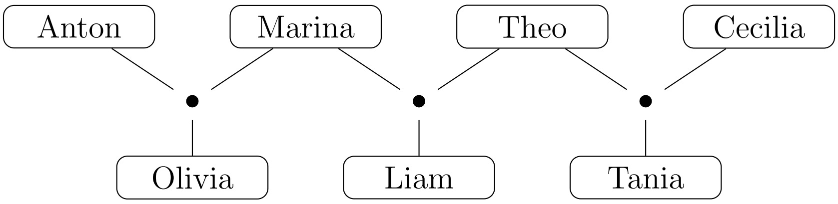
Übung 2

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe möchten wir verschiedene Relationen auf verschiedenen Mengen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität untersuchen.

a) Marina und Theo haben aus erster Ehe einen Sohn, Liam. In zweiter Ehe hat Marina zusammen mit Anton eine Tochter, Olivia. Theo hat in zweiter Ehe zusammen mit Cecilia eine Tochter, Tania.



Auf der Menge der Kinder $K = \{\text{Olivia}, \text{Liam}, \text{Tania}\}$ definieren wir eine Relation H als „ist ein Halbgeschwister von“.

Zum Beispiel ist „Olivia H Liam“ eine Kurzschreibweise für die Aussage „Olivia ist ein Halbgeschwister von Liam“. Die Aussage ist wahr, da beide Kinder die gleiche Mutter (nämlich Marina), aber verschiedene Väter (nämlich Anton und Theo) haben.

Man erläutere, warum die Relation H nicht transitiv ist.

b) Auf der Menge $M = \{\text{Schere}, \text{Stein}, \text{Papier}\}$ definieren wir eine Relation S als „schlägt“.

Man untersuche, ob die Relation S transitiv ist.

c) Auf der Menge $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ definieren wir eine Relation $\perp$ als „ist teilerfremd zu“.

Zum Beispiel ist $24 \perp 85$, da 24 (mit der Primfaktorzerlegung $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$) teilerfremd zu 85 (mit der Primfaktorzerlegung $5 \cdot 17$) ist.

(i) Man beurteile die Aussage $28 \perp 77$.

(ii) Man untersuche, ob die Relation $\perp$ auf der Menge X symmetrisch bzw. transitiv ist.

d) Der Film „Love Actually“ von 2003 ist eine romantische Komödie, die manche Leute schön und andere kitschig finden.

Ein Teil des Films behandelt eine trickreiche Dreieckssituation: Juliet und Peter lieben sich. Mark liebt Juliet, aber Juliet liebt Mark nicht zurück.

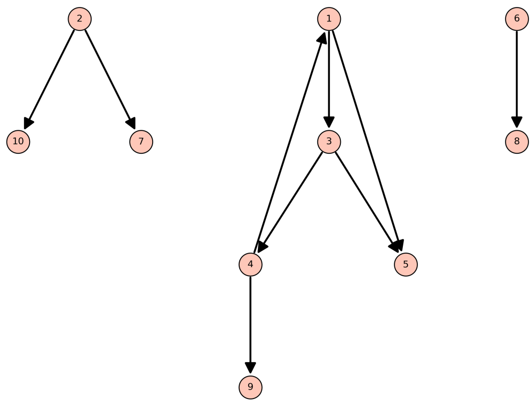
Um die Situation abzubilden, definieren wir nun auf der Menge der Figuren $F = \{\text{Juliet}, \text{Peter}, \text{Mark}\}$ eine Relation $\heartsuit$ als „liebt“.

> Man untersuche, ob die Relation $\heartsuit$ symmetrisch ist.

e) Nun sei wieder $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Wir betrachten die Relation $\mid$ auf X, welche als „ist ein Teiler von“ definiert ist.

> (i) Man beurteile die Aussage $80 \mid 20$.
>
> (ii) Man untersuche, ob die Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf X symmetrisch bzw. transitiv ist.

f) Das folgende Bild zeigt Orte, die über Einbahnstraßen verbunden sind.



Wir beschreiben die Orte durch eine Menge $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ und definieren eine Relation R als „ist erreichbar von“.

Zum Beispiel ist $5R4$ eine Kurzschreibweise für „5 ist erreichbar von 4“. Die Aussage ist wahr, da es zum Beispiel den Pfad $4 \mapsto 1 \mapsto 3 \mapsto 5$ gibt.

> (i) Man beurteile die Aussage $9R5$.
>
> (ii) Man untersuche, ob die Erreichbarkeitsrelation R symmetrisch bzw. transitiv ist.

g) Wir betrachten eine Menge

$$W = \{\text{Big Ben}, \text{Brandenburger Tor}, \text{Eiffelturm}, \text{Kleine Meerjungfrau}\}$$

aus Wahrzeichen verschiedener europäischer Hauptstädte. Wir definieren eine Relation H als „ist höher als". Man untersuche, ob die Relation R reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist.

AUFGABE 2

Es folgen einige bekannte Definitionen (ohne Quantoren) und einige unbekannte Definitonen für Relationen R.

Eigenschaft	**Definition**
Reflexiv	$(x, x) \in R_1$
Irreflexiv	$(x, x) \notin R_2$
Symmetrisch	$(x, y) \in R_3 \Rightarrow (y, x) \in R_3$
Asymmetrisch	$(x, y) \in R_4 \Rightarrow (y, x) \notin R_4$
Antisymmetrisch	$(x, y) \in R_5$ und $(y, x) \in R_5 \Rightarrow x = y$
Transitiv	$(x, y) \in R_6$ und $(y, z) \in R_6 \Rightarrow (x, z) \in R_6$
Total	$(x, y) \in R_7$ oder $(y, x) \in R_7$

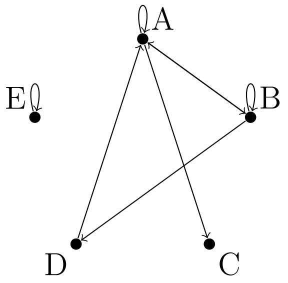
Als Menge wählen wir unsere ganzen Zahlen, also die Menge $\mathbb{Z} := (-1)\cdot\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$.

a) Geben Sie zu jeder Eigenschaft ein konkretes Beispiel (mit Begründung) einer Relation R_i. Versuchen Sie, möglichst paarweise verschiedene Relationen zu finden (also sieben verschiedene!).

> **Beispiel**. Unsere Teilbarkeitsrelation $|$ erfüllt die Eigenschaft der Reflexivität, denn es gilt für alle ganzen Zahlen
>
> $$(z, z) \in | \quad \text{bzw. } z \mid z.$$
>
> Dies ist erfüllt, da stets gilt:
>
> $$z \cdot 1 = z$$

b) (Kreativ-Aufgabe) Erfinden Sie eine eigene Relation auf der Menge der ganzen Zahlen.

AUFGABE 3 [mit Korrektur]
In Sikinien gibt es fünf Flughäfen: Adorf (A), Behausen (B), Cekirchen (C), Dewald (D) und Estadt (E). Zwischen einigen dieser Flughäfen gibt es Linienflüge. Wir betrachten die Relation, die zwischen zwei Flughäfen x und y genau dann besteht, wenn es einen direkten Linienflug von x nach y gibt. Diese Relation lässt sich dann über ein Pfeilbild veranschaulichen:



a) Stellen Sie die im obigen Bild dargestellte Relation als Menge geordneter Paare dar.

b) Stellen Sie die in der Paarschreibweise durch

$$\{(A,B),(B,C),(C,A),(C,D),(D,D),(E,A),(A,E),(E,E),(A,E)\}$$

gegebene Relation in einem Pfeilbild dar.

c) Wie kann man an einem Pfeilbild erkennen, ob die dadurch dargestellte Relation reflexiv ist?

d) Wie lässt sich die Reflexivität der "Fluglinienrelation" einfach in vertrauter Sprache ausdrücken?

e) Wie kann man an einem Pfeilbild erkennen, ob die dadurch dargestellte Relation symmetrisch ist?

f) Wie lässt sich die Symmetrie der "Fluglinienrelation" einfach in vertrauter Sprache ausdrücken?

g) Wie kann man an einem Pfeilbild erkennen, ob die dadurch dargestellte Relation transitiv ist?

h) Wie lässt sich die Transitivität der "Fluglinienrelation" einfach in vertrauter Sprache ausdrücken?

AUFGABE 4 [mit Korrektur]
Es sei auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine Relation R definiert als

$$aRb :\Leftrightarrow 9a - 3b \in 2\mathbb{Z}. \tag{1}$$

- Zum Beispiel ist das Paar $(7, 5) \in R$ ein Element dieser Relation, da für $a = 7$ und $b = 5$ die Zahl $9 \cdot a - 3 \cdot b = 9 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 63 - 15 = 48$ wegen $48 = 2 \cdot 24$ gerade ist.
- Auf der anderen Seite ist $(1, 2) \notin R$, da $9 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3$ ungerade ist.

In Formeln schreiben wir die beiden Aussagen als $7R5$ und $\neg(1R2)$.

a) Man überprüfe die Aussage $6R5$.

b) Man zeige, dass die Relation R reflexiv ist, d.h. für alle ganzen Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ die Aussage xRx wahr ist.

Zu diesem Zwecke setze man $a := x$ und $b := x$ in die Definition der Relation (siehe (1)) ein, um die Aussage xRx auszuwerten.

c) Man zeige, dass die Relation R symmetrisch ist, d.h. für alle ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ die Aussage $(xRy) \Rightarrow (yRx)$ wahr ist.

d) Man zeige, dass die Relation R transitiv ist, d.h. für alle ganzen Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ die Aussage $((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$ wahr ist.

Wir betrachten die folgenden 16 Aussagen.

$1R1$	$1R2$	$1R3$	$1R4$
$2R1$	$2R2$	$2R3$	$2R4$
$3R1$	$3R2$	$3R3$	$3R4$
$4R1$	$4R2$	$4R3$	$4R4$

e) Man markiere die Aussagen mit einem grünen Haken oder einem roten Kreuz, je nachdem, ob sie stimmen oder nicht. Welches Muster ergibt sich?

Aufgabe 5

Wir definieren eine weitere Eigenschaft von Relationen (vgl. Aufgabe 2, Zeile 5): Eine Relation R auf einer Menge M heißt antisymmetrisch, wenn gilt

$$\forall a, b \in M : \ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b,$$

oder wieder in der üblichen Schreibkonvention

$$\forall a, b \in M : \ aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b.$$

a) Ignor Mynus argumentiert:

> Die Relation „teilt“ ist antisymmetrisch auf $\mathbb{Z}$, denn für alle ganzen Zahlen a, b folgt aus $a \mid b$ und $b \mid a$ stets $a = b$

Hat Ignors Argumentation eine Lücke?

b) Man gebe auf der Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\}$ eine (nichtleere) antisymmetrische Relation an.