch einige charakteristischen Elemente, dass B_2 als eine Äquivalenzrelation deutlich wird.

  $$B_2 := \{((1, 1), (1, 1)), ((2, 2), (2, 2)), \ldots, ((9, 9), (9, 9)), \ldots\ldots\}$$

- Zeigen Sie, dass B_2 die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität besitzt.
- Geben Sie die Äquivalenzklassen von B_2 an.

Kommen wir zu einer weiteren Definition einer Relation B_3 auf $T \times T$, nämlich

$$B_3 := \{((a, b), (c, d)) \mid a, b, c, d \in T, a \cdot d = b \cdot c\}$$

Wir können dafür auch kurz schreiben

$$(a, b)\ B_3\ (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

- Gilt $(2,4)B_3(1,2)$?
- Gilt $(2,4)B_3(2,1)$?
- Gilt $(x,x)B_3(y,y)$ für alle $x, y \in T$?
- Untersuchen Sie B_3 auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
- Wenn Sie gerade festgestellt haben, dass B_3 eine Äquivalenzrelation auf $T \times T$ ist, bestimmen Sie jetzt einige Äquivalenzklassen von B_3. Als kleine Hilfe geben wir mal eine besonders schöne an, nämlich

  $[(1,1)] = \{(x,y) \mid (x,y)B_3(1,1)\} = \{(x,y) \mid x \cdot 1 = y \cdot 1\} = \{(x,y) \mid x = y\} = \{(1,1),(2,2),\ldots,(10,10)\}$
- Bringen Sie B_3 im Kontext mit den Begriffen: Brüche, Bruchzahlen, Nenner, Zähler, Wert von Brüchen.

AUFGABE 4

Nun folgt eine Aufgabe, die ein wenig zum Forschen auffordert. Wir haben oben und in der Vorlesung schon gesehen, dass es für eine n-elementige Menge M

$$2^{n \cdot n}$$

mögliche Relationen gibt.
Für den Fall $n = 2$ könnte man $M := \{1,2\}$ wählen; damit ergibt sich sofort $M \times M := \{(a,b) \mid a, b \in \{1,2\}\}$. Hiermit gibt es also

$$2^{2 \cdot 2} = 16$$

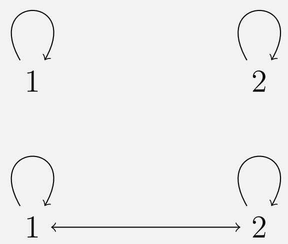
mögliche Relationen. Sicher werden nicht all diese Relationen eine Äquivalenzrelation sein. Hieraus können wir zackig zwei kleine Aufgaben anbieten, nämlich:

- Geben Sie eine Teilmenge R von $M \times M$ so an, dass sie *keine* Äquivalenzrelation ist.
- Geben Sie eine Teilmenge R von $M \times M$ so an, dass sie *eine* Äquivalenzrelation ist.

Nun kann man sich die Frage stellen, wieviele Äquivalenzrelationen es auf dieser Menge M geben kann, wahrscheinlich nicht soooooo viele. Das ist jetzt Ihre Aufgabe:

- Bestimmen Sie unter den 16 möglichen Relationen diejenigen, die eine Äquivalenzrelationen auf M erzeugen und geben Sie jeweils die Anzahl der Paare an, die in der Relation liegen.

Hier folgt ein Bild zur Hilfe, wo wir unsere Fluglinienverbindungen aus Übung 2 wieder aufgreifen.



Sie ahnen sicher, was kommt: RICHTIG. Schauen Sie sich die Situation für $M_3 := \{1, 2, 3\}$ an und beantworten Sie die obigen Fragen für diesen Fall, also

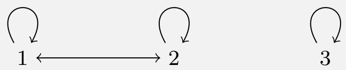
- Geben Sie eine Teilmenge R von $M_3 \times M_3$ so an, dass sie *keine* Äquivalenzrelation ist.
- Geben Sie eine Teilmenge R von $M_3 \times M_3$ so an, dass sie *eine* Äquivalenzrelation ist.

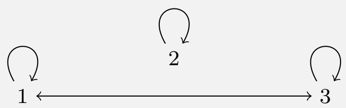
Nun kann man sich die Frage stellen, wie viele Äquivalenzrelationen es auf dieser Menge M_3 geben kann, wahrscheinlich auch nicht so viele. Das ist jetzt Ihre Aufgabe:

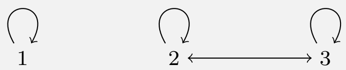
- Bestimmen Sie unter den 2^9 möglichen Relationen diejenigen, die eine Äquivalenzrelationen auf M_3 erzeugen und geben Sie jeweils die Anzahl der Paare an, die in der Relation liegen.

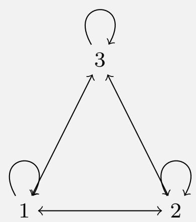
Vielleicht hilft Ihnen das folgende Bild zum Verständnis. Ist nur die Anzahl der Paare in einer Relation von Interesse, sind die Bilder 2, 3 und 4 unter diesem Gesichtspunkt im Prinzip dieselben, denn sie enthalten alle $4 < x < 6$ Paare.

$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. Diese ÄR enthält genau drei Paare.









Nun können Sie vielleicht die folgende abschließende Behauptung begründen, skizzieren Sie dabei ruhig nach obigem Vorbild die einzelnen Äquivalenzrelationen, vielleicht nur diejenigen, die sich in der Anzahl der Paare unterscheiden.

Auf einer 5-elementigen Menge - also zum Beispiel $M_5 := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ - kann es keine Äquivalenzrelation geben, die genau 19 Paare enthält.

Der Anfang könnte so ausschauen: