Übung 12

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe möchten wir *quadratische Gleichungen* lösen.

a) In ihrer einfachsten Form ist eine quadratische Gleichung von der Art

$$x^2 = 25. \tag{1}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (1) besteht aus allen reellen Zahlen mit dem Quadrat 25. Diese Gleichung ist einfach zu lösen, da einerseits der Term x^2 bereits ein vollständiges Quadrat ist und andererseits die Zahl 25 eine Quadratzahl ist.

Negative Lösungen nicht zu vergessen, ist die Lösungsmenge der Gleichung (1) gleich $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 25\} = \{-5, 5\}$.

Geben Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

(i) $x^2 = 9$ (ii) $x^2 = 49$ (iii) $x^2 = 2025$ (iv) $x^2 = -4$

b) Nun betrachten wir eine Variante, bei der die Zahl auf der rechten Seite der Gleichung keine Quadratzahl ist, zum Beispiel

$$x^2 = 3. \tag{2}$$

Nach der Definition der Wurzel ist $\sqrt{3}$ eine *positive* reelle Zahl mit dem Quadrat 3. Daher ist $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ die Lösungsmenge der Gleichung (2).

Wir sehen, dass die Gleichung $x^2 = 3$ zwar zwei Lösungen besitzt, die Wurzel aus 3 aber nur eine der beiden Lösungen ist. Wir merken: es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Geben Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

(i) $x^2 = 5$ (ii) $x^2 = 7$ (iii) $x^2 = 12$ (iv) $x^2 = -1$

c) Nun betrachten wir eine Variante, bei der der Ausdruck auf der linken Seite immer noch ein vollständiges Quadrat ist, aber nicht mehr das Quadrat der Variablen x, zum Beispiel

$$(x-4)^2 = 11. \tag{3}$$

Nun kommen für $x - 4$ genau die Werte $\sqrt{11}$ und $-\sqrt{11}$ in Frage. Daher ist die Lösungsmenge der Gleichung (3) gleich $\{4 + \sqrt{11}, 4 - \sqrt{11}\}$.

Berechnen Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(i) $(x-5)^2 = 13$ (ii) $(x+1)^2 = 1$

(iii) $(x-8)^2 = -10$ (iv) $(x-3)^2 = 16$

d) Nun betrachten wir den Fall, bei der der Ausdruck auf der linken Seite kein vollständiges Quadrat mehr ist, zum Beispiel

$$x^2 - 6x = 16. \tag{4}$$

In diesem Fall vervollständigen wir den Term $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3$ zu einem Quadrat, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 3^2 ergänzen.

Die mathematische Grundlage für diesen Schritt ist die zweite binomische Formel $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Setzen wir $a = x$, so müssen wir $b = 3$ halb so groß wie 6 wählen, damit der Term $2ab$ mit dem Term $6x$ aus der Aufgabe übereinstimmt.

Die Gleichung (4) ist damit äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 &= 16 + 3^2 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Damit kommen für $x - 3$ genau die Werte -5 und 5 in Frage. Die Lösungsmenge der Gleichung (4) ist daher $\{-2, 8\}$.

Berechnen Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(i) $x^2 + 2x = 2$ (ii) $x^2 - 7x = -12$

(iii) $x^2 + 5x = -4$ (iv) $x^2 - x = 1$

e) Zuletzt betrachten wir quadratische Gleichungen, bei denen der Vorfaktor vor dem Monom x^2 ungleich 1 ist, zum Beispiel

$$2x^2 - 24x = -70. \tag{5}$$

In diesem Fall klammern wir die 2 aus und machen anschließend eine quadratische Ergänzung. Die Gleichung (5) ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(x^2 - 12 \cdot x\right) &= -70, \\ 2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2\right) &= -70 + 2 \cdot 6^2, \\ 2 \cdot (x-6)^2 &= 2, \\ (x-6)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Damit kommen für $x - 6$ genau die Werte -1 und 1 in Frage. Die Lösungsmenge der Gleichung (5) ist daher $\{5, 7\}$.

Berechnen Sie nun die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(i) $3x^2 + 12x = 135$ (ii) $4x^2 + 8x = 4$

AUFGABE 2

Es folgen weitere Aufgaben zu quadratischen Gleichungen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik.

a) Finden Sie alle Paare von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, deren Produkt 56 ist.

b) Eine Seite eines Rechtecks ist genau 4 Meter länger als die andere Seite. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist 60 Quadratmeter. Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks.

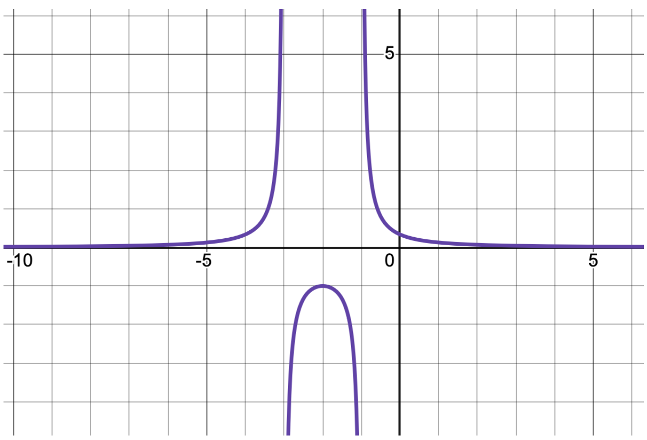
c) In einer Urne befinden n Kugeln, von denen genau 7 Kugeln blau und die übrigen Kugeln grün sind. Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen zwei blaue Kugeln zu ziehen, beträgt

$$p(n) = \frac{7}{n} \cdot \frac{6}{n-1}.$$

Finden Sie alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die $p(n) = \frac{1}{5}$ gilt.

d) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionsvorschrift

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}.$$



Aufgabe 3

Angenommen, p und q seien zwei verschiedene reelle Zahlen, sodass die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei reelle Lösungen x_1 und x_2 haben möge. Dann sagt der *Satz von Vieta*[1]:

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Der Satz von Vieta ermöglicht es uns, quadratische Gleichungen durch Kombinieren zu lösen.
Ist zum Beispiel die Gleichung $x^2 - 18x + 77 = 0$ zu lösen, so suchen wir zwei Zahlen x_1 und x_2 mit der Summe $x_1 + x_2 = 18$ und dem Produkt $x_1x_2 = 77$. Die möglichen Teiler der Zahl 77 ausprobierend kommen wir auf $x_1 = 7$ und $x_2 = 11$. Damit gilt $x^2 - 18x + 77 = (x-7)(x-11)$. Nach dem Satz vom Nullprodukt hat die Gleichung $(x-7)(x-11) = 0$ die Lösungsmenge $\{7, 11\}$.

a) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, die $x_1 = 10$ und $x_2 = 15$ als Lösungen hat.

b) Finden Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 10x + 24 = 0$.

c) Finden Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$.

d) Seien x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 17x + 13 = 0$. Berechnen Sie, welche Werte die folgenden Ausdrücke haben.

   (i) $x_1^2x_2^2$ (ii) $x_1^2 + x_2^2$ (iii) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ (iv) $x_1^3 + x_2^3$

e) Es seien $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Angenommen, die Gleichung $x^2 + ax + b + 1$ habe zwei verschiedene natürliche Zahlen $x_1 \in \mathbb{N}$ und $x_2 \in \mathbb{N}$ als Nullstellen.

   Zeigen Sie, dass die Zahl $a^2 + b^2$ keine Primzahl ist.

[1] Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Satz von Vieta herzuleiten. Zum Beispiel können wir die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 + px + q \qquad \text{und} \qquad g(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

betrachten. Dann ist die Differenz der beiden Funktionen

$$f(x) - g(x) = (p + x_1 + x_2) \cdot x + (q - x_1x_2)$$

eine lineare Funktion mit der Steigung $p + x_1 + x_2$ und dem Achsenabschnitt $q - x_1x_2$. Da die Funktion $f(x) - g(x)$ zwei verschiedene Nullstellen x_1 und x_2 hat, müssen sowohl die Steigung als auch der Achsenabschnitt gleich 0 sein. Daraus folgen die Gleichungen $p + x_1 + x_2 = 0$ und $q - x_1x_2 = 0$, welche den Satz von Vieta liefern.

AUFGABE 4

Die folgende Aufgabe stammt von der deutschen Mathematik-Olympiade, die letzte Woche in Göttingen stattgefunden hat. Die Aufgabe richtete sich an die achte Klasse. Für Schleswig-Holstein starteten in der 8. Klasse Inaaya, Franzi, Bjarne und Jakob. Alle vier konnten die Aufgabe lösen. Wir laden nun die Studierenden ein, sich an der Aufgabe zu versuchen.

- Herr Valentin Krüger sitzt gemeinsam mit seiner Frau Monika Krüger, deren beiden Töchtern Almut und Josephine und seinen Eltern Gustav und Hannelore Krüger am Kaffeetisch. Es ist der Geburtstag der älteren Tochter Almut.
- Monika Krüger liebt Zahlenspielereien. Sie sagt: „Wenn man für jeden von uns das Alter in vollen Jahren nimmt, sind wir alle zusammen 240 Jahre alt. Wir Eltern sind zusammen dreimal so alt wie unsere beiden Kinder zusammen, und die Großeltern sind zusammen doppelt so alt wie wir Eltern zusammen. Wer weiß noch etwas?“
- Almut antwortet: „Außer Opa und mir sind alle anderen zusammen doppelt so alt wie Opa allein, und die Summe der Alter von Mama und Papa ist ein Vielfaches von Josephines Alter.“
- Herr Krüger hat angestrengt nachgedacht: „Opa war bei Almuts Geburt genau dreimal so alt wie Mama bei Almuts Geburt.“
- Untersuche, ob man aus diesen korrekten Angaben das Alter jedes der sechs Familienmitglieder eindeutig ermitteln kann.

Hinweis: Alle Altersangaben sind in vollen Jahren, also in ganzzahligen Jahren.