ÜBUNG 3

Achtung: Am kommenden Montag wird die Vorlesung auch über WebEx Raum angeboten https://uni-flensburg.webex.com/meet/hinrich.lorenzen

AUFGABE 1

Lässt sich auf einer Menge M im Falle

a) $M := \{a, b, c\}$

b) $M := \{a, b, c, d\}$

eine Verknüpfung $\circ$ mit $b \circ b = c$ und $c \circ a = b$ so definieren, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist?

AUFGABE 2

Es seien die beiden folgenden Verknüpfungstafeln auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben:

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	4	5	2	1
4	4	5	1	3	2
5	5	3	2	1	4

$*$	1	2	3	4	5
1	4	3	1	5	2
2	3	5	2	1	4
3	1	2	3	4	5
4	5	1	4	2	3
5	2	4	5	3	1

Man beweise, dass *genau eine* der beiden Verknüpfungsstrukturen $(M, \circ), (M, *)$ eine Gruppe ist.

AUFGABE 3

Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ sei für eine Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{Q}$ definiert:

$$a * b := \begin{cases} \dfrac{a \cdot b}{a + b}, & \text{für } a \neq 0,\ b \neq 0,\ a + b \neq 0 \\ \\ a + b, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne $0 * 0$, $1 * (-1)$, $0 * \frac{1}{2}$, $(-\frac{2}{3}) * \frac{3}{4}$

b) Man zeige: $\exists e \in \mathbb{Q} \;\; \forall q \in \mathbb{Q} \; : \; e * q = q * e = q$

c) Man zeige: $\forall q \in \mathbb{Q} \;\; \exists q' \in \mathbb{Q} \; : \; q * q' = q' * q = e$

d) Man zeige: $\forall p, q \in \mathbb{Q} \; : \; q * q' = q' * q$

Damit ist $(\mathbb{Q}, *)$ schon fast eine kommutative Gruppe, den Nachweis der Assoziativität ersparen wir uns.
In Gruppen lassen sich zum Beispiel schöne Gleichungen lösen, hier gibt es eine:

e) Man bestimme die Lösungen der Gleichung $x * x * 3 = \dfrac{3}{4}$ in $(\mathbb{Q}, *)$

Aufgabe 4

Sei $\oplus$ die „übertragsfreie Addition im Zehnersystem" in $\mathbb{N}_0$, d.h. bei der (schriftlichen) Addition zweier Ziffern wird lediglich die Einerziffer notiert. Folgendes Beispiel soll dies illustrieren:

	2	8	4	1	2
$\oplus$	3	6	7	9	7
$=$	5	4	1	0	9

a) Man zeige: Die Verknüpfungsstruktur $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe.

b) Man zeige: Die ein- und zweistelligen Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ bilden eine Untergruppe H von $(\mathbb{N}_0, \oplus)$, mit der Ordnung 100.

c) Man gebe eine Untergruppe H_2 von H an mit $|H_2| = 2$, also mit Ordnung 2.

d) Gibt es entsprechende Untergruppen H_4, H_5, H_{50} von H?